Función inversa

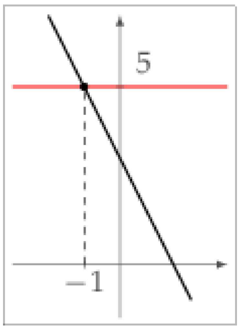
Dada una función real f queremos resolver la ecuación $f(x) = b$ para los distintos valores de $b \in \mathbb{R}$.

1) Consideremos la función $f(x) = -2x + 3$. Comencemos resolviendo $f(x) = b$ para $b = 5$. Tenemos que

$f(x) = 5 \iff -2x + 3 = 5 \iff -2x = 5 - 3 \iff -2x = 2 \iff x = -1,$

es decir, la ecuación tiene una única solución $x = -1$. (Observamos que, en efecto $f(-1) = 5$.)

Gráficamente, lo que estamos haciendo es buscar un valor x tal que el punto $(x, f(x))$ del gráfico de f tenga segunda coordenada igual a 5, es decir, que esté simultáneamente en el gráfico de f y en la recta $y = 5$:



De la misma manera que para $b = 5$, si consideramos cualquier $b \in \mathbb{R}$, la recta $y = b$ interseca al gráfico de f en un único punto, es decir, para cualquier $b \in \mathbb{R}$ hay un único $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = b$.

2) Sea $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$. Resolvamos la ecuación $f(x) = b$ para $b = 3$. Tenemos que, para $x \neq -1$,

$$f(x) = 3 \iff \frac{2x-1}{x+1} = 3 \iff 2x - 1 = 3(x+1) \iff 2x - 1 = 3x + 3 \iff -4 = x$$

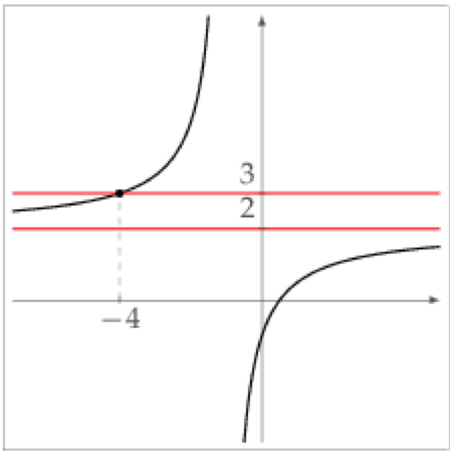
Luego, la ecuación tiene una única solución, $x = -4$.

Si hacemos lo mismo para $b = 2$, al despejar obtenemos que

$$f(x) = 2 \iff \frac{2x-1}{x+1} = 2 \iff 2x - 1 = 2(x+1) \iff 2x - 1 = 2x + 2 \iff 0 = 3$$

(notar que se cancelan las x). Como la igualdad $0 = 3$ es falsa independientemente del valor de x, concluimos que no existe ningún $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2$.

Veamos nuestros resultados en el gráfico de la función f:



Observamos que la recta $y = 3$ corta al gráfico de f en un único punto; es decir, hay único punto de la forma $(x, f(x))$ tal que su coordenada y es 3. Este punto es el $(-4, 3)$, lo que significa que $x = -4$ es la única solución de la ecuación

$f(x) = 3$, como vimos antes.

Por otro lado, la recta $y = 2$ no interseca al gráfico de f, es decir, no hay ningún punto de la forma $(x, f(x))$ cuya segunda coordenada sea 2. Esto implica que la ecuación $f(x) = 2$ no tiene solución.

Gráficamente se observa que, para todo $b \neq 2$, la recta $y = b$ interseca al gráfico de f en un único punto; luego, para todo $b \in \mathbb{R} - \{2\}$, existe un único a tal que $f(a) = b$.

