Inecuaciones

Ejemplo 1. Graficar el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 7 \leq 2x + 1 \leq 9\}$.

La condición $7 \leq 2x + 1 \leq 9$ que define a A significa que los elementos de este conjunto son los números reales que cumplen simultáneamente las dos desigualdades siguientes:

$$7 \leq 2x + 1 \quad \text{y} \quad 2x + 1 \leq 9.$$

Podemos resolver cada una de las dos inecuaciones por separado y luego ver qué valores son soluciones de ambas, pero veamos cómo resolverlas juntas. Para hacerlo, llevaremos la expresión

$$7 \leq 2x + 1 \leq 9$$

a otra equivalente y más simple.

Empecemos restando 1 en todos los miembros:

$$7 - 1 \leq 2x + 1 - 1 \leq 9 - 1.$$

Observemos que en el miembro del medio se cancelan dos términos:

$$7 - 1 \leq 2x \cancel{+1} \cancel{-1} \leq 9 - 1.$$

Y entonces nos queda:

$$6 \leq 2x \leq 8.$$

Ahora dividimos por 2 en todos los miembros, pero cuidado: *si dividiéramos por un número negativo, tendríamos que invertir el sentido de las desigualdades,*

$$\frac{6}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{8}{2}.$$

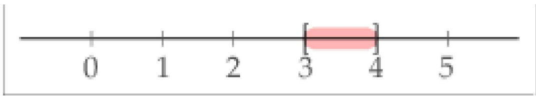
Simplificamos y finalmente obtenemos:

$$3 \leq x \leq 4.$$

Entonces el conjunto A se puede escribir como

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 3 \leq x \leq 4\} = [3;4],$$

cuya representación en la recta es



Ejemplo 2. Escribir como un intervalo o una unión de intervalos y representar en la recta el conjunto

$$B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, (x - 2)(x + 4) < 0\}.$$

Antes de resolver, recordemos que, por la regla de los signos, *un producto de dos factores es positivo (es decir, mayor que cero) cuando ambos factores tienen el mismo signo, y es negativo (o sea, menor que cero) en los otros casos*. Por ejemplo:

$$2.3 > 0 \; ; \; (-2)(-3) > 0 \; ; \; 2.(-3) < 0 \; ; \; (-2).3 < 0$$

Para que $(x - 2)(x + 4)$ sea negativo, hay dos casos posibles

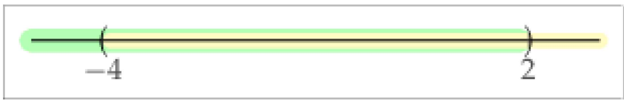
$$\text{a)}\quad x-2>0 \quad \text{y} \quad x+4<0$$

$$\text{o bien}$$

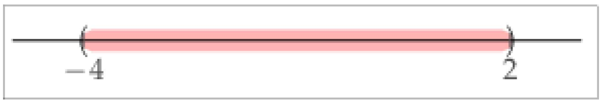
$$\text{b)}\quad x-2<0 \quad \text{y} \quad x+4>0$$

a) Despejando, vemos que esto ocurre si y sólo si $x>2$ y $x<-4$; pero estas dos condiciones no pueden cumplirse simultáneamente. Un número no puede ser menor que -4 y al mismo tiempo mayor que 2. El caso a), por lo tanto, no produce soluciones.

b) Para esto debe ser $x<2$ y simultáneamente $x>-4$:



Luego, x está en el intervalo $(-4;2)$ que se representa en la figura:



$$\boxed{B=(-4;2)}$$

Ejemplo 3. Escribir como un intervalo o una unión de intervalos y representar en la recta el conjunto

$$C=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,\frac{2x+1}{x+3}\geq 1\right\}.$$

Primero llevemos la desigualdad $\frac{2x+1}{x+3}\geq 1$ a otra equivalente pero donde, en vez de comparar una fracción con 1, se compara otra fracción con 0:

$$\frac{2x+1}{x+3}\geq 1 \iff \frac{2x+1}{x+3}-1\geq 0 \iff$$

$$\iff \frac{2x+1-(x+3)}{x+3}\geq 0 \iff$$

$$\iff \frac{2x+1-x-3}{x+3}\geq 0 \iff \frac{x-2}{x+3}\geq 0.$$

Por la regla de los signos, para que la fracción $\frac{x-2}{x+3}$ sea mayor o igual que cero, hay dos casos posibles

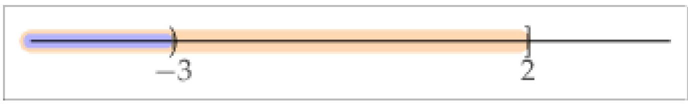
$$\text{a)}\quad x-2\leq 0 \quad \text{y} \quad x+3<0$$

$$\text{o bien}$$

$$\text{b)}\quad x-2\geq 0 \quad \text{y} \quad x+3>0$$

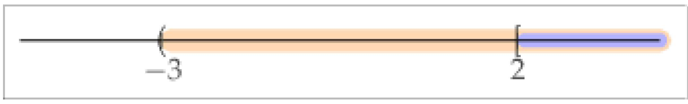
Notemos que el denominador nunca puede ser cero.

a) Esto vale si y sólo si $x\leq 2$ y $x<-3$. Veamos gráficamente cuándo se cumplen ambas condiciones en simultáneo:



Esto nos da el intervalo $(-\infty;-3)$.

b) Esta situación ocurre si y sólo si $x \geq 2$ y $x > -3$. Veamos gráficamente cuándo se cumplen ambas condiciones en simultáneo:



Esto nos da el intervalo $[2;+\infty)$.

Luego, la solución final, que es la unión de las soluciones de los casos a) y b), es

$$\boxed{C = (-\infty;-3) \cup [2;+\infty)}$$

que representamos gráficamente: