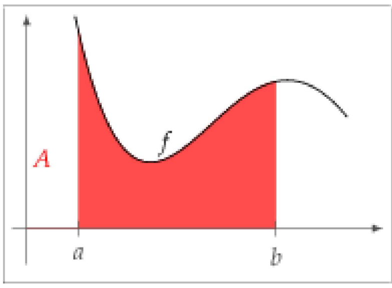
Integral definida

Definición de integral definida

Sea f una función continua **que toma valores positivos o cero** en un intervalo $[a,b]$. La ***integral definida*** de f entre a y b (que se nota $\int_a^b f(x)dx$ y se lee "integral entre a y b de $f(x)$ diferencial x") es el área de la región comprendida entre el gráfico de f y el eje x en el intervalo $[a,b]$. A a y a b se los llama límites de integración.

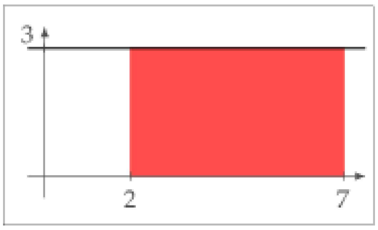
En el siguiente gráfico, si A es el área sombreada en rojo,



resulta que

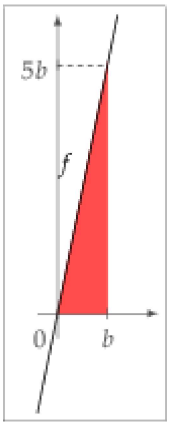
$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Por ejemplo, si f es la función constante $f(x) = 3$, entonces $\int_2^7 f(x)dx$ resulta el área del rectángulo de base 5 y altura 3 que se muestra en la figura



y, por lo tanto, $\int_2^7 f(x)dx = 5.3 = 15.$

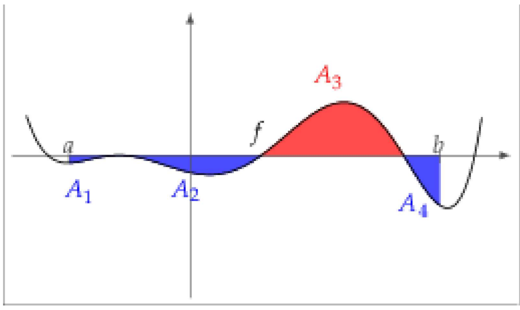
Consideremos ahora la función $f(x) = 5x$ y calculemos, para un valor $b > 0$, $\int_0^b 5x\,dx$.



Como la función cumple que es positiva o cero en el intervalo en cuestión, la integral coincide con el área del triángulo que se muestra en la figura de base b y altura $5b$ que vale $\frac{b.5b}{2}$, es decir

$$\int_0^b 5x\,dx = \frac{5}{2}b^2.$$

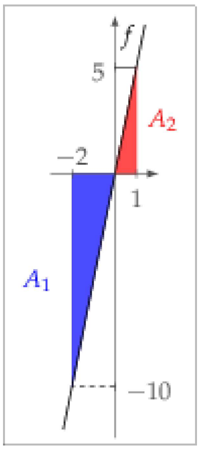
En el caso en que la función f tome **valores positivos, negativos o cero** en el intervalo $[a,b]$, la ***integral definida*** de f entre a y b es la suma de las áreas de las regiones que determina el gráfico de la función f y el eje x **por arriba** del eje x **menos** la suma de las áreas de las regiones que determina el gráfico de la función f y el eje x **por debajo** del eje x. Es decir, en el
siguiente gráfico, si f es la función y A_1, A_2, A_3 y A_4 son las áreas correspondientes



entonces

$$\int_a^b f(x)dx = -A_1 - A_2 + A_3 + A_4$$

Por ejemplo, dada la función $f(x) = 5x$, calculemos $\int_{-2}^{1} 5x\,dx$.



Si miramos el gráfico, el área que queda por debajo del eje x es $A_1 = \frac{2.10}{2} = 10$ y el área que queda por arriba del eje x es $A_2 = \frac{1.5}{2} = \frac{5}{2}$. Entonces

$$\int_{-2}^{1} 5x\,dx = -A_1 + A_2 = -10 + \frac{5}{2} = -\frac{15}{2}.$$

En general para calcular integrales definidas no utilizaremos fórmulas de áreas sino una regla muy útil.

