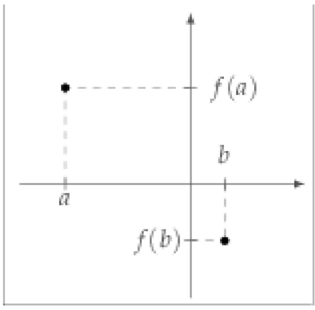
Teorema de Bolzano

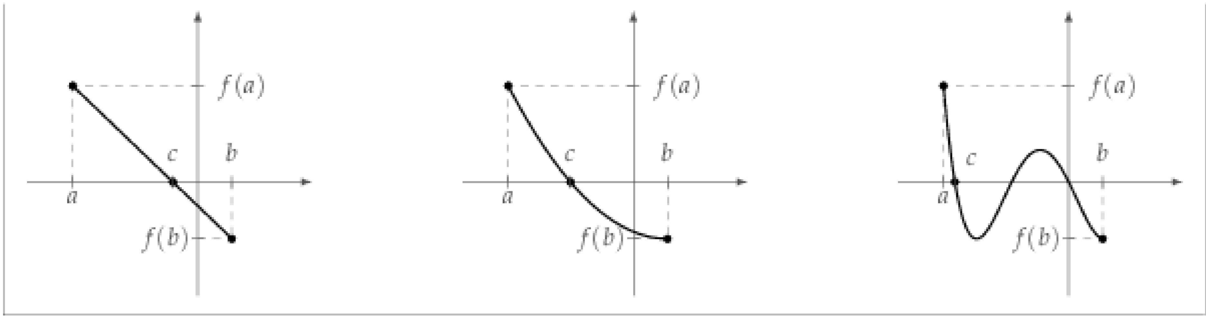
Ya sabemos calcular ceros para funciones lineales (despejando) y cuadráticas (mediante la fórmula de la resolvente). Sin embargo, no hay fórmulas generales para encontrar los ceros de funciones continuas. El Teorema de Bolzano es una herramienta que nos permite, en algunos casos, aproximar los ceros de una función continua.

Teorema de Bolzano: Sea f una función real continua en todo punto del intervalo $[a, b]$. Si $f(a)$ y $f(b)$ son dos números de distinto signo, entonces existe por lo menos un valor c en el intervalo (a, b) donde la función f vale 0.

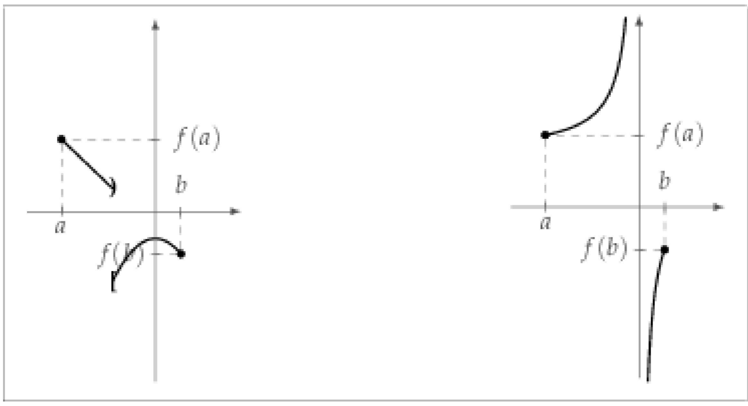
Intuitivamente, lo que dice el Teorema de Bolzano es que, si tenemos que dibujar una función \textbf{sin levantar el lápiz} (continua) y el punto de partida está de un lado del eje x y el de llegada del otro (ésta es la condición de que $f(a)$ y $f(b)$ tengan distinto signo)



entonces, de cualquier modo que dibujemos la función, vamos a tener que cruzar el eje x en algún momento por lo menos una vez (y ése será un punto c tal que $f(c) = 0$).



Observemos que la condición de que la función sea continua es fundamental:



En estos casos, a pesar de que los signos de $f(a)$ y de $f(b)$ son distintos, el tener que levantar el lápiz para dibujar las funciones hace que pueda no existir un valor c entre a y b donde la función valga 0.

Aplicaciones

1) Utilicemos ahora el Teorema de Bolzano para aproximar un cero de una función continua. Por ejemplo, tomemos la función polinómica $f(x) = x^3 + x^2 - 3$. La función cumple:

- $f(0) = -3$
- $f(2) = 9$
- f es continua en todo $\mathbb{R}$ (ya que es polinómica).