En general, dada una función real f y dado $b \in \mathbb{R}$, la ecuación $f(x) = b$ tiene solución si y sólo si $b \in \mathrm{Im}(f)$, ya que $\mathrm{Im}(f)$ es justamente el conjunto de todos los valores que se obtienen al hallar $f(x)$ para todos los $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

Si para cada $b \in \mathrm{Im}(f)$, existe un único $a \in \mathrm{Dom}(f)$ tal que $f(a) = b$, se puede definir una nueva función que a cada b le asigna este valor a. Esta función se llama *la función inversa* de f,

$$f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to \mathrm{Dom}(f),$$

y verifica que

$$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b.$$

En cada uno de los ejemplos anteriores, como vimos gráficamente, es posible definir f^{-1}. Busquemos una fórmula para estas funciones. Para esto, debemos encontrar, para cada $b \in \mathrm{Im}(f)$, el único $a \in \mathrm{Dom}(f)$ tal que $f(a) = b$.

1) Sea $f(x) = -2x + 3$. En este caso, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. Resolvemos la ecuación $f(x) = y$ para cada $y \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = y \iff -2x + 3 = y \iff -2x = y - 3 \iff x = -\frac{1}{2}(y - 3) \iff x = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$$

Entonces, la función $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la que a cada y le asigna el valor $-\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$. Renombrando la variable, dado que usualmente se utiliza la letra x para la variable de una función, obtenemos

$$\boxed{f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$$

2) Sea $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$. Como vimos antes, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$. Buscamos entonces, para cada $y \neq 2$, el valor $x \in \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ tal que $f(x) = y$:

$$f(x) = y \iff \frac{2x - 1}{x + 1} = y \iff 2x - 1 = y(x + 1) \iff 2x - 1 = yx + y \iff 2x - yx = y + 1$$
$$\iff (2 - y)x = y + 1 \iff x = \frac{y + 1}{2 - y}$$

Entonces, la función inversa de f es la función $f^{-1} : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{-1\}$ que a cada y le asigna la solución $\dfrac{y + 1}{2 - y}$ de la ecuación; llamando x a la variable,

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{2 - x}}$$

Observación. La notación $f^{-1}(x)$ se usa para representar el valor que se obtiene al aplicarle la función f^{-1} (inversa de f) a x. En general, este valor no coincide con $(f(x))^{-1} = \dfrac{1}{f(x)}$, que es el inverso del valor que se obtiene al aplicarle la función f a x.

Por ejemplo, para la función $f(x) = -2x + 3$ del ejemplo 1), se tiene que

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \qquad \text{y} \qquad (f(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{-2x+3}$$

La propiedad fundamental que verifica la función inversa f^{-1} de una función f tiene que ver con la composición de ambas funciones. Dado $b \in \mathrm{Dom}(f^{-1})$, vimos que el valor $a = f^{-1}(b)$ es el único $a \in \mathrm{Dom}(f)$ tal que $f(a) = b$; o sea

$$f(\underbrace{f^{-1}(b)}_{a}) = b \quad \text{o, equivalentemente,} \quad f \circ f^{-1}(b) = b.$$

Similarmente, dado $a \in \mathrm{Dom}(f)$, si $b = f(a)$, entonces a es la única solución de la ecuación $f(x) = b$, es decir, $f^{-1}(b) = a$. Así,

$$f^{-1}(\underbrace{f(a)}_{b}) = a \quad \text{o, equivalentemente,} \quad f^{-1} \circ f(a) = a$$