Regla de Barrow

La **regla de Barrow** nos permite calcular integrales definidas:

Sea F una primitiva (cualquiera) de f. Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Por ejemplo, si queremos calcular $\int_{-2}^{1} 5x\,dx$ usando la regla de Barrow, primero tenemos que buscar una primitiva de $f(x) = 5x$:

$$\int 5x\,dx = 5.\int x\,dx = 5.\frac{x^2}{2} + C$$

Tomamos cualquier primitiva de f, por ejemplo $F(x) = 5.\frac{x^2}{2}$ (cuando elegimos $C = 0$).

Entonces, la regla de Barrow dice que

$$\int_{-2}^{1} 5x\,dx = F(1) - F(-2) = 5.\frac{1^2}{2} - 5.\frac{(-2)^2}{2} = \frac{5}{2} - 10 = -\frac{15}{2}$$

que es el mismo resultado que habíamos obtenido antes calculando la integral como resta de áreas.

Supongamos que elegimos otra primitiva de f, por ejemplo $G(x) = 5.\frac{x^2}{2} + 1$ (cuando elegimos $C = 1$). En este caso, la regla de Barrow nos asegura que

$$\int_{-2}^{1} 5x\,dx = G(1) - G(-2) = 5.\frac{1^2}{2} + 1 - (5.\frac{(-2)^2}{2} + 1) = \frac{7}{2} - 11 = -\frac{15}{2}.$$

Notar que, no importa qué primitiva elijamos, la integral definida da lo mismo.

Una notación usual para la resta $F(b) - F(a)$ es

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Por ejemplo, $5.\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1} = 5.\frac{1^2}{2} - 5.\frac{(-2)^2}{2} = -\frac{15}{2}.$

Ejemplo. Calcular $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)dx.$

Para poder aplicar la regla de Barrow, tenemos que calcular una primitiva de $\operatorname{sen}(x)$:

$$\int \operatorname{sen}(x)dx = -\cos(x) + C.$$

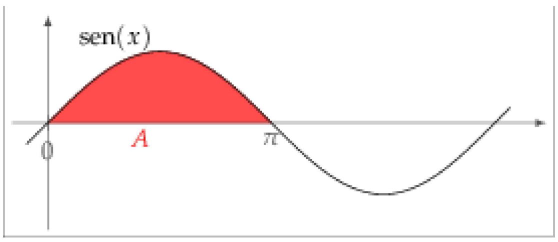
Ahora elegimos una primitiva de $\operatorname{sen}(x)$, por ejemplo $-\cos(x)$ si tomamos $C = 0$. La regla de Barrow nos asegura que

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2,$$

es decir

$$\boxed{\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)dx = 2.}$$

Notar que, como la función seno es positiva o cero en el intervalo $[0;\pi]$, lo que calculamos en el ejemplo anterior es el área A sobreada en la siguiente figura:



A continuación enunciaremos algunas propiedades útiles para las integrales definidas:

- $\int_a^a f(x)dx = 0$

- $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
- $\int_a^b (k.f(x))dx = k\int_a^b f(x)dx$ para k número real fijo.
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Ejemplo. Sabiendo que $\int_{-1}^4 (2.f(x)+3)dx = 5$, calcular $\int_{-1}^4 f(x)dx.$

Por las propiedades anteriores, sabemos que

$$\int_{-1}^4 (2.f(x)+3)dx = \int_{-1}^4 2.f(x)dx + \int_{-1}^4 3\,dx = 2.\int_{-1}^4 f(x)dx + \int_{-1}^4 3\,dx.$$

Podemos calcular esta última integral por medio de la regla de Barrow: como $3x$ es una primitiva de 3, resulta que

$$\int_{-1}^4 3\,dx = 3x\Big|_{-1}^{4} = 3.4 - 3.(-1) = 15.$$

Luego tenemos que

$$5 = \int_{-1}^4 (2.f(x)+3)dx = 2.\int_{-1}^4 f(x)dx + 15.$$

Despejando en la igualdad anterior, tenemos que

$$\frac{5-15}{2} = \int_{-1}^4 f(x)dx$$

con lo que

$$\boxed{\int_{-1}^4 f(x)dx = -5.}$$