Entonces, encontramos dos valores donde la función continua cambia de signo ($f(0) = -3 < 0$ y $f(2) = 9 > 0$). El Teorema de Bolzano nos asegura que existe un valor c con $0 < c < 2$ tal que $f(c) = 0$, es decir, que hay un cero de la función entre 0 y 2.

Más aún, podemos seguir utilizando este teorema para aproximar mejor un valor c donde la función vale 0.

Dada la función $f(x) = x^3 + x^2 - 3$, ya sabemos que $f(0) = -3$ y $f(2) = 9$. ¿Cuánto vale f en 1, el punto medio del intervalo $(0; 2)$? Antes de hacer la cuenta, pensemos lo siguiente:

- Si $f(1) = 0$ ya tenemos un cero de la función.
- Si $f(1) < 0$, como $f(2) > 0$, usando de nuevo el teorema, tenemos que la función tiene un cero en el intervalo $(1; 2)$ que es un intervalo más chico que el $(0; 2)$.
- Si $f(1) > 0$, como $f(0) < 0$, usando de nuevo el teorema, tenemos que la función tiene un cero en el intervalo $(0; 1)$ que es un intervalo más chico que el $(0; 2)$.

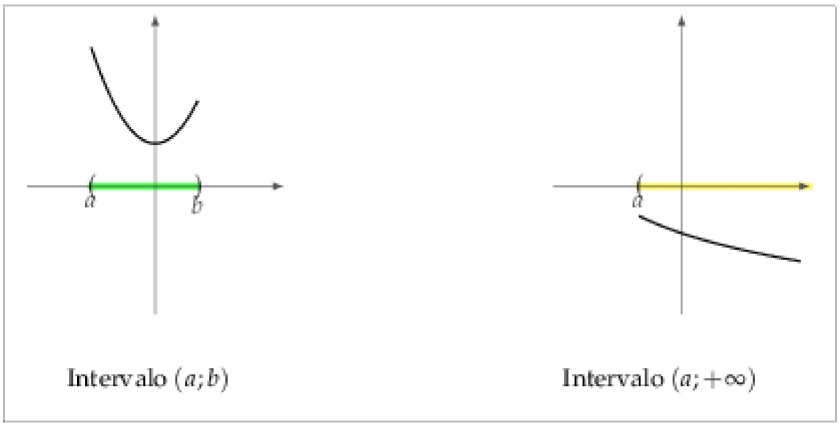
Para decidir en qué caso estamos, basta calcular $f(1) = -1$, así que f tiene un cero en el intervalo $(1; 2)$.

Si seguimos un paso más, buscamos el punto medio (el promedio) entre 1 y 2: $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$. Evaluamos $f(\frac{3}{2}) = \frac{21}{8}$ y, como este valor es positivo y $f(1)$ es negativo, resulta que hay un cero de la función en el intervalo $(1; \frac{3}{2})$ que tiene longitud $\frac{1}{2}$.

Siguiendo así, podemos acercarnos al cero de la función tanto como queramos (porque en cada paso lo encerramos en un intervalo cuya longitud es la mitad de la longitud del intervalo anterior). El próximo paso, por ejemplo, sería calcular el promedio entre 1 y $\frac{3}{2}$ (que da $\frac{5}{4}$), evaluar la función en ese punto y decidir usando el Teorema de Bolzano si $\frac{5}{4}$ es un cero, si el cero está en el intervalo $(1; \frac{5}{4})$ o en el $(\frac{5}{4}; \frac{3}{2})$.

2) Corolario del Teorema de Bolzano:

Supongamos ahora que tenemos que dibujar en un intervalo una función continua que nunca vale cero (es decir, cuyo gráfico no toque el eje x). La condición de que sea continua nos obliga a que, una vez que elijamos si la función en un punto es positiva o negativa (no puede ser 0 porque, si no, su gráfico estaría tocando el eje x) en el resto de los puntos la función deberá conservar este signo, es decir, será toda positiva o toda negativa, ya que no podemos cruzar el eje:



Esto es exactamente lo que dice el Corolario del Teorema de Bolzano:

Corolario del Teorema de Bolzano: Sea f una función real continua en todo punto de un intervalo real. Si f no vale 0 para ningún punto de dicho intervalo, entonces su signo en el intervalo es constante (es decir, es siempre positiva o siempre negativa en el intervalo).

Ahora aplicaremos el corolario del Teorema de Bolzano para calcular los conjuntos de positividad y de negatividad de una función continua a partir de su conjunto de ceros.

Ejemplo: Calcular C^0, C^+ y C^- de la función $f(x) = (-2x^4 + 2x^3)(x^2 - 5x + 4)$.

Lo primero que vamos a calcular son **todos** los ceros de la función (para poder usar el Corolario del Teorema de Bolzano tenemos que saber que la función no vale 0 dentro de los intervalos a analizar, así que es fundamental hallar **todos** los ceros de antemano).

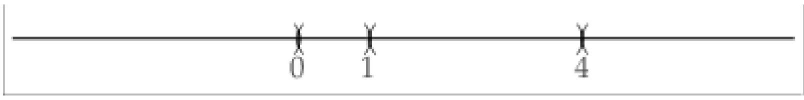
$$f(x) = (-2x^4 + 2x^3)(x^2 - 5x + 4) = 0 \text{ si y sólo si } -2x^4 + 2x^3 = 0 \text{ ó } x^2 - 5x + 4 = 0$$

(recordar que un producto es 0 si y sólo si alguno de los factores es 0).

a) $-2x^4 + 2x^3 = 0$: sacando factor común tenemos que $-2x^4 + 2x^3 = 2x^3(-x+1)$ y esto vale 0 si y sólo si $2x^3 = 0$ ó $-x + 1 = 0$; es decir, si y sólo si $x = 0$ ó $x = 1$.

b) $x^2 - 5x + 4 = 0$: usando la resolvente, tenemos que $x^2 - 5x + 4 = 0$ si y sólo si $x = 1$ ó $x = 4$.

Resumiendo, los únicos valores donde f vale 0 son $0, 1$ y 4. Es decir, tenemos que $C^0 = \{0, 1, 4\}$. Estos valores dividen a los números reales en cuatro intervalos, cada uno de los cuales no contiene ningún cero de la función f:



Entonces, tenemos una función continua en todo $\mathbb{R}$ (es polinómica) que en cada uno de los intervalos $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 4)$, $(4; +\infty)$ tiene signo constante. Por lo tanto, si elegimos un punto cualquiera en cada uno de estos intervalos, el signo de la función en dicho punto va a coincidir con el signo de la función en todo el intervalo.

Analicemos qué pasa en cada intervalo:

- En $(-\infty; 0)$: elegimos un punto en el intervalo, por ejemplo -2, y evaluamos

$$f(-2) = (-2(-2)^4 + 2(-2)^3)((-2)^2 - 5(-2) + 4) = (-48).(18) < 0.$$

Entonces en todo el intervalo $(-\infty; 0)$ la función es negativa.

- En $(0; 1)$: elegimos un punto en el intervalo, por ejemplo $0,5$, y evaluamos

$$f(0,5) = (-2(0,5)^4 + 2(0,5)^3)((0,5)^2 - 5(0,5) + 4) = (0,125).(1,75) > 0.$$

Entonces en todo el intervalo $(0; 1)$ la función es positiva.

- En $(1; 4)$: elegimos un punto en el intervalo, por ejemplo 2, y evaluamos

$$f(2) = (-2(2)^4 + 2(2)^3)((2)^2 - 5(2) + 4) = (-16).(-2) > 0.$$

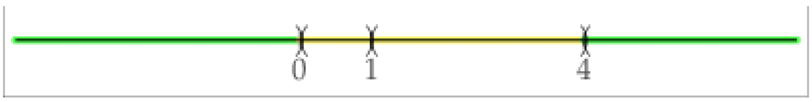
Entonces en todo el intervalo $(1; 4)$ la función es positiva. (Notar que, en este caso, en dos intervalos contiguos, el $(0; 1)$ y el $(1; 4)$, la función tiene el mismo signo: no es necesariamente cierto que de intervalo a intervalo los signos vayan cambiando.)

- En $(4; +\infty)$: elegimos un punto en el intervalo, por ejemplo 5, y evaluamos

$$f(5) = (-2(5)^4 + 2(5)^3)((5)^2 - 5(5) + 4) = (-1000).(4) < 0.$$

Entonces en todo el intervalo $(4; +\infty)$ la función es negativa.

Resumiendo lo obtenido en un gráfico con colores, tenemos que



Suele representarse lo obtenido en una tabla:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
pues	$f(-2) < 0$		$f(0,5) > 0$		$f(2) > 0$		$f(5) < 0$

Es decir, la respuesta del ejemplo es

$$C^0 = \{0, 1, 4\},\ C^+ = (0; 1) \bigcup (1; 4) \text{ y } C^- = (-\infty; 0) \bigcup (4; +\infty).$$