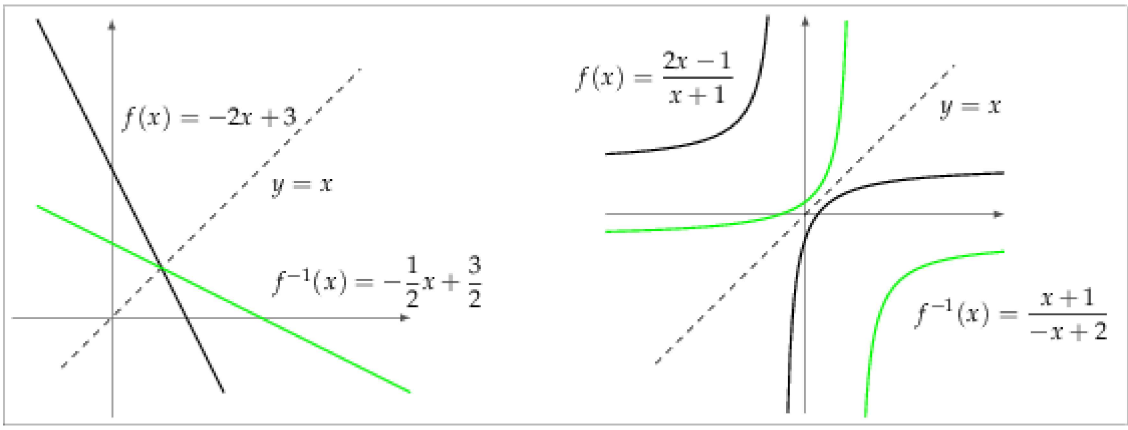
Resumiendo,

$$\boxed{f \circ f^{-1}(x) = x \quad \forall\, x \in \mathrm{Dom}(f^{-1}) \qquad \text{y} \qquad f^{-1} \circ f(x) = x \quad \forall\, x \in \mathrm{Dom}(f)}$$

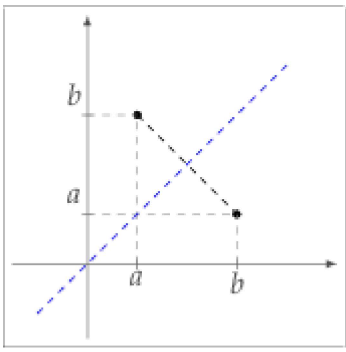
Verifiquemos estas igualdades para la función $f(x) = -2x+3$ del primer ejemplo. Como vimos, en este caso, $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Tenemos entonces que:

- $f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = f(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}) = -2(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}) + 3 = (-2)(-\frac{1}{2})x - 2.\frac{3}{2} + 3 = x - 3 + 3 = x$
- $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(-2x+3) = -\frac{1}{2}(-2x+3) + \frac{3}{2}$
  $= -\frac{1}{2}.(-2)x - \frac{1}{2}3 + \frac{3}{2} = x - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = x$

Grafiquemos cada una de las funciones de los ejemplos anteriores junto con su inversa:



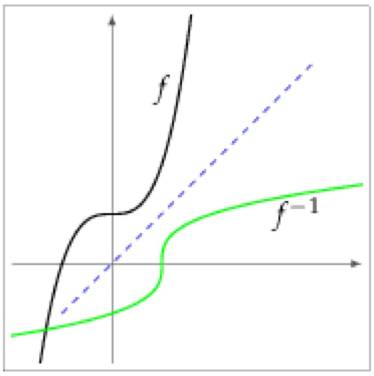
Observemos que, en ambos casos, los gráficos de f y f^{-1} resultan simétricos con respecto a la recta $y = x$. Esto ocurre en general. Como vemos en el gráfico siguiente, dado un punto (a, b), su simétrico respecto de la recta $y = x$ es el punto (b, a)



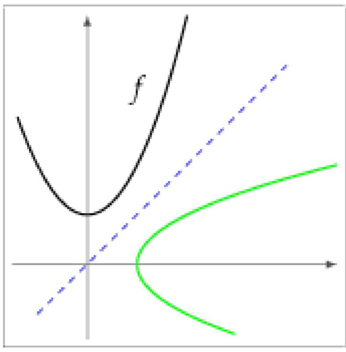
Ahora, dada una función f que tiene inversa f^{-1} sabemos que

$$(a,b) \text{ está en el gráfico de } f \Longleftrightarrow b = f(a) \Longleftrightarrow f^{-1}(b) = a \Longleftrightarrow (b,a) \text{ está en el gráfico de } f^{-1}.$$

Es decir, el gráfico de f^{-1} está formado por todos los puntos simétricos a los del gráfico de f respecto de la recta $y = x$.



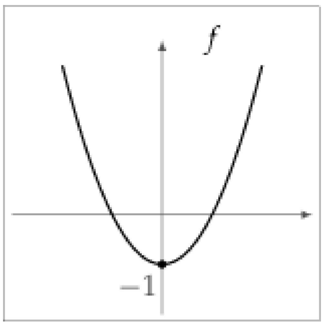
Al igual que en los ejemplos anteriores, se puede ver que las funciones lineales no constantes y las funciones homográficas tienen inversa. Sin embargo, hay otras funciones para las cuales esto no ocurre.
Un ejemplo de esto se ve en el siguiente gráfico, donde el simétrico del gráfico de f no corresponde a una función



Ejemplo. Sea $f(x) = x^2 - 1$. Se trata de una función cuadrática cuyo gráfico es una parábola que tiene vértice de coordenadas

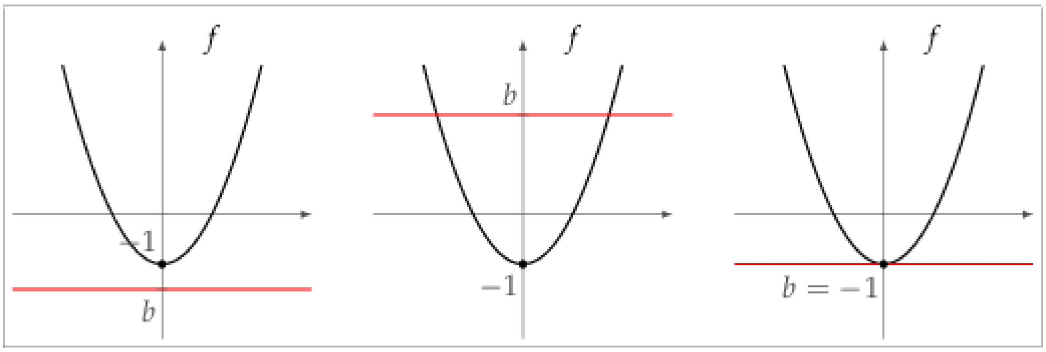
$$x_v = 0, \quad y_v = f(x_v) = f(0) = -1$$

y tal que el coeficiente de x^2 es positivo. Un gráfico aproximado de f es



y, en particular, $\mathrm{Im}(f) = [-1, +\infty)$. Observando el gráfico, podemos analizar cómo son las soluciones de la ecuación $f(x) = b$ para los distintos valores de $b \in \mathbb{R}$:

- Si $b < -1$, la ecuación no tiene solución (pues $b \notin \mathrm{Im}(f)$).
- Si $b > -1$, la ecuación tiene dos soluciones, pues la recta $y = b$ interseca al gráfico de f en dos puntos (uno de cada lado del eje de simetría de la parábola).
- Si $b = -1$, la ecuación tiene una única solución, $x = 0$, pues la recta $y = -1$ interseca al gráfico de f solamente en el vértice.

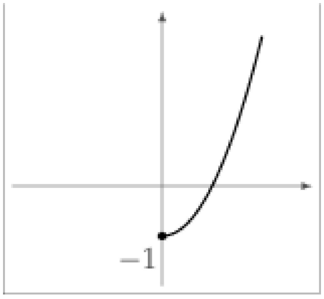


Dado que hay valores de b para los cuales la ecuación $f(x) = b$ tiene más de una solución, *no es posible definir* f^{-1}.

Ahora bien, si *restringimos el dominio de* f al intervalo $[0; +\infty)$, es decir, si en lugar de considerar a f como una función definida en todo $\mathbb{R}$, la consideramos como función

$$f : [0; +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 1,$$

su gráfico será:



Es decir, nos quedamos solamente con una mitad de la parábola. Ahora sí, para cada $b \in \operatorname{Im}(f) = [-1, +\infty)$, hay un único $a \in [0, +\infty)$ tal que $f(a) = b$ (el que se obtiene como la primera coordenada del punto de intersección del gráfico con la recta $y = b$). Entonces, podemos definir $f^{-1} : [-1; +\infty) \to [0; +\infty)$.

Para encontrar la fórmula de f^{-1}, procedemos como en los ejemplos anteriores:

$$f(x) = y \iff x^2 - 1 = y \iff x^2 = y + 1$$

Como sabemos, si $y > -1$, esta ecuación tiene dos soluciones, $x = \sqrt{y+1}$ y $x = -\sqrt{y+1}$, pero como buscamos $x \in [0; +\infty)$ nos quedamos con

$$x = \sqrt{y+1}.$$

En consecuencia, llamando x a la variable,

$$\boxed{f^{-1} : [-1, +\infty) \to [0, +\infty),\ f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}}$$

Si graficamos las dos funciones f y f^{-1} obtenemos: