Capítulo 1

Algebra vectorial

1.1 Operaciones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Comenzaremos viendo cómo se calcula la suma en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ y cómo se multiplica un elemento de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ por un número real.

> **Ejemplo 1.** Dados $A = (1,4)$, $B = (3,-2)$ y $C = (-2,4)$, calcular:
>
> i) $2A + 4B - C$
>
> ii) $3A + \frac{1}{2}(2B + C)$

Solución. Para realizar estos cálculos que involucran más de una operación, hay que tener en cuenta que el orden en que se realizan las operaciones está determinado por las mismas reglas que para las operaciones entre números reales.
En el caso i) aparecen productos por escalares y sumas:

$$2A + 4B - C = 2(1,4) + 4(3,-2) - (-2,4)$$

Tanto los productos por escalares como las sumas se realizan "coordenada a coordenada".
Primero se realizan los productos por escalares:

$$\begin{aligned} {\color{blue}2} \cdot (1,4) + {\color{magenta}4} \cdot (3,-2) {\color{red}-} (-2,4) &= ({\color{blue}2} \cdot 1, {\color{blue}2} \cdot 4) + ({\color{magenta}4} \cdot 3, {\color{magenta}4} \cdot (-2)) + ({\color{red}(-1)} \cdot (-2), {\color{red}(-1)} \cdot 4) \\ &= (2,8) \qquad + (12,-8) \qquad + (2,-4) \end{aligned}$$

Observamos que, por los signos que tienen los números, es necesario que aparezcan paréntesis.
Por último se hacen las sumas. Pueden hacerse simultáneamente gracias a la propiedad asociativa de la suma:

$$(2,8) + (12,-8) + (2,-4) = (2 + 12 + 2, 8 - 8 - 4) = (16,-4)$$

$\boxed{\text{Respuesta: } 2A + 4B - C = (16,-4)}$

En el caso ii) notar que $\frac{1}{2}$ multiplica a los dos términos que están dentro del último paréntesis

$$\begin{aligned} 3A + \frac{1}{2}(2B + C) &= 3 \cdot (1, 4) + \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot (3, -2) + (-2, 4)) \\ &= (3, 12) + \frac{1}{2} \cdot ((6, -4) + (-2, 4)) \\ &= (3, 12) + \frac{1}{2} \cdot (4, 0) \\ &= (3, 12) + (2, 0) \\ &= (5, 12) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Respuesta: } 3A + \frac{1}{2}(2B + C) = (5, 12)}$

En $\mathbb{R}^3$, el procedimiento para hacer este tipo de cálculos es el mismo, dado que la suma y el producto por escalares se definen de la misma manera y verifican las mismas propiedades.

Igualdad en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Para comparar elementos de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ hay que tener presente que son pares o ternas ordenadas: A y B son iguales si y sólo si cada coordenada de A coincide con su correspondiente en B.

Ejemplo 2. Hallar, si es posible, k y $l \in \mathbb{R}$ tales que:

i) $(k + 1, -3k + 4, k - 1) = (3, -2, 1)$

ii) $(l + 1, -3l + 4, l - 1) = (3, -6, 1)$

Solución. En el caso i), para que valga la igualdad, el valor de k buscado debe cumplir simultáneamente:

$$k + 1 = 3, \quad -3k + 4 = -2 \quad \text{y} \quad k - 1 = 1$$

Despejando de la primera igualdad, tenemos que

$$k + 1 = 3 \iff k = 3 - 1 \iff k = 2$$

con lo cual, $k = 2$ es el único valor que verifica esta igualdad. Sin embargo, tenemos que ver si para este valor se cumplen también las demás igualdades.
Reemplazamos:

$$-3 \cdot 2 + 4 = -2 \quad \text{y} \quad 2 - 1 = 1$$

Como estas igualdades son ciertas, concluimos que:

$\boxed{\text{Respuesta: } k = 2}$

Verificación: $(2 + 1, -3 \cdot 2 + 4, 2 - 1) = (3, -2, 1)$.

En el caso ii), para que valga la igualdad, el valor de l debe cumplir simultáneamente:

$$l + 1 = 3, \quad -3l + 4 = -6 \quad \text{y} \quad l - 1 = 1.$$

Como en el caso anterior, despejando de la primera igualdad, deducimos que $l = 2$ es el único valor posible. Sin embargo, al verificar si para este valor se cumplen las demás igualdades,

$$-3 \cdot 2 + 4 = -2 \neq -6 \quad \text{y} \quad 2 - 1 = 1$$

encontramos que, aunque se cumple la última, hay una que no vale. Es decir, no hay un valor de l para el cual coincidan todas las coordenadas de ambas ternas.

Respuesta: no existe $l \in \mathbb{R}$ para que valga la igualdad pedida.

Ejemplo 3. Hallar, si es posible, $x; y \in \mathbb{R}$ tales que:

$$(1, 2x, 3) + (-2, 1, 1) = (-1, 5, y).$$

Solución. Para plantear la igualdad, primero realizamos la suma en el lado izquierdo:

$$(-1, 2x + 1, 4) = (-1, 5, y)$$

Ahora estamos en las mismas condiciones que en el ejemplo anterior: se tiene que cumplir

$$-1 = -1, \quad 2x + 1 = 5 \quad \text{y} \quad 4 = y.$$

La primera igualdad se verifica, para la segunda necesitamos que $x = 2$ y, para que valga la tercera, $y = 4$.

Respuesta: $x = 2, y = 4$

Verificación:

$$\begin{aligned} (1, 2 \cdot 2, 3) + (-2, 1, 1) &= (-1, 5, 4) \\ (1, 4, 3) + (-2, 1, 1) &= (-1, 5, 4) \\ (-1, 5, 4) &= (-1, 5, 4) \end{aligned}$$

Ejemplo 4. Hallar, si es posible, $a; b; c \in \mathbb{R}$ tales que

$$(4, 4, 5) = a(2, 0, 0) + b(0, -1, 1) + c(0, 1, 2).$$

Solución. Como en el ejemplo anterior, primero realizamos las operaciones:

$$\begin{aligned} (4, 4, 5) &= (2a, 0, 0) + (0, -b, b) + (0, c, 2c) \\ &= (2a, -b + c, b + 2c) \end{aligned}$$

y luego planteamos las igualdades coordenada a coordenada:

$$4 = 2a, \quad 4 = -b + c \quad \text{y} \quad 5 = b + 2c.$$

Como a solo aparece en la primera ecuación, el único valor posible es $a = 2$. En la segunda y en la tercera ecuación aparecen tanto b como c. Podemos despejar, por ejemplo, b en la segunda ecuación

$$4 = -b + c \iff b = c - 4,$$

sustituir la expresión obtenida en la tercera, y despejar el valor de c:

$$5 = (c-4) + 2c \iff 5 = 3c - 4 \iff 9 = 3c \iff c = 3$$

Reemplazando en $b = c - 4$, obtenemos que

$$b = 3 - 4 = -1.$$

Respuesta: $a = 2, b = -1, c = 3$

Verificación:

$$\begin{aligned}
(4,4,5) &= 2(2,0,0) + (-1)(0,-1,1) + 3(0,1,2) \\
(4,4,5) &= (4,0,0) + (0,1,-1) + (0,3,6) \\
(4,4,5) &= (4,4,5)
\end{aligned}$$

Ejemplo 5. Dados $A = (1,2,3)$, $B = (0,-1,4)$ y $C = (1,0,1)$, hallar todos los $X \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$A - 2B = 4C + 3X.$$

Solución. Reemplazando y efectuando las operaciones nos queda:

$$\begin{aligned}
(1,2,3) - 2(0,-1,4) &= 4(1,0,1) + 3X \\
(1,4,-5) &= (4,0,4) + 3X
\end{aligned}$$

Gracias a las propiedades de la suma y el producto por escalares podemos despejar X como lo hacíamos en las ecuaciones con números reales.
Sumamos el opuesto de $(4,0,4)$ a ambos lados:

$$\begin{aligned}
(1,4,-5) - (4,0,4) &= 3X \\
(-3,4,-9) &= 3X
\end{aligned}$$

Para terminar de despejar X solo nos queda multiplicar por $\frac{1}{3}$ (el inverso multiplicativo de 3):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \cdot (-3,4,-9) &= \frac{1}{3} \cdot (3X) \\
(-1, \frac{4}{3}, -3) &= X
\end{aligned}$$

Respuesta: $X = (-1, \frac{4}{3}, -3)$

Verificación:

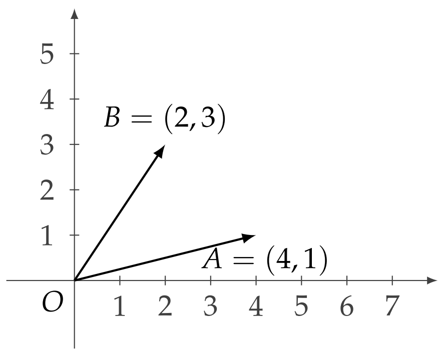
$$\begin{aligned} A - 2B &= 4C + 3X \\ (1,2,3) - 2(0,-1,4) &= 4(1,0,1) + 3(-1, \frac{4}{3}, -3) \\ (1,2,3) + (0,2,-8) &= (4,0,4) + (-3,4,-9) \\ (1,4,-5) &= (1,4,-5) \end{aligned}$$

1.2 Vectores en el plano y el espacio

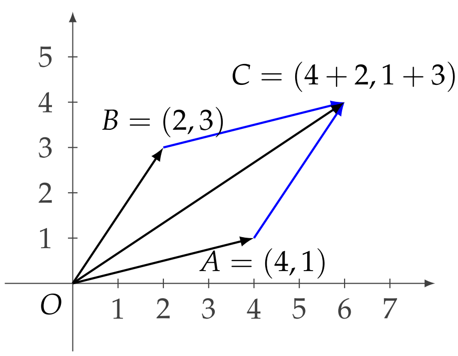
En esta sección vamos a enfocarnos en cómo aprovechar las operaciones vistas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ para operar con vectores en el plano o el espacio.

Ejemplo 1. Dados los puntos $A = (4,1)$ y $B = (2,3)$, hallar la suma de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

Solución.



La regla del paralelogramo nos permite construir geométricamente esta suma completando los lados paralelos a los vectores a partir de sus extremos. Llamemos C al extremo del vector suma que queda en la diagonal desde el origen de coordenadas.



Si prestamos atención a los lados que agregamos, vemos que son paralelos y de la misma longitud que los lados opuestos (los vectores). Por ejemplo, para moverse desde A hasta C hay que desplazarse lo mismo (en la dirección de cada eje) que para ir de O hasta B. Esto hace que las coordenadas del punto C sean las sumas, por separado, de las coordenadas horizontales y de las verticales de A y B.

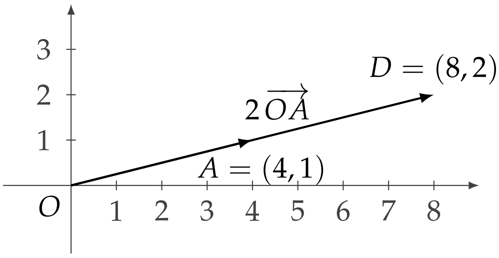
Esto nos da una forma analítica de calcular la suma de vectores:

$$\text{Si } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}, \text{ entonces } C = A + B$$

En nuestro ejemplo, $C = (4, 1) + (2, 3) = (6, 4)$.

$\boxed{\text{Respuesta: } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \text{ con } C = (6, 4).}$

Similarmente, para multiplicar un vector $\overrightarrow{OA}$, por ejemplo por $k = 2$,



lo único que necesitamos hacer es el producto por escalar con las coordenadas de su extremo:

$$\text{Si } \overrightarrow{OD} = k \cdot \overrightarrow{OA} \text{ entonces } D = kA.$$

En el ejemplo con $A = (4, 1)$, obtenemos $D = (8, 2)$.

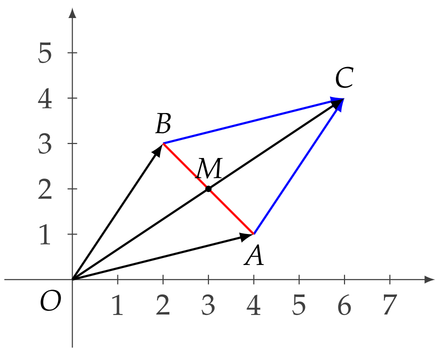
Observar que al multiplicar un vector por un escalar el vector resultante tiene su misma dirección; sólo se modifican la longitud y el sentido (esto último, si el escalar es negativo). Es decir, todos los múltiplos de un vector dado quedan alineados.

Como vemos, tanto para la suma como para el producto por escalares de vectores con origen en O, las operaciones se transfieren directamente a las coordenadas de sus extremos. Es por esto que identificamos a cada punto con el vector con origen en O y extremo en ese punto.

Aplicación: Punto medio de un segmento

Dado un segmento de extremos A y B podemos calcular analíticamente su punto medio M aprovechando lo que hemos visto.

Sabemos que la suma de los vectores $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ completa un paralelogramo, una de cuyas diagonales es el segmento $\overline{AB}$.



La otra diagonal la da el propio vector suma. Como las diagonales de un paralelogramo se cortan en sus puntos medios, el punto que estamos buscando es también en el punto medio del vector suma:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

o, directamente,

$$M = \frac{1}{2}(A + B)$$

Ejemplo 2. Dado $A = (1, 2, 3)$, hallar $C \in \mathbb{R}^3$, paralelo a $B = (3, -2, 1)$, de tal forma que el punto medio del segmento entre A y C tenga tercera coordenada igual a -1.

Solución. Para que C sea paralelo a B deberá existir $k \in \mathbb{R}$ tal que $C = kB$, así que tenemos:

$$C = (3k, -2k, k).$$

Calculamos el punto medio entre A y C usando la fórmula vista más arriba:

$$\frac{1}{2}((1, 2, 3) + (3k, -2k, k)) = (\frac{1}{2}(1 + 3k), \frac{1}{2}(2 - 2k), \frac{1}{2}(3 + k))$$

Para que este punto tenga tercera coordenada igual a -1, debe valer:

$$\frac{1}{2}(3 + k) = -1 \iff k = -5.$$

Reemplazando el valor de k, obtenemos $C = (-15, 10, -5)$.

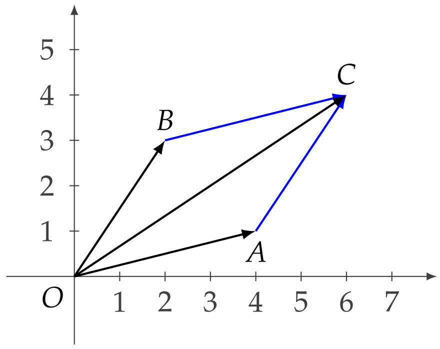
Respuesta: $C = (-15, 10, -5)$

Verificación:

- $(-15, 10, -5) = (-5) \cdot (3, -2, 1)$, con lo cual $C = (-15, 10, -5)$ es paralelo a $B = (3, -2, 1)$.
- $\frac{1}{2}((1, 2, 3) + (-15, 10, -5)) = (-7, 6, -1)$ tiene tercera coordenada igual a -1.

Aplicación: Cómo operar con vectores que no están en el origen

Como vimos, las operaciones con vectores con origen en O se convierten en cuentas con las coordenadas de sus extremos. Para hacer esas mismas operaciones con vectores que no tengan el origen en O lo que haremos primero es trasladarlos al origen. Esto significa encontrar un vector equivalente (es decir, con la misma longitud, dirección y sentido), pero con origen en el origen de coordenadas O. Para ver cómo hacerlo, volvamos a mirar el gráfico que nos dio la receta para la suma de vectores.



Obtuvimos la relación $C = A + B$ para hallar el vector suma.
Ahora, si conocemos el vector $\overrightarrow{BC}$ (para nosotros esto es conocer las coordenadas de B y de C), el mismo razonamiento que hicimos para la suma nos dice que tiene la misma dirección y longitud que $\overrightarrow{BC}$, además del mismo sentido. Por lo tanto, el vector $\overrightarrow{OA}$ es equivalente al vector $\overrightarrow{BC}$. A partir de la relación $C = A + B$, despejando A resulta

$$A = C - B$$

En general, para vectores en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$:

El trasladado al origen de un vector $\overrightarrow{PQ}$ tiene su extremo en $Q - P$.

Ejemplo 3. Dados $P = (3, 1, -1)$ y $Q = (5, 6, -3)$, hallar un vector equivalente a $\overrightarrow{PQ}$ con origen en O.

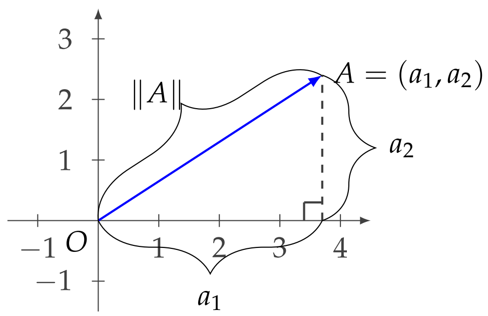
Solución. Si llamamos R al extremo del vector trasladado al origen O, será

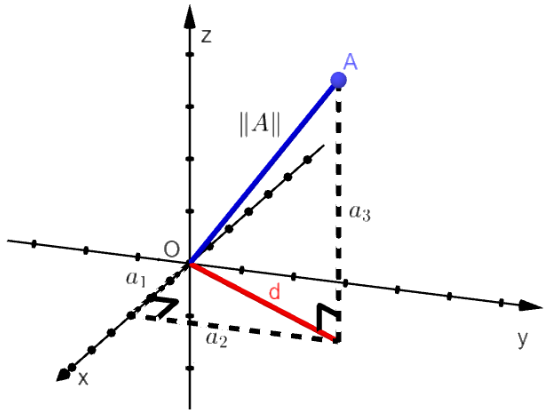
$$R = Q - P = (5, 6, -3) - (3, 1, -1) = (2, 5, -2).$$

Respuesta: el vector equivalente a $\overrightarrow{PQ}$ con origen en O tiene extremo en $(2, 5, -2)$

1.3 Norma de un vector

Para calcular la *longitud* o *norma* de un vector en $\mathbb{R}^2$ utilizamos el teorema de Pitágoras





$$\|A\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

Análogamente en $\mathbb{R}^3$ podemos aplicar el teorema a los dos triángulos rectángulos de la figura y obtenemos:

$$\|A\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$$

Ejemplo 1. Calcular la norma de los vectores $A = (3,4)$ y $B = (-2,-1,4)$.

Solución: Para el vector $A \in \mathbb{R}^2$, aplicando la primera fórmula obtenemos:

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Respuesta: } \|A\| = 5}$

En el caso de $B \in \mathbb{R}^3$, aplicamos la segunda fórmula. Tenemos que tener cuidado con las coordenadas que son negativas; se hace necesario usar paréntesis al elevar al cuadrado:

$$\begin{aligned} \|B\| &= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{21} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Respuesta: } \|B\| = \sqrt{21}}$

Las mismas fórmulas pueden usarse para calcular la longitud de un segmento:

Ejemplo 2. Hallar la longitud del segmento de extremos $A = (1,-2,3)$ y $B = (-2,1,3)$.

Solución: Si le asignamos un sentido al segmento, podemos verlo como un vector, digamos $\overrightarrow{AB}$. Sin importar cuál de los puntos elijamos como origen y cuál como extremo, la longitud de este vector es la del segmento de extremos A y B.
Tenemos el vector $\overrightarrow{AB}$ que no tiene el origen en O. Para usar las fórmulas anteriores para calcular su longitud tendremos que trasladarlo al origen.

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{AB}\| &= \|B - A\| \\
&= \|(-2,1,3) - (1,-2,3)\| \\
&= \|(-3,3,0)\| \\
&= \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 0^2} \\
&= \sqrt{18}
\end{aligned}$$

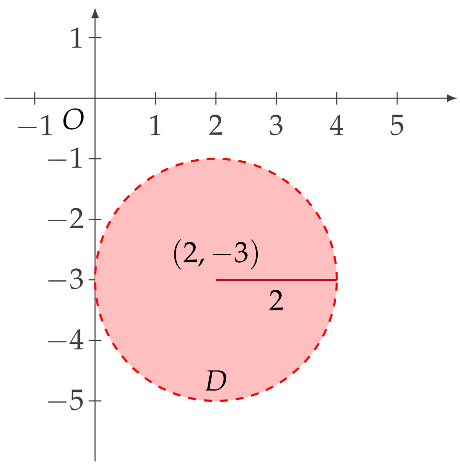
Respuesta: La longitud del segmento de extremos A y B es $\sqrt{18}$.

Este ejemplo nos muestra una forma general para calcular la distancia entre dos puntos: la distancia entre A y B, que escribimos $d(A,B)$, se calcula como

$$d(A,B) = \|B - A\|$$

Ejemplo 3. Representar gráficamente el conjunto $D = \{X \in \mathbb{R}^2 / d(X,(2,-3)) < 2\}$.

Solución: Los puntos de D son los puntos del plano que están a distancia menor que 2 del punto $(2,-3)$. Esta es la descripción de un disco de radio 2 con centro en $(2,-3)$, sin incluir el borde.



Con la línea punteada damos a entender que el borde no es parte del conjunto.

Ejemplo 4. Si $A = (-1,1,0)$ y $B = (1,-2,k)$, hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $d(A,B) = 7$.

Solución: Sabemos que $d(A,B) = \|B - A\|$; en este caso:

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \|(1,-2,k) - (-1,1,0)\| \\ &= \|(2,-3,k)\| \\ &= \sqrt{2^2 + (-3)^2 + k^2} \\ &= \sqrt{13 + k^2}. \end{aligned}$$

En consecuencia, el valor de $k \in \mathbb{R}$ tiene que cumplir

$$\begin{aligned} \sqrt{13 + k^2} &= 7 \\ 13 + k^2 &= 7^2 \\ k^2 &= 49 - 13 \\ k^2 &= 36 \\ \sqrt{k^2} &= \sqrt{36} \end{aligned}$$

Hay que tener cuidado con la última ecuación. Como la potencia k^2 está dentro de la raíz, esta parte se simplifica como $\sqrt{k^2} = |k|$. Entonces $|k| = 6$ y, por lo tanto, $k = 6$ o $k = -6$.

$\boxed{\text{Respuesta: } k = 6 \text{ y } k = -6}$

Verificación:

Con $k = 6$, $B = (1,-2,6)$:
$d(A,B) = \|(1,-2,6) - (-1,1,0)\| = \|(2,-3,6)\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$
Con $k = -6$, $B = (1,-2,-6)$:
$d(A,B) = \|(1,-2,-6) - (-1,1,0)\| = \|(2,-3,-6)\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{49} = 7$

Ejemplo 5. Hallar todos los vectores A paralelos a $B = (1,2,-2)$, de sentido opuesto a B y de longitud 12.

Solución: Para que los vectores sean paralelos es necesario que estén alineados, lo que equivale a que exista $k \in \mathbb{R}$ que verifique $A = kB$ (es decir, que sean múltiplos). Además, para que tengan sentidos opuestos, debe ser $k < 0$
Resumimos las condiciones del problema:

i) $A = kB$ con $k \in \mathbb{R}$ (para que A y B sean paralelos)

ii) $k < 0$ (para que A y B tengan sentidos opuestos)

iii) $\|A\| = 12$ (longitud)

Buscamos que se cumplan las tres condiciones simultáneamente:
Por las condiciones i) y ii),

$$A = k(1,2,-2) = (k, 2k, -2k) \text{ con } k < 0.$$

Reemplazamos en la condición iii),

$$\|A\| = \sqrt{k^2 + (2k)^2 + (-2k)^2} = \sqrt{9k^2} = \sqrt{9}\sqrt{k^2} = 3|k| = 12 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |k| = 4$$

Las soluciones de esta ecuación son $k = 4$ y $k = -4$. Teniendo en cuenta que por la condición ii) debe ser $k < 0$, nos queda una única solución: $k = -4$.
Con este valor de k obtenemos el único vector A que cumple lo pedido: $A = (-4, -8, 8)$.

$\boxed{\text{Respuesta: } A = (-4, -8, 8)}$

Verificación:

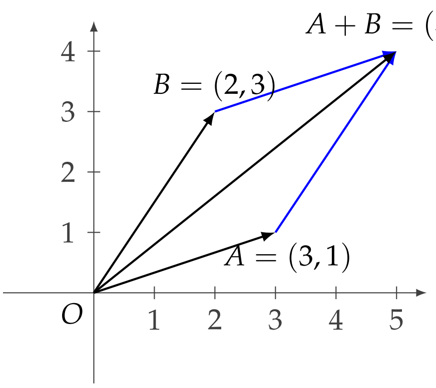
- Paralelismo: $A = -4(1, 2, -2) = -4B$
- Sentido: $-4 < 0$
- Longitud: $\|A\| = \|(-4, -8, 8)\| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + 8^2} = \sqrt{144} = 12$

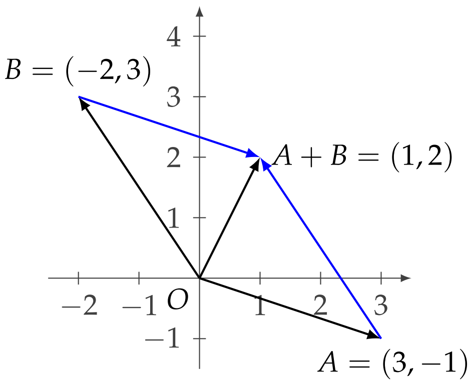
Un procedimiento similar al del ejemplo nos permite encontrar vectores unitarios (también llamados *versores*) en una dirección determinada.
Si queremos un vector unitario A con la dirección de un vector dado B, debe valer:

$$A = kB \quad (k \in \mathbb{R}) \quad \text{y} \quad \|A\| = 1.$$

Como $\|A\| = \|kB\| = |k| \cdot \|B\|$, igualando a 1 y despejando, nos queda que $|k| = \dfrac{1}{\|B\|}$; es decir, hay dos soluciones $k = \dfrac{1}{\|B\|}$ y $k = -\dfrac{1}{\|B\|}$. Estas dos soluciones corresponden a los dos vectores unitarios que tienen la misma direción que B: el que tiene el mismo sentido que B se obtiene con $k = \dfrac{1}{\|B\|}$, y el que tiene sentido contrario, con $k = -\dfrac{1}{\|B\|}$.

Nota: La norma de una suma de vectores no solo depende de sus normas sino también del ángulo entre ellos. Por ejemplo, en las figuras siguientes los vectores A y B tienen las mismas normas respectivamente, pero sus sumas no.





1.4 Producto interno o escalar

Cálculo de productos internos

Para calcular el producto interno o escalar de dos vectores a partir de sus coordenadas se utilizan las siguientes fórmulas:
En $\mathbb{R}^2$, si $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$:

$$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Similarmente en $\mathbb{R}^3$, si $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$:

$$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Ejemplo 1. Dados $A = (1, 3, 1)$, $B = (5, -3, 2)$ y $C = (-3, -4, 2)$, calcular:

i) $A \cdot B$

ii) $(A + 2B) \cdot (C - B)$

iii) $A \cdot B - (B + C) \cdot A + 2A \cdot C$

Solución:

i)

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (1, 3, 1) \cdot (5, -3, 2) \\ &= 1 \cdot 5 + 3(-3) + 1 \cdot 2 \\ &= 5 - 9 + 2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Respuesta: $A \cdot B = -2$

ii)

$$\begin{aligned} (A + 2B) \cdot (C - B) &= ((1, 3, 1) + 2(5, -3, 2)) \cdot ((-3, -4, 2) - (5, -3, 2)) \\ &= (11, -3, 5) \cdot (-8, -1, 0) \\ &= 11.(-8) + (-3).(-1) + 5.0 \\ &= -85 \end{aligned}$$

Respuesta: $(A + 2B) \cdot (C - B) = -85$

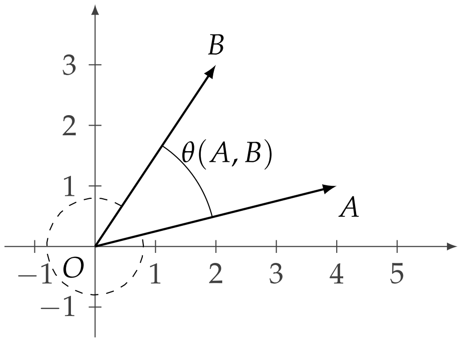
iii) En este caso podemos calcular los productos internos de cada término y luego efectuar la resta y la suma, pero como observamos que tienen el mismo factor A, podemos aplicar propiedades para simplificar:

$$\begin{aligned} A \cdot B - (B + C) \cdot A + 2A \cdot C &= A \cdot B - A \cdot (B + C) + A \cdot (2C) \\ &= A \cdot (B - (B + C) + 2C) \\ &= A \cdot C \\ &= (1, 3, 1) \cdot (-3, -4, 2) \\ &= -13 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Respuesta: } A \cdot B - (B + C) \cdot A + 2A \cdot C = -13}$

Ángulo entre dos vectores

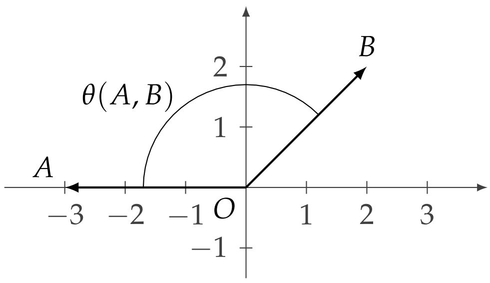
Para comparar direcciones entre vectores podemos utilizar el ángulo entre ellos. Definimos como *ángulo* entre dos vectores A y B, y lo notamos $\theta(A, B)$, al menor de los dos ángulos determinados por A y B, es decir, el que satisface $0 \leq \theta(A, B) \leq \pi$.



Para calcular este ángulo podemos usar la siguiente expresión del producto escalar:

$$A \cdot B = \|A\| \, \|B\| \cos(\theta(A, B))$$

Ejemplo 2. Hallar el ángulo entre $A = (-3, 0)$ y $B = (2, 2)$.



Solución: Combinemos las dos expresiones para el producto escalar:

$$\|A\|\|B\|\cos(\theta) = A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

En esta igualdad, θ es la medida del ángulo entre A y B. Como ninguno de los vectores es nulo, podemos despejar $\cos(\theta)$:

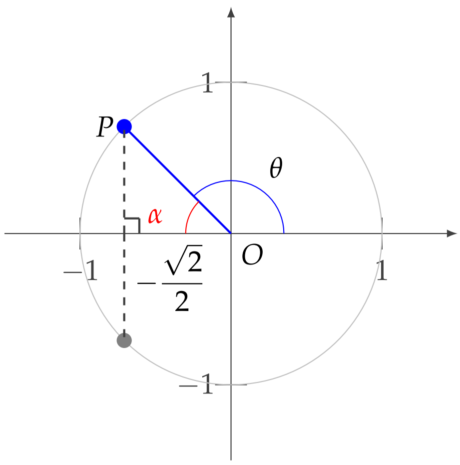
$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \frac{A \cdot B}{\|A\|\|B\|} \\
&= \frac{(-3,0)\cdot(2,2)}{\sqrt{(-3)^2+0^2}\sqrt{2^2+2^2}} \\
&= \frac{-3\cdot 2 + 0 \cdot 2}{\sqrt{9}\sqrt{8}} \\
&= \frac{-6}{3\sqrt{8}}
\end{aligned}$$

Esta última expresión se puede racionalizar como $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Queda por determinar el ángulo θ tal que $0 \leq \theta \leq \pi$ y $\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Para hacer esto podemos, por ejemplo, valernos de la circunferencia trigonométrica y la tabla de valores de las funciones seno y coseno elaborada en la Práctica 0.

El valor $\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ que obtuvimos es negativo; por lo tanto, en la circunferencia trigonométrica, el ángulo θ corresponde a un punto en el segundo o en el tercer cuadrante. Como $0 \leq \theta \leq \pi$, corresponderá a un punto del segundo cuadrante.



Buscamos en la tabla de valores el ángulo que tiene coseno igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (positivo), que es $\frac{\pi}{4}$. Esta medida corresponde a la del ángulo α en el dibujo. La medida del ángulo buscado se consigue con la relación:

$$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

$\boxed{\text{Respuesta: } \theta(A,B) = \frac{3}{4}\pi}$

Nota: Otra forma de hallar el ángulo θ tal que $0 \leq \theta \leq \pi$ a partir de $\cos(\theta)$ es utilizando la calculadora. En nuestro caso en que $\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, por ejemplo, con la calculadora con ángulos en grados, se calcula

$$\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 135^\circ$$

y al resultado se lo convierte a radianes:

$$135^\circ \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{3}{4}\pi.$$

De la misma manera que en el ejemplo anterior se puede calcular el ángulo entre dos vectores en $\mathbb{R}^3$:

Ejemplo 3. Hallar el ángulo entre $A = (-2, 1, 1)$ y $B = (-1, 0, 1)$.

Solución: Calculamos el coseno del ángulo $\theta = \theta(A, B)$:

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \frac{A \cdot B}{\|A\|\|B\|} \\
&= \frac{(-2,1,1)\cdot(-1,0,1)}{\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}} \\
&= \frac{-2\cdot(-1)+1\cdot 0+1\cdot 1}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Ahora buscamos el ángulo θ tal que $0 \leq \theta \leq \pi$ y que cumple $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
En este caso, como $\cos(\theta) > 0$, la condición $0 \leq \theta \leq \pi$ asegura que el ángulo θ corresponde a un punto en el primer cuadrante de la circunferencia trigonométrica. Buscamos entonces en la tabla de valores de la función coseno elaborada en la Práctica 0 el ángulo θ tal que $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y obtenemos $\theta = \frac{\pi}{6}$.

$\boxed{\text{Respuesta: } \theta(A, B) = \frac{\pi}{6}}$

El producto escalar de dos vectores nos permite determinar si sus direcciones son perpendiculares.

Definición. Diremos que dos vectores A y B son *ortogonales*, y lo notaremos $A \perp B$, si vale $A \cdot B = 0$.

$$A \perp B \iff A \cdot B = 0$$

La igualdad $A \cdot B = 0$ puede darse si alguno de los vectores es nulo o si se anula el coseno del ángulo θ entre A y B. Esto último ocurre justamente cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$, lo que indica que las direcciones de los vectores son perpendiculares.

Ejemplo 4. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales.

i) $A = (1, 3)$ y $B = (3, 1)$

ii) $A = (1, 3)$ y $B = (3, -1)$

iii) $A = (1, 3)$ y $B = (-6, 2)$

iv) $A = (1, 3, 2)$ y $B = (3, 1, -3)$

v) $A = (1, 3, 2)$ y $B = (0, -2, 3)$

Solución: Para determinar si los pares de vectores dados son ortogonales, calculamos los productos escalares y vemos si dan 0.

i) $A \cdot B = (1, 3) \cdot (3, 1) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 6 \neq 0$

$\boxed{\text{Respuesta: } A = (1, 3) \text{ y } B = (3, 1) \text{ no son ortogonales.}}$

ii) $A \cdot B = (1, 3) \cdot (3, -1) = 1 \cdot 3 + 3(-1) = 0$

$\boxed{\text{Respuesta: } A = (1, 3) \text{ y } B = (3, -1) \text{ son ortogonales.}}$

iii) $A \cdot B = (1, 3) \cdot (-6, 2) = 1(-6) + 3 \cdot 2 = 0$

$\boxed{\text{Respuesta: } A = (1, 3) \text{ y } B = (-6, 2) \text{ son ortogonales.}}$

iv) $A \cdot B = (1, 3, 2) \cdot (3, 1, -3) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 2(-3) = 0$

$\boxed{\text{Respuesta: } A = (1, 3, 2) \text{ y } B = (3, 1, -3) \text{ son ortogonales.}}$

v) $A \cdot B = (1, 3, 2) \cdot (0, -2, 3) = 1 \cdot 0 + 3(-2) + 2 \cdot 3 = 0$

$\boxed{\text{Respuesta: } A = (1, 3, 2) \text{ y } B = (0, -2, 3) \text{ son ortogonales.}}$

Observar que en los tres primeros casos el vector A es el mismo. Por estar en el plano, el hecho que los vectores $B = (3, -1)$ y $B = (-6, 2)$ de ii) y iii) hayan resultado ortogonales al mismo vector A indica que dichos vectores tienen la misma dirección: en efecto, $(-6, 2) = -2(3, -1)$. Sin embargo, no sucede lo mismo en iv) y v): aunque los dos vectores $B = (3, 1, -3)$ y $B = (0, -2, 3)$ son ortogonales al mismo vector A, dichos vectores no tienen la misma dirección. Esto puede ocurrir debido a que en el espacio hay infinitas direcciones ortogonales a una dada.

Ejemplo 5. Hallar todos los vectores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que son ortogonales a $A = (-3, 2)$.

Solución: De nuestra definición, la condición para x e y para que (x, y) sea ortogonal a A es

$$(x, y) \cdot (-3, 2) = 0 \iff -3x + 2y = 0,$$

que es una ecuación con dos incógnitas de la que solo podemos despejar una variable respecto de la otra. Por ejemplo $(x, y) = (x, \frac{3}{2}x)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$ con lo que tendremos infinitas soluciones:

Respuesta: Los vectores ortogonales a A son los del conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/(x, y) = (x, \frac{3}{2}x)$, con $x \in \mathbb{R}\}$.

Notar que, en el ejemplo, si x vale cero, obtenemos $(x, y) = (0, 0) = O$ como solución. El vector O, que llamamos vector nulo, no define una dirección ni sentido. Aunque carece de algunas de las características fundamentales de los vectores, lo consideraremos como tal para poder operar.

Ejemplo 6. Hallar dos vectores $X \in \mathbb{R}^3$ ortogonales a $A = (1, 2, -1)$ y a $B = (-3, 1, 4)$ simultáneamente.

Solución: Necesitamos que se cumplan simultáneamente las dos condiciones:

$$X \perp A \quad \text{y} \quad X \perp B$$

Si $X = (x_1, x_2, x_3)$, estas condiciones nos dan las ecuaciones:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \quad \text{y} \quad -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$$

Podemos despejar en la primera ecuación $x_3 = x_1 + 2x_2$. Sustituimos en la segunda, obtenemos $-3x_1 + x_2 + 4(x_1 + 2x_2) = 0$ que, simplificando, nos da $x_1 + 9x_2 = 0$. Despejamos $x_1 = -9x_2$. Reemplazamos esta expresión en el despeje anterior: $x_3 = -9x_2 + 2x_2 = -7x_2$. Así, concluimos que:

$$x_1 = -9x_2 \quad \text{y} \quad x_3 = -7x_2$$

Como solo necesitamos hallar dos vectores $X = (x_1, x_2, x_3)$, podemos elegir dos valores para x_2 y, para cada uno de ellos, calcular las otras coordenadas de X. Por ejemplo, con $x_2 = 1$, resulta $X = (-9, 1, -7)$ y con $x_2 = -2$, $X = (18, -2, 14)$.

Respuesta: Dos vectores ortogonales a A y B son $X = (-9, 1, -7)$ y $X = (18, -2, 14)$.

Verificación:

Con $x_2 = 1$

$X \cdot A = (-9, 1, -7) \cdot (1, 2, -1) = -9 + 2 + 7 = 0$ y $X \cdot B = (-9, 1, -7) \cdot (-3, 1, 4) = 27 + 1 - 28 = 0$

Con $x_2 = -2$

$X \cdot A = (18, -2, 14) \cdot (1, 2, -1) = 18 - 4 - 14 = 0$ y $X \cdot B = (18, -2, 14) \cdot (-3, 1, 4) = -54 - 2 + 56 = 0$

Es importante notar que en este caso la respuesta no es única: si elegimos otros valores de x_2, obtendremos otros vectores X ortogonales a A y B simultáneamente.

El próximo ejemplo muestra cómo hallar vectores que forman determinado ángulo (no necesariamente recto) con una dirección dada.

Ejemplo 7. Dado $A = (1, \sqrt{3})$, hallar todos los B tales que $\theta(A, B) = \dfrac{\pi}{6}$ y $\|B\| = 3$.

Solución: Tenemos dos condiciones:

a) La relación $A \cdot B = \|A\| \|B\| \cos(\frac{\pi}{6})$

b) $\|B\| = 3$

Si llamamos (x, y) a las coordenadas de B, de a) obtenemos

$$x + \sqrt{3} \cdot y = 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

y de b),

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3 \iff x^2 + y^2 = 9.$$

Entonces, debemos encontrar los valores x, y para los cuales se cumplen simultáneamente:

$$x + \sqrt{3} \cdot y = 3\sqrt{3} \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 = 9.$$

Como la segunda ecuación es cuadrática, conviene despejar en la primera

$$x = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot y$$

y luego reemplazar en la segunda:

$$\begin{aligned} (3\sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot y)^2 + y^2 &= 9 \\ (3\sqrt{3})^2 + 2(3\sqrt{3})(-\sqrt{3} \cdot y) + (-\sqrt{3} \cdot y)^2 + y^2 &= 9 \\ 27 - 18 \cdot y + 4 \cdot y^2 &= 9 \end{aligned}$$

Igualando a 0 y reordenando los términos obtenemos:

$$4 \cdot y^2 - 18 \cdot y + 18 = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática de la forma $ay^2 + by + c = 0$, donde la incógnita es y y los coeficientes son $a = 4$, $b = -18$ y $c = 18$. Usamos la fórmula resolvente para hallar sus ceros:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 18}}{2 \cdot 4} = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{8} = \frac{18 \pm 6}{8}.$$

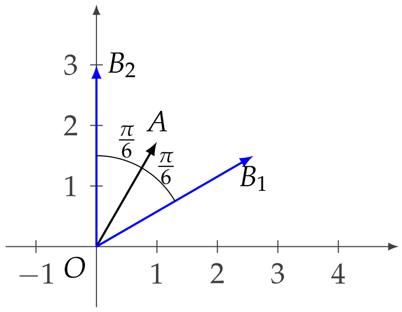
De este modo, hallamos las dos soluciones de la ecuación:

$$y = \frac{18 - 6}{8} = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{18 + 6}{8} = 3$$

Para encontrar los vectores B correspondientes, reemplazamos en el despeje de x en función de y;

Con $y = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad B_1 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$

Con $y = 3 \Rightarrow x = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_2 = (0, 3)$



Respuesta: Hay dos soluciones $B_1 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$ y $B_2 = (0, 3)$.

1.5 Producto vectorial

Si $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ son vectores de $\mathbb{R}^3$, el *producto vectorial* $A \times B$ se define como el vector

$$A \times B = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

Notar que el producto vectorial de dos vectores en $\mathbb{R}^3$ es también un vector en $\mathbb{R}^3$.
El vector $A \times B$ definido por esta fórmula cumple las siguientes propiedades:

i) $A \times B$ es un vector ortogonal a los dos factores A y B simultáneamente.

ii) Su norma verifica la relación

$$\|A \times B\| = \|A\| \|B\| \operatorname{sen}(\theta(A, B))$$

iii) Forma *terna derecha* junto con A y B (si vemos los vectores A, B y $A \times B$, en ese orden, su disposición debe semejar a la de los ejes x, y y z, en ese orden).

Podemos ver que en la fórmula del producto vectorial, la primera coordenada del resultado no depende de las primeras coordenadas de los vectores (no hay subíndices 1), es una cuenta que involucra a las demás. Lo mismo ocurre en las demás coordenadas del resultado: en la segunda no hay subíndices 2 y en la tercera no hay subíndices 3.
Una forma de recordar esta fórmula consiste en poner un vector sobre el otro. Arriba el vector a la izquierda del símbolo de producto y abajo el otro.

$$\times \begin{matrix} (a_1, & a_2, & a_3) \\ (b_1, & b_2, & b_3) \end{matrix}$$

Cada coordenada del vector resultante se calcula haciendo las siguientes operaciones:

$$\times \begin{matrix} (a_1, & a_2, & a_3) \\ (b_1, & b_2, & b_3) \end{matrix} = \left(\begin{matrix} \cancel{a_1} & \underline{a_2} & \underline{\underline{a_3}} \\ \cancel{b_1} & \underline{\underline{b_2}} & \underline{b_3} \end{matrix} \;,\; \begin{matrix} \underline{\underline{a_1}} & \cancel{a_2} & \underline{a_3} \\ \underline{b_1} & \cancel{b_2} & \underline{\underline{b_3}} \end{matrix} \;,\; \begin{matrix} \underline{a_1} & \underline{\underline{a_2}} & \cancel{a_3} \\ \underline{\underline{b_1}} & \underline{b_2} & \cancel{b_3} \end{matrix} \right)$$

Se ignoran las coordenadas tachadas (es lo que mencionamos recién), y se hacen los productos de los elementos subrayados con una línea menos los productos de los subrayados con dos líneas:

$$\times \begin{matrix} (a_1, & a_2, & a_3) \\ (b_1, & b_2, & b_3) \end{matrix} = \left(\begin{matrix} \underline{a_2} & \underline{\underline{a_3}} \\ \underline{\underline{b_2}} & \underline{b_3} \end{matrix} \;,\; \begin{matrix} \underline{\underline{a_1}} & \underline{a_3} \\ \underline{b_1} & \underline{\underline{b_3}} \end{matrix} \;,\; \begin{matrix} \underline{a_1} & \underline{\underline{a_2}} \\ \underline{\underline{b_1}} & \underline{b_2} \end{matrix} \right)$$

$$\times \begin{matrix}(a_1, & a_2, & a_3)\\(b_1, & b_2, & b_3)\end{matrix} = \left(\underline{a_2} \cdot \underline{b_3} - \underline{\underline{a_3}} \cdot \underline{\underline{b_2}}\ ,\ \underline{a_3} \cdot \underline{b_1} - \underline{\underline{a_1}} \cdot \underline{\underline{b_3}}\ ,\ \underline{a_1} \cdot \underline{b_2} - \underline{\underline{a_2}} \cdot \underline{\underline{b_1}}\right)$$

Observar que en la segunda coordenada los productos se restan en orden distinto comparado con las otras dos coordenadas.

> **Ejemplo 1.** Dados $A = (-2, 2, -1)$ y $B = (-3, 1, 4)$, calcular el producto $A \times B$.

Solución: Si directamente ignoramos las coordenadas que no se usan:

$$\times \begin{matrix}(-2, & 2, & -1)\\(-3, & 1, & 4)\end{matrix} = \left(\begin{matrix}2 & -1\\1 & 4\end{matrix}\ ,\ \begin{matrix}-2 & -1\\-3 & 4\end{matrix}\ ,\ \begin{matrix}-2 & 2\\-3 & 1\end{matrix}\right)$$

$$\times \begin{matrix}(-2, & 2, & -1)\\(-3, & 1, & 4)\end{matrix} = (2 \cdot 4 - (-1) \cdot 1, (-1)(-3) - (-2) \cdot 4, (-2) \cdot 1 - 2(-3)) = (9, 11, 4)$$

$\boxed{\text{Respuesta: } A \times B = (9, 11, 4).}$

Verificación:

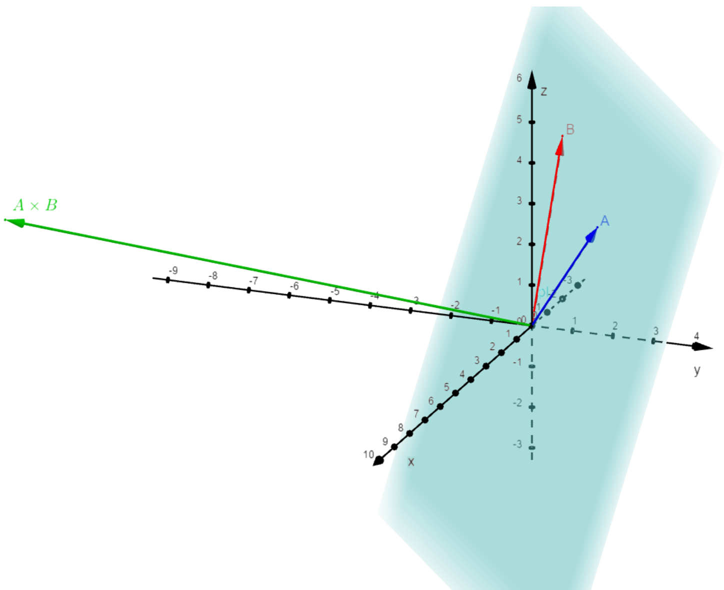
No es del todo una verificación pero al menos podemos comprobar que el resultado es ortogonal a los vectores dados:

$A \perp (A \times B)$: $\quad (-2, 2, -1) \cdot (9, 11, 4) = -18 + 22 - 4 = 0$

$B \perp (A \times B)$: $\quad (-3, 1, 4) \cdot (9, 11, 4) = -27 + 11 + 16 = 0$

> **Ejemplo 2.** Hallar todos los vectores C de norma $3\sqrt{5}$, ortogonales a $A = (1, 2, 3)$ y a $B = (-2, 0, 4)$ simultáneamente.

Solución: Como A y B no son paralelos, habrá una única dirección ortogonal a los dos.



El producto vectorial nos da un vector en esa dirección:

$$D = (1, 2, 3) \times (-2, 0, 4) = (8, -10, 4)$$

pero este vector no cumple lo pedido ya que

$$\|D\| = \sqrt{8^2 + (-10)^2 + 4^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \neq 3\sqrt{5}.$$

Podemos buscar $k \in \mathbb{R}$ para que $\|C\| = \|k(8, -10, 4)\| = 3\sqrt{5}$ o, combinar cosas que ya sabemos.
Recordemos que los vectores de longitud 1 en la dirección de D, son:

$$\frac{1}{\|D\|}D \quad \text{y} \quad -\frac{1}{\|D\|}D$$

Para cambiar la longitud de estos a $3\sqrt{5}$, los multiplicamos por este escalar:

$$C_1 = \frac{3\sqrt{5}}{6\sqrt{5}}(8, -10, 4) = \frac{1}{2}(8, -10, 4) \quad \text{y} \quad C_2 = -\frac{3\sqrt{5}}{6\sqrt{5}}(8, -10, 4) = -\frac{1}{2}(8, -10, 4)$$

Respuesta: Los únicos C posibles son $C_1 = (4, -5, 2)$ y su opuesto $C_2 = (-4, 5, -2)$

Verificación:

Con C_1:
Ortogonalidad:

$(1, 2, 3) \cdot (4, -5, 2) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 2 = 0$

$(-2, 0, 4) \cdot (4, -5, 2) = (-2) \cdot 4 + 0 \cdot (-5) + 4 \cdot 2 = 0$

Norma: $\|(4, -5, 2)\| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Con C_2:
Ortogonalidad:
$(1, 2, 3) \cdot (-4, 5, -2) = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) = 0$

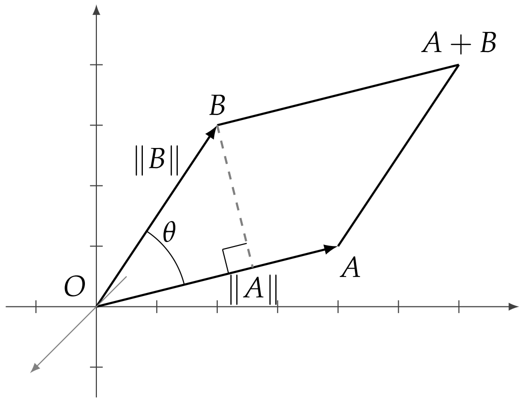
$(-2, 0, 4) \cdot (-4, 5, -2) = (-2)(-4) + 0 \cdot 5 + 4 \cdot (-2) = 0$

Norma: $\|(-4, 5, -2)\| = \sqrt{(-4))^2 + 5^2 + (-2)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Cálculo de áreas mediante producto vectorial

La norma del producto vectorial se relaciona con el ángulo entre los vectores A y B mediante la propiedad:

$$\|A \times B\| = \|A\|\|B\| \operatorname{sen}(\theta) \quad (\text{donde } \theta = \theta(A, B)))$$



En el triángulo rectángulo de la figura, el cateto opuesto al ángulo θ mide $\|B\|\operatorname{sen}(\theta)$ y coincide con la altura del paralelogramo de vértices O, A, $A+B$ y B.
En la norma del producto vectorial de A con B tenemos entonces el producto entre la longitud de la base, $\|A\|$, y la altura del paralelogramo, $\|B\|\operatorname{sen}(\theta)$, lo que nos da su área.

> **Ejemplo 3.** Hallar el área del paralelogramo de la figura anterior sabiendo que $A = (-1,4,1)$ y $B = (0,2,3)$.

Solución: Calculemos primero el producto vectorial

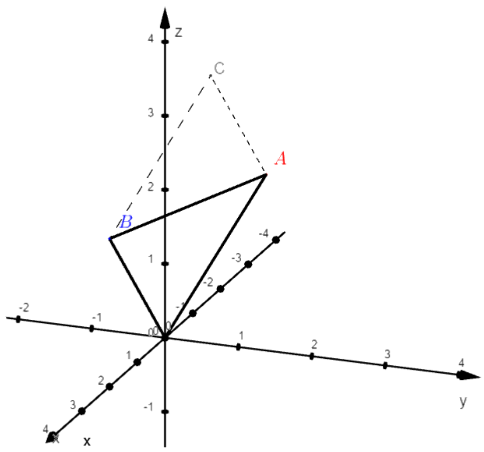
$$(-1,4,1)\times(0,2,3) = (10,3,-2)$$

El área del paralelogramo es $\|(10,3,-2)\| = \sqrt{10^2+3^2+(-2)^2} = \sqrt{113}$.

Respuesta: El área del paralelogramo de vértices O, A, $A+B$ y B es $\sqrt{113}$.

> **Ejemplo 4.** Hallar el área del triángulo de vértices O, $A = (-1,1,2)$ y $B = (2,0,2)$.

Solución: Con la suma $C = A+B$, completamos un paralelogramo de vértices $OACB$. Su área se calcula con la norma del producto vectorial entre A y B como en el problema anterior. El área del triángulo que buscamos es la mitad de la del paralelogramo.

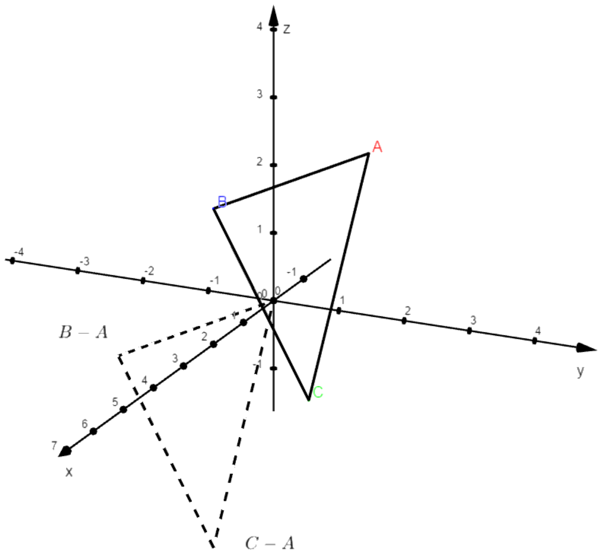


$$Área = \frac{1}{2}\|(-1,1,2)\times(2,0,2)\| = \frac{1}{2}\|(2,6,-2)\| = \sqrt{11}$$

Respuesta: El área del triángulo de vértices O, A y B es $\sqrt{11}$.

Ejemplo 5. Hallar el área del triángulo de vértices $A = (-1,1,2)$, $B = (2,0,2)$ y $C = (1,1,-1)$.

Solución: A diferencia del ejemplo anterior, ninguno de los vectores A, B o C coinciden con un lado del triángulo, ya que el origen O no es un vértice del triángulo. Para que esto ocurra, trasladamos el triángulo al origen. Por ejemplo, podemos elegir los lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ (vistos como vectores). Sus trasladados tendrán extremos en $B - A$ y $C - A$ respectivamente.



El área del triángulo trasladado (que es la misma del original) se calcula como en el ejemplo anterior:

$$Área = \frac{1}{2}\|(B-A)\times(C-A)\|$$

En nuestro ejemplo:

$$Área = \frac{1}{2}\|((2,0,2)-(-1,1,2))\times((1,1,-1)-(-1,1,2))\| = \frac{1}{2}\|(3,9,2)\| = \frac{\sqrt{94}}{2}$$

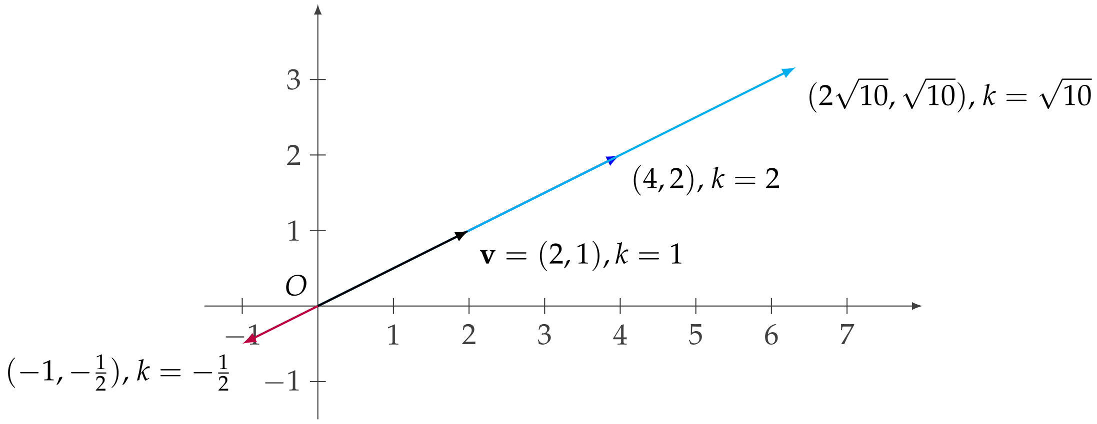
Respuesta: El área del triángulo de vértices A, B y C es $\frac{\sqrt{94}}{2}$.

1.6 Rectas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

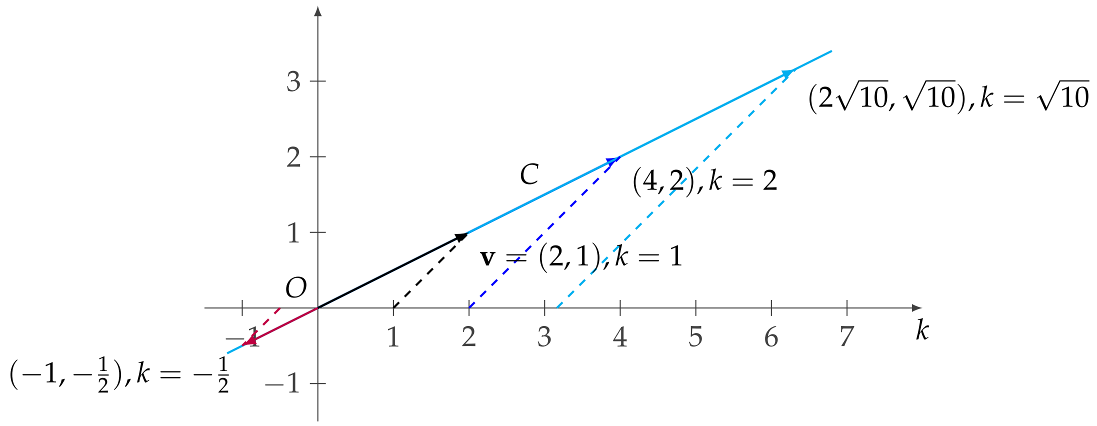
Ejemplo 1. Dado el vector $\mathbf{v} = (2, 1)$, graficar el conjunto

$$C = \{X \in \mathbb{R}^2 / X = k\mathbf{v}, k \in \mathbb{R}\}.$$

Solución: Como el producto de un escalar por un vector mantiene la dirección, los múltiplos de un vector en el origen están alineados con éste.



En este gráfico se muestran elementos de C para algunos valores de k. Para obtenerlos a todos, necesitamos usar todos los $k \in \mathbb{R}$.
Podemos establecer una correspondencia entre los valores de $\mathbb{R}$ del eje horizontal y los puntos del conjunto a través de los valores de k.



Respuesta: El conjunto C es una recta con la dirección de $\mathbf{v}$ que pasa por el origen.

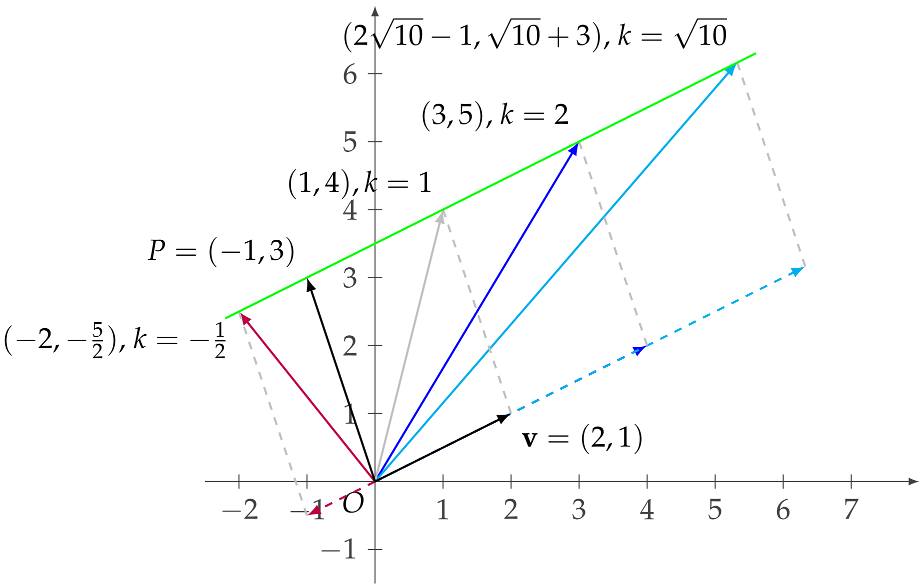
Observación

Si $\mathbf{v}$ es el vector nulo, el conjunto $\{X \in \mathbb{R}^2 / X = k\mathbf{v}, k \in \mathbb{R}\}$ se reduce a un punto: el origen O.

Para describir rectas que no pasan por el origen veamos el siguiente ejemplo.

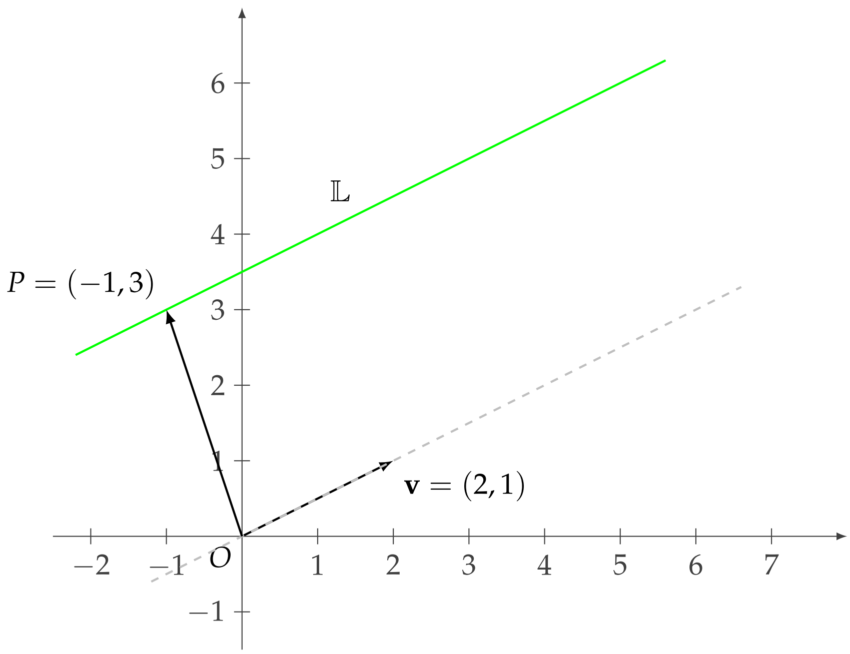
Ejemplo 2. Dados el vector $\mathbf{v} = (2,1)$ y el punto $P = (-1,3)$, graficar el conjunto $\mathbb{L} = \{X \in \mathbb{R}^2 / X = k\mathbf{v} + P, k \in \mathbb{R}\}$.

Solución: Notar que los elementos de este conjunto son los del conjunto C del ejemplo anterior sumados con P.



Observar que los extremos de los vectores resultantes están alineados. El conjunto de todos los puntos de la forma $k\mathbf{v} + P$ con $k \in \mathbb{R}$ forma entonces una recta, con la dirección de $\mathbf{v}$, que pasa por el punto P (este punto se obtiene con $k = 0$).

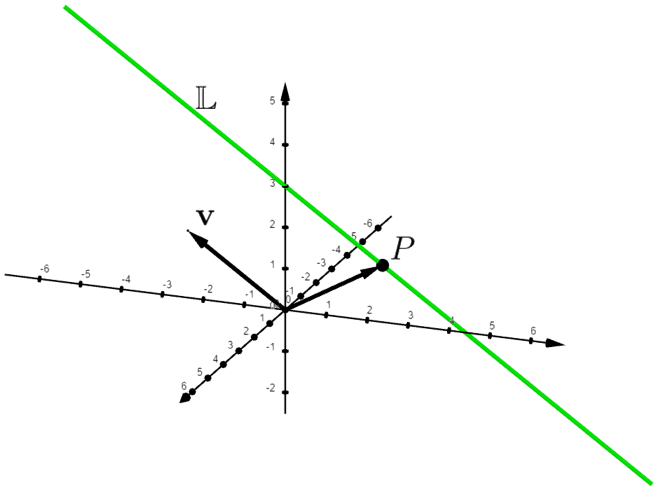
Respuesta:



Ejemplo 3. Dados el vector $\mathbf{v} = (1. -2, 2)$ y el punto $P = (-1, 2, 1)$, graficar el conjunto $\mathbb{L} = \{X \in \mathbb{R}^3 / X = k\mathbf{v} + P, k \in \mathbb{R}\}$.

Solución: Al igual que en el plano, el conjunto descripto es una recta que pasa por el punto P y con la dirección de $\mathbf{v}$.

Respuesta:



Ecuación paramétrica de la recta

Vamos a abreviar la notación para el conjunto

$$\mathbb{L} = \{X \in \mathbb{R}^n / X = \lambda\mathbf{v} + P, \lambda \in \mathbb{R}\} \quad (n = 2 \text{ o } n = 3)$$

escribiendo

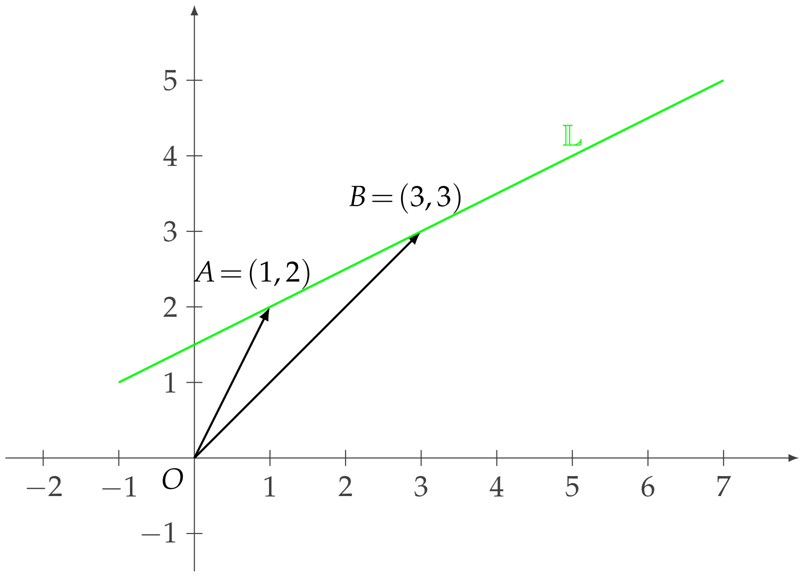
$$\mathbb{L} : X = \lambda\mathbf{v} + P$$

A esta expresión la llamamos *ecuación paramétrica* de la recta que pasa por P en la dirección de $\mathbf{v}$ (si $\mathbf{v} \neq O$). Damos por sobreentendido que la letra λ no representa un único número, sino que es una variable que debe tomar todos los valores dentro de un conjunto (en este caso $\mathbb{R}$). A este tipo de variables las llamamos *parámetros*.
Al vector $\mathbf{v}$ se lo llama *vector director* y a P *punto de paso*.

Es importante notar que para una recta determinada, no hay una única ecuación paramétrica. El vector director $\mathbf{v}$ solo determina la dirección de la recta, con lo cual se lo puede reemplazar por cualquier otro vector con la misma dirección, sin importar su sentido o longitud; es decir, si se cambia $\mathbf{v}$ por cualquier múltiplo $k\mathbf{v}$ no nulo ($k \neq 0$), la ecuación paramétrica obtenida continuará describiendo la misma recta. También el punto de paso puede variar; cualquier punto de la recta sirve como punto de paso de la misma.

Ejemplo 4. Hallar una ecuación paramétrica para la recta $\mathbb{L}$ que pasa por los puntos $A = (1, 2)$ y $B = (3, 3)$.

Solución: Graficando los puntos A y B podemos imaginarnos cómo debería ser esta recta.



Para dar una ecuación paramétrica de la recta necesitamos determinar un vector director y un punto de paso. Vemos que el vector $\overrightarrow{AB}$ tiene la misma dirección que la recta; sin embargo, para la ecuación paramétrica necesitamos un vector con origen en O. Podemos tomar como vector director su trasladado $\mathbf{v} = B - A = (3,3) - (1,2) = (2,1)$.
Usando como punto de paso $A = (1,2)$, nos queda

$\boxed{\text{Respuesta: } \mathbb{L} : X = \lambda(2,1) + (1,2)}$

Podemos generalizar:

Una ecuación paramétrica para la recta que pasa por A y B es $X = \lambda(B - A) + A$

Esta fórmula es válida tanto en el plano como en el espacio.

Observaciones

En el ejemplo, si usáramos el vector $\overrightarrow{BA}$ en lugar del $\overrightarrow{AB}$, obtendríamos

$\mathbb{L} : X = \lambda(-2,-1) + (1,2)$

que, aunque es una expresión distinta a la que encontramos, describe la misma recta (solo cambia el sentido del vector director, no su dirección).
También podemos cambiar el punto de paso por B:

$\mathbb{L} : X = \lambda(-2,-1) + (3,3)$

Todas estas respuestas son válidas. Como mencionamos antes, cualquier otro vector director (en el origen) con la misma dirección de $\overrightarrow{AB}$ y cualquier otro punto de la recta como punto de paso nos darían ecuaciones paramétricas para la misma recta.

Ejemplo 5. Decidir si los puntos $Q = (0, 7, -1)$ y $R = (6, -2, 1)$ pertenecen a la recta $\mathbb{L} : X = \lambda(2, -3, 1) + (4, 1, 1)$.

Solución: Los puntos de $\mathbb{R}^3$ que pertenecen a la recta son aquellos que se obtienen haciendo los cálculos indicados en la ecuación paramétrica para algún valor $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, para que se cumpla la condición $Q \in \mathbb{L}$, debe existir algún valor particular de λ con el que se verifique la igualdad

$$\begin{aligned}(0, 7, -1) &= \lambda(2, -3, 1) + (4, 1, 1)\\ &= (2\lambda, -3\lambda, \lambda) + (4, 1, 1)\\ &= (2\lambda + 4, -3\lambda + 1, \lambda + 1)\end{aligned}$$

Se deben cumplir

$$0 = 2\lambda + 4, \quad 7 = -3\lambda + 1 \quad \text{y} \quad -1 = \lambda + 1$$

Despejando en la primera ecuación obtenemos $\lambda = -2$.
Reemplazando en las otras, $7 = -3(-2) + 1$ y $-1 = -2 + 1$, vemos que se verifican.

Para el punto R, el mismo procedimiento nos lleva a buscar otro valor de λ tal que

$$(6, -2, 1) = (2\lambda + 4, -3\lambda + 1, \lambda + 1)$$

Se deben cumplir ahora

$$6 = 2\lambda + 4, \quad -2 = -3\lambda + 1 \quad \text{y} \quad 1 = \lambda + 1$$

Despejando en la primera ecuación obtenemos $\lambda = 1$.
Reemplazando en las otras, $-2 = -3 \cdot 1 + 1$ y $1 = 1 + 1$, vemos que la última no se verifica. En este caso no hay un valor de λ para la ecuación paramétrica con el que se obtengan las coordenadas del punto R y por lo tanto R no pertenece a la recta.

Respuesta: $Q \in \mathbb{L}$ y $R \notin \mathbb{L}$

Verificación:

$Q \in \mathbb{L}$: Con $\lambda = -2$ en la ecuación paramétrica de la recta:

$-2(2, -3, 1) + (4, 1, 1) = (0, 7, -1) = Q$

Ejemplo 6. Hallar un ecuación paramétrica para la recta $\mathbb{L}'$ paralela a $\mathbb{L} : X = \lambda(1, 2, 3) + (-4, 1, 3)$ y que pasa por $P = (3, -3, 0)$.

Solución: El enunciado ya nos indica un punto de paso para la recta $\mathbb{L}'$; para poder dar una ecuación paramétrica nos falta un vector director $\mathbf{v}$.
Recordemos que dos rectas son paralelas si sus direcciones lo son y, para que eso pase, sus vectores directores deben ser múltiplos. Como la dirección de la recta $\mathbb{L}$ está dada por el vector $(1, 2, 3)$, buscamos entonces $\mathbf{v} = k(1, 2, 3)$ con algún $k \neq 0$, por ejemplo $k = 1$, y queda:

$\boxed{\text{Respuesta: } \mathbb{L}' : X = \lambda(1,2,3) + (3,-3,0)}$

Ejemplo 7. Hallar una ecuación paramétrica para la recta $\mathbb{L}'$, perpendicular a $\mathbb{L} : X = \lambda(2,3) + (-4,1)$, que pasa por $P = (1,-3)$.

Solución: Nuevamente el enunciado nos muestra un punto de paso para la recta buscada: $P = (1,-3)$. Para hallar una ecuación paramétrica nos queda encontrar un vector director.
Para que las rectas sean perpendiculares sus direcciones tienen que serlo y, para eso, sus vectores directores deben ser ortogonales. Si llamamos $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ al vector director de $\mathbb{L}'$, se deberá cumplir

$$\mathbf{v} \perp (2,3) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (v_1, v_2) \cdot (2,3) = 2v_1 + 3v_2 = 0$$

Una de las soluciones de esta ecuación es $v_1 = 3$ y $v_2 = -2$, es decir, $\mathbf{v} = (3,-2)$ es un vector director para $\mathbb{L}'$.
La recta que buscamos tiene entonces la ecuación paramétrica:

$\boxed{\text{Respuesta: } \mathbb{L}' : X = \lambda(3,-2) + (1,-3)}$

Verificación:

Ortogonalidad de los vectores directores:

$(3,-2) \cdot (2,3) = 0$

$P \in \mathbb{L}'$: Lo usamos como punto de paso.

Observación

Como la recta $\mathbb{L}'$ pasa por el punto P, para los puntos $X \in \mathbb{L}'$, los vectores $\overrightarrow{PX}$ son ortogonales al vector director de $\mathbb{L}$:

$$(X - P) \perp (2,3) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (X - P) \cdot (2,3) = 0$$

lo que nos lleva a la ecuación:

$$\begin{aligned} ((x,y) - (1,-3)) \cdot (2,3) &= 0 \\ (x,y) \cdot (2,3) - (1,-3) \cdot (2,3) &= 0 \\ (x,y) \cdot (2,3) &= (1,-3) \cdot (2,3) \\ 2x + 3y &= -7 \end{aligned}$$

Esta ecuación describe a la recta $\mathbb{L}'$ de una forma distinta a la que encontramos en el problema. Se llama *ecuación implícita de la recta* en $\mathbb{R}^2$.

En general, si una ecuación paramétrica de la recta en $\mathbb{R}^2$ es $\mathbb{L} : X = \lambda(v_1, v_2) + (p_1, p_2)$, podemos construir una ecuación implícita buscando un vector ortogonal a su vector director, por ejemplo $(v_2, -v_1)$, y haciendo la cuenta anterior:

$$\mathbb{L} : v_2 x - v_1 y = d, \qquad \text{con } d = (p_1, p_2) \cdot (v_2, -v_1).$$

Si necesitamos encontrar una ecuación paramétrica a partir de la ecuación implícita solo necesitamos hallar dos puntos que sean solución (por ejemplo dándole valores a x y despejando y) y construir la recta que pasa por esos dos puntos.
Al igual que la ecuación paramétrica, la ecuación implícita no es única: podemos cambiar el vector ortogonal por cualquier múltiplo no nulo y describiremos la misma recta ya que en el plano solo hay una única dirección ortogonal a la de $\mathbb{L}$.

Ejemplo 8. Hallar dos rectas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$, perpendiculares a $\mathbb{L} : X = \lambda(1,2,3) + (-4,1,3)$, que pasen por $P = (3,-3,0)$.

Solución: Tenemos como dato un punto de paso, $P = (3,-3,0)$ para las dos rectas. Nos falta determinar sus direcciones.
Recordemos que dos rectas son perpendiculares si sus direcciones lo son. Necesitamos hallar entonces, dos vectores $\mathbf{v}$ ortogonales al vector director de $\mathbb{L}$, y que no sean múltiplos entre sí (vimos que no alcanza con que sean distintos; si mantienen la dirección, describirán la misma recta).
La condición de ortogonalidad para los dos es la misma:

$$\mathbf{v} \cdot (1,2,3) = (v_1, v_2, v_3) \cdot (1,2,3) = v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0.$$

Dándole valores, por ejemplo, a v_2 y v_3, usando la ecuación anterior despejamos la coordenada que falta.

Si $v_2 = 1$ y $v_3 = 1$ nos da $v_1 = -5$ y $\mathbf{v} = (-5,1,1)$.

Si $v_2 = 1$ y $v_3 = 0$ nos da $v_1 = -2$ y $\mathbf{v} = (-2,1,0)$.

Respuesta: $\mathbb{L}_1 : X = \lambda(-5,1,1) + (3,-3,0)$ y $\mathbb{L}_2 : X = \lambda(-2,1,0) + (3,-3,0)$

Verificación:

$P \in \mathbb{L}$: Lo usamos como punto de paso.

Son rectas: Ningún vector director es nulo.

Perpendicularidad respecto a $\mathbb{L}$:

Con $\mathbb{L}_1$: $(-5,1,1) \cdot (1,2,3) = -5 + 2 + 3 = 0$

Con $\mathbb{L}_2$: $(-2,1,0) \cdot (1,2,3) = -2 + 2 = 0$

$\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ no son la misma recta:
Si lo fueran, sus vectores directores serían múltiplos.

Si $k \in \mathbb{R}$, cumple $(-5,1,1) = k(-2,1,0)$ entonces $-5 = -2k, 1 = k$ y $1 = 0$ (Absurdo)

1.7 Intersección de rectas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Ejemplo 1. Hallar la intersección de las rectas

$$\mathbb{L}_1 : \lambda(2,0) + (-2,3) \text{ y } \mathbb{L}_2 : \lambda(3,1) + (-1,1).$$

Solución: Si un punto Q está en la intersección de las dos rectas, deben cumplirse simultáneamente $Q \in \mathbb{L}_1$ y $Q \in \mathbb{L}_2$. Como vimos en el Ejemplo 5 de las explicaciones sobre **Rectas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$**, para que esto ocurra deben existir valores particulares de los parámetros tal que, al reemplazarlos en las ecuaciones de las rectas, determinen las coordenadas de Q. Pero esos valores pueden diferir para cada recta así que, aunque en el enunciado se use la misma letra λ para los parámetros en ambas ecuaciones, ahora debemos distinguirlos.
Buscamos entonces $Q \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ que verifiquen simultáneamente:

$$\begin{aligned} Q &= \lambda(2,0) + (-2,3) \quad (Q \in \mathbb{L}_1) \\ Q &= \mu(3,1) + (-1,1) \quad (Q \in \mathbb{L}_2) \end{aligned}$$

Si igualamos los dos lados derechos obtenemos ecuaciones para λ y μ:

$$\begin{aligned} \lambda(2,0) + (-2,3) &= \mu(3,1) + (-1,1) \\ (2\lambda - 2, 3) &= (3\mu - 1, \mu + 1) \end{aligned}$$

Igualando coordenada a coordenada:

$$2\lambda - 2 = 3\mu - 1 \quad \text{y} \quad 3 = \mu + 1$$

De la segunda ecuación obtenemos $\mu = 2$ y, sustituyendo en la primera, despejamos λ:

$$2\lambda - 2 = 3 \cdot 2 - 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda = \frac{7}{2}$$

Para encontrar Q reemplazamos alguno de los valores hallados en la ecuación de la recta correspondiente, por ejemplo $\mu = 2$ en $\mathbb{L}_2 : \mu(3,1) + (-1,1)$:

$$Q = 2(3,1) + (-1,1) = (5,3)$$

$\boxed{\text{Respuesta: } \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \{(5,3)\}}$

Verificación:

Reemplazamos $\lambda = \dfrac{7}{2}$ en la ecuación paramétrica de la recta que $\mathbb{L}_1$:

$$Q = \frac{7}{2}(2,0) + (-2,3) = (7-2, 0+3) = (5,3)$$

También podemos ver que no son la misma recta ya que no tienen la misma dirección, así que no debe haber más de un punto en la intersección:
Si $k \in \mathbb{R}$ cumple $(2,0) = k(3,1)$ entonces $2 = 3k$ y $0 = k$ que no se verifican simultáneamente.

Ejemplo 2. Hallar la intersección de las rectas

$$\mathbb{L}_1 : \lambda(2,-1) + (-2,3) \text{ y } \mathbb{L}_2 : \lambda(-4,2) + (0,2).$$

Solución: Como en el ejemplo anterior, un punto Q está en $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ si

$$Q = \lambda(2,-1) + (-2,3) \quad \text{y} \quad Q = \mu(-4,2) + (0,2)$$

para valores adecuados de λ y μ. Entonces, buscamos λ y μ tales que

$$\lambda(2,-1) + (-2,3) = \mu(-4,2) + (0,2)$$
$$(2\lambda - 2, -\lambda + 3) = (-4\mu, 2\mu + 2)$$

Esta igualdad es equivalente a que

$$2\lambda - 2 = -4\mu \quad \text{y} \quad -\lambda + 3 = 2\mu + 2$$

De la primera ecuación podemos despejar $\lambda = -2\mu + 1$, que al reemplazar en la segunda nos da:

$$-(-2\mu + 1) + 3 = 2\mu + 2 \iff 2\mu + 2 = 2\mu + 2 \iff 2 = 2$$

que es una *identidad* (se verifica independientemente de las incógnitas).
Solo nos queda la relación $\lambda = -2\mu + 1$ que vale para cualquier $\mu \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, para cualquier valor de $\mu \in \mathbb{R}$ se obtiene un valor de λ (y recíprocamente). Esto nos dice que cada punto de $\mathbb{L}_2$ pertenece a $\mathbb{L}_1$ (y recíprocamente), mostrando así que las rectas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ están superpuestas (son la misma recta descripta con ecuaciones diferentes).

Respuesta: $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$

Verificación:

Podemos ver que los vectores directores son paralelos:

$$(-4,2) = -2(2,-1)$$

y que además un punto de paso de una de las rectas pertenece a la otra:

$$(0,2) = \lambda(2,-1) + (-2,3) = 1(2,-1) + (-2,3) = (0,2)$$

Observaciones

Si en lugar de una identidad llegábamos a un *absurdo* (igualdad que no se verifica), significaría que no hay puntos en común entre las rectas. Como estamos en el plano, tendríamos que concluir que las rectas son paralelas y distintas.

El mismo procedimiento de los ejemplos anteriores se aplica para determinar la intersección de rectas en el espacio, pero deja de ser válida la conclusión anterior.
En el espacio, si dos rectas no son paralelas y no tienen puntos en común, diremos que son *alabeadas*.

Ejemplo 3. Hallar la intersección de las rectas

$$\mathbb{L}_1 : \lambda(2,2,1) + (2,1,-3) \text{ y } \mathbb{L}_2 : \lambda(1,-1,1) + (0,2,3).$$

Solución: Observemos que estas dos rectas no son paralelas, ya que

$$(2,2,1) = k(1,-1,1) \quad \Longleftrightarrow \quad 2 = k \quad \text{y} \quad 2 = -k \quad \text{y} \quad 1 = k$$

que no se pueden cumplir simultáneamente.
El mismo procedimiento de antes para buscar la intersección

$$\lambda(2,2,1) + (2,1,-3) = \mu(1,-1,1) + (0,2,3)$$
$$(2\lambda+2, 2\lambda+1, \lambda-3) = (\mu, -\mu+2, \mu+3)$$

nos conduce a las tres ecuaciones

$$2\lambda + 2 = \mu \quad , \quad 2\lambda + 1 = -\mu + 2 \quad \text{y} \quad \lambda - 3 = \mu + 3.$$

De la primera ecuación obtenemos $\mu = 2\lambda + 2$. Reemplazamos en la segunda y despejamos λ:

$$2\lambda + 1 = -(2\lambda + 2) + 2 \Longleftrightarrow \lambda = -\frac{1}{4}$$

Volviendo a la expresión para μ tenemos

$$\mu = 2\left(-\frac{1}{4}\right) + 2 = \frac{3}{2}$$

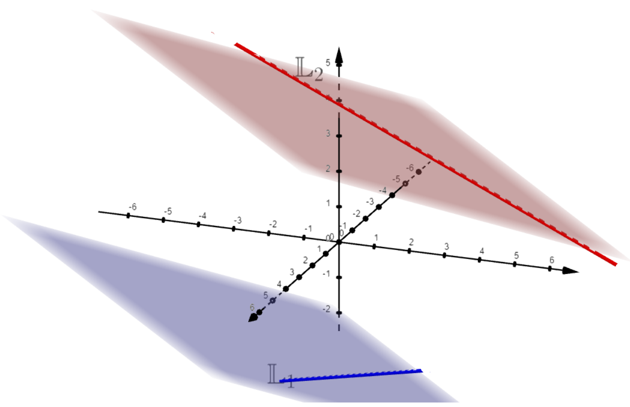
Reemplazando estos valores de λ y μ en la tercera ecuación nos queda un absurdo:

$$-\frac{1}{4} - 3 = \frac{3}{2} + 3$$
$$-\frac{13}{4} = \frac{9}{2}$$

Esto significa que no existen valores λ y μ que, al ser reemplazados en las ecuaciones paramétricas de $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$, den el mismo punto; es decir, las rectas no tienen ningún punto en común.

$\boxed{\text{Respuesta: } \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \emptyset.}$

Como no son paralelas estas rectas son alabeadas.



1.8 Planos

Ejemplo 1. Hallar el conjunto C de vectores $X \in \mathbb{R}^3$ ortogonales a $N = (1, -2, 4)$.

Solución: Recordemos nuestra definición de ortogonalidad:

$$X \perp N \quad \Longleftrightarrow \quad X \cdot N = 0$$

Si escribimos $X = (x, y, z)$, la condición para que X esté en el conjunto C es:

$$X \cdot N = (x, y, z) \cdot (1, -2, 4) = x - 2y + 4z = 0$$

Respuesta: $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + 4z = 0\}$.

Observaciones

$O = (0, 0, 0)$ pertenece a C.

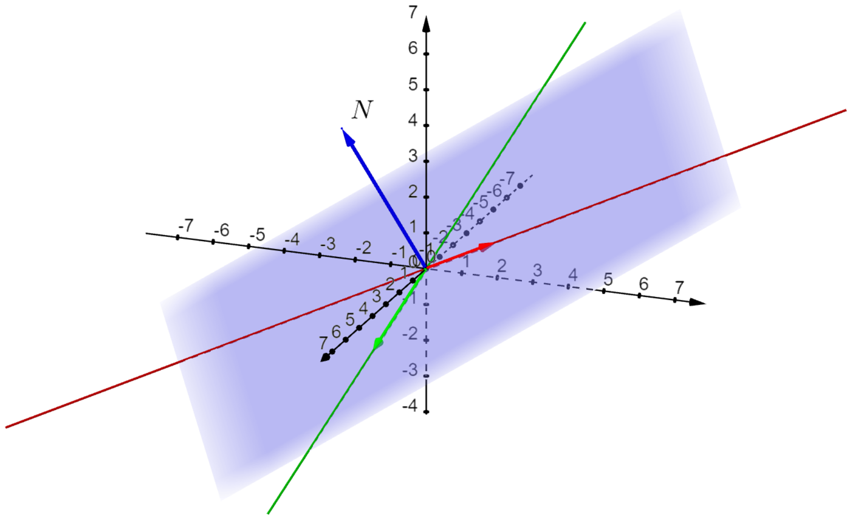
Como la condición para pertenecer a C es solo una ecuación con tres incógnitas, el conjunto tendrá infinitos elementos:
Podemos ver que, por ejemplo, $(0, 2, 1)$ y $(4, 0, -1)$ están en C:

$$(0, 2, 1) \cdot (1, -2, 4) = 0 \quad \text{y} \quad (4, 0, -1) \cdot (1, -2, 4) = 0$$

Al estar en el conjunto, todos sus múltiplos también lo están:

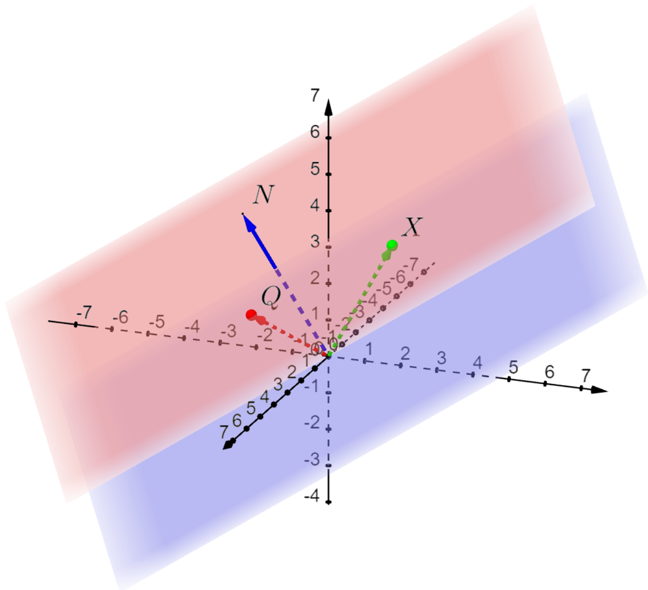
$$\text{Si } A = \lambda(0, 2, 1) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad A \cdot N = (\lambda(0, 2, 1)) \cdot N = \lambda((0, 2, 1) \cdot N) = 0$$

Lo mismo se aplica a los múltiplos de $(4, 0, -1)$.
Hemos visto que estos múltiplos forman rectas que pasan por el origen (observar que las rectas generadas por los múltiplos de $(0, 2, 1)$ y $(4, 0, -1)$ no son paralelas).
Además, estas rectas son ortogonales al vector N. Lo mismo ocurre con todos los elementos de C.
Recíprocamente, si una recta que pasa por el origen es ortogonal a N, entonces cualquier vector director de la misma es ortogonal a N y por tanto está en el conjunto C.
El conjunto C está formado entonces por todas las rectas que pasan por el origen y son perpendiculares a la dirección de N. Todas estas rectas forman un plano cuya inclinación está determinada por la dirección del vector N y que pasa por el origen.

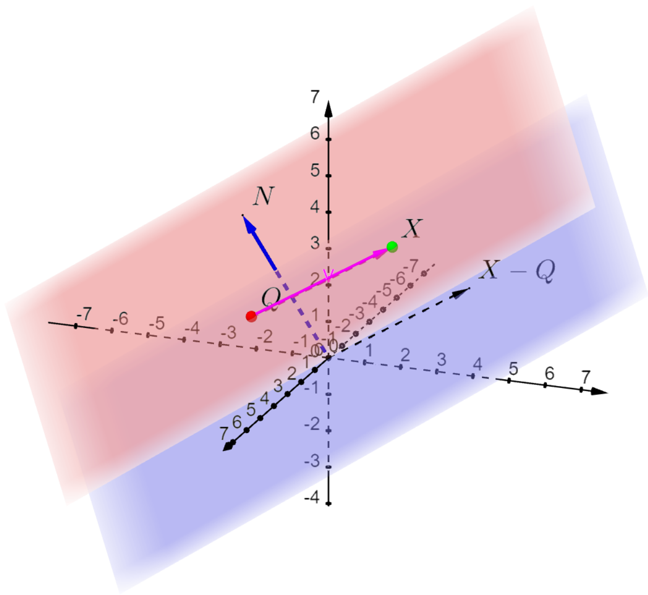


Ejemplo 2. Hallar el plano, paralelo al plano C del Ejemplo 1, que pasa por el punto $Q = (3, -1, 2)$.

Solución: Gráficamente podemos imaginarnos cómo es este plano:



Podemos ver que los vectores que van desde el origen hasta los puntos de este plano no son ahora ortogonales a N como ocurría en el ejemplo anterior. Sí lo son los vectores con origen y extremo en el plano que buscamos, o sea, los que están contenidos en este plano (sus trasladados al origen quedan en el plano C del ejemplo anterior).



Para un punto X en el plano solución, el vector $\overrightarrow{QX}$ es entonces ortogonal a N. Si escribimos $X = (x, y, z)$, la condición para estar en el conjunto es ahora:

$$(X - Q) \cdot N = 0$$

que podemos reescribir

$$\begin{aligned} (X - Q) \cdot N &= 0 \\ X \cdot N - Q \cdot N &= 0 \\ X \cdot N &= Q \cdot N \\ x - 2y + 4z &= (3, -1, 2) \cdot (1, -2, 4) \\ x - 2y + 4z &= 13 \end{aligned}$$

Respuesta: El plano paralelo a C que pasa por Q es $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + 4z = 13\}$.

Ecuación implícita del plano

Dados un vector $N = (a, b, c)$, no nulo, y un punto $Q \in \mathbb{R}^3$, el plano Π que es perpendicular a N y pasa por Q es el conjunto

$$\begin{aligned} \Pi &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) \cdot N = Q \cdot N\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / ax + by + cz = d\} \quad (\text{con } d = Q \cdot N) \end{aligned}$$

Vamos a abreviar la notación escribiendo

$$\Pi : ax + by + cz = d \quad (\text{con } d = Q \cdot N)$$

Esta ecuación es una *ecuación implícita* del plano Π que pasa por Q y es perpendicular a N. Diremos que el vector N es *normal* al plano.

Observaciones

El producto escalar $(x, y, z) \cdot N$ hace que las coordenadas del vector normal se conviertan en los coeficientes de x, y y z en la ecuación del plano.
El vector normal N no es único, cualquier múltiplo no nulo tiene la misma dirección así que la condición de ortogonalidad se mantiene: si $k \neq 0$,

$$(X - Q) \cdot N = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (X - Q) \cdot (kN) = k((X - Q) \cdot N) = 0$$

y la recta de dirección N (que pasa por el origen) es perpendicular al plano. Por este motivo, cualquier múltiplo de N puede tomarse como vector normal al plano.

Si el vector N fuera nulo, la ecuación se reduciría a $0 = 0$ que, al ser una identidad, la verifican todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ y el conjunto ya no es un plano.

Ejemplo 3. Hallar una ecuación implícita para el plano Π perpendicular a $N = (3, -2, 2)$ que pasa por $Q = (1, 2, 1)$.

Solución: Para una ecuación implícita del plano necesitamos hallar valores para a, b, c y d en la ecuación $ax + by + cz = d$ que vimos más arriba. Como observamos antes, los coeficientes a, b y c corresponden a las coordenadas de un vector normal al plano. El enunciado ya nos indica uno que podemos usar: $(a, b, c) = (3, -2, 2)$.
Para hallar d usamos el punto de paso Q:
Como $d = Q \cdot N = (1, 2, 1) \cdot (3, -2, 2) = 1$, una ecuación implícita del plano Π es

$\boxed{\text{Respuesta: } \Pi : 3x - 2y + 2z = 1.}$

Observación

Si usamos como vector normal a $N' = 2(3, -2, 2) = (6, -4, 4)$ y calculamos $d' = Q \cdot N' = (1, 2, 1) \cdot (6, -4, 4) = 2$ nos queda la ecuación

$\Pi : 6x - 4y + 4z = 2$

que describe el mismo plano (observar que es la ecuación de la respuesta anterior multiplicada por 2).
Al igual que ocurre para rectas, podemos tener distintas expresiones que describan un mismo plano.

Ejemplo 4. Decidir si los puntos $A = (1, -3, 2)$ y $B = (1, 3, 2)$ pertenecen al plano de ecuación $\Pi : 3x - 2y + 4z = 5$.

Solución: Un punto pertenece al plano Π si, y solo si, sus coordenadas verifican la ecuación de Π.
Si reemplazamos las coordenadas de A en la ecuación nos queda

$$3 \cdot 1 - 2(-3) + 4 \cdot 2 = 17 \neq 5$$

Haciendo lo mismo con B:

$$3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 5$$

Respuesta: $A \notin \Pi$ y $B \in \Pi$.

Ejemplo 5. Hallar tres puntos no alineados del plano $\Pi : 2x - 2y - 4z = 3$.

Solución: Para hallar puntos del plano Π, podemos despejar una variable, por ejemplo y, de la ecuación del plano

$$y = -\frac{1}{2}(3 - 2x + 4z) = -\frac{3}{2} + x - 2z$$

y dar valores arbitrarios a las otras, en este caso x y z, para calcular y.

- $x = 0,\ z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{2} + 0 - 0 = -\frac{3}{2}$
- $x = 1,\ z = 1 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{2} + 1 - 2 = -\frac{5}{2}$
- $x = 2,\ z = 1 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{2} + 2 - 2 = -\frac{3}{2}$

Los puntos que encontramos son $\left(0, -\frac{3}{2}, 0\right)$, $\left(1, -\frac{5}{2}, 1\right)$ y $\left(2, -\frac{3}{2}, 1\right)$.

Veamos si están alineados, es decir, si pertenecen a una misma recta.
Llamemos A, B y C a los tres puntos.
Si consideramos la recta que pasa por A y B y la recta que pasa por A y C, para que los puntos estén alineados necesitamos que estas rectas sean la misma. Como las dos pasan por el punto A, es suficiente que tengan la misma dirección o, equivalentemente, que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, como vectores directores, sean paralelos y por lo tanto sus trasladados al origen deben ser múltiplos. Para que esto ocurra debe existir $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$B - A = k(C - A)$$

Tomando $A = \left(0, -\frac{3}{2}, 0\right)$, $B = \left(1, -\frac{5}{2}, 1\right)$ y $C = \left(2, -\frac{3}{2}, 1\right)$ nos queda la igualdad

$$\left(1, -\frac{5}{2}, 1\right) - \left(0, -\frac{3}{2}, 0\right) = k\left(\left(2, -\frac{3}{2}, 1\right) - \left(0, -\frac{3}{2}, 0\right)\right)$$
$$(1, -1, 1) = k\,(2, 0, 1)$$

La igualdad de las segundas coordenadas requiere que $-1 = 0$, lo que no se cumple para ningún valor de k.

Respuesta: $\left(0, -\frac{3}{2}, 0\right)$, $\left(1, -\frac{5}{2}, 1\right)$ y $\left(2, -\frac{3}{2}, 1\right)$ son tres puntos no alineados del plano Π.

Verificación:

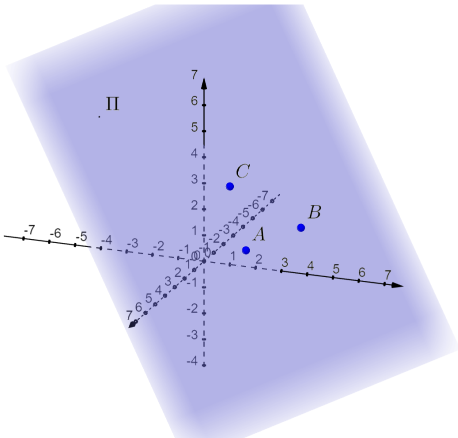
Ya vimos que no están alineados. Solo falta ver que están en Π

$\left(0, -\frac{3}{2}, 0\right) \in \Pi : \quad 2 \cdot 0 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 4 \cdot 0 = 3$

$\left(1, -\frac{5}{2}, 1\right) \in \Pi : \quad 2 \cdot 1 - 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) - 4 \cdot 1 = 3$

$\left(2, -\frac{3}{2}, 1\right) \in \Pi : \quad 2 \cdot 2 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 4 \cdot 1 = 3$

Ejemplo 6. Dar una ecuación implícita de un plano Π que pasa por los puntos $A = (1,2,1)$, $B = (-2,3,1)$ y $C = (0,1,3)$.



Solución: Ya vimos que A, B y C, como vectores, no tienen por qué estar contenidos en el plano (esto ocurre solo si el plano pasa por O). Los que sí lo están son los vectores que tienen origen y extremo en dichos puntos: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ y sus opuestos. La dirección del vector normal deberá ser ortogonal a todos ellos. Si elegimos dos, por ejemplo $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, el producto vectorial nos servirá para calcular un vector normal N:

$$\begin{aligned} N = (B - A) \times (C - A) &= ((-2,3,1) - (1,2,1)) \times ((0,1,3) - (1,2,1)) \\ &= (-3,1,0) \times (-1,-1,2) = (2,6,4) \end{aligned}$$

Con esta normal y alguno de los puntos, por ejemplo A, formamos la ecuación del plano

$$2x + 6y + 4z = (2,6,4) \cdot (1,2,1) = 18$$

Respuesta: $\Pi : 2x + 6y + 4z = 18.$

Verificación:

$A \in \Pi : \quad 2 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 18$
$B \in \Pi : \quad 2(-2) + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 18$

$C \in \Pi : \quad 2 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 18$

Observaciones

Dados tres puntos A, B y C en $\mathbb{R}^3$, si los puntos no están alineados hay un único plano que los contiene.
En el ejemplo, si en lugar de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ usamos $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{CB}$, el vector normal que obtenemos es

$$\begin{aligned} N' = (C - A) \times (B - C) &= ((0,1,3) - (1,2,1)) \times ((-2,3,1) - (0,1,3)) \\ &= (-1,-1,2) \times (-2,2,-2) = (-2,-6,-4) \end{aligned}$$

con lo que cambia la ecuación del plano aunque sigue siendo el mismo (N' y N tienen la misma dirección).

Si los tres puntos de los datos están alineados, el producto vectorial nos da $(0,0,0)$, que no sirve como vector normal. Esto no significa que no exista un plano que los contenga. Al estar contenidos en una recta, hay muchos planos posibles. En caso de querer hallar uno, solo tendremos que elegir como normal un vector perpendicular a esa recta.

Ejemplo 7. Dar una ecuación implícita de un plano Π que pase por los puntos $A = (2,3,3)$, $B = (0,-1,-3)$ y $C = (3,5,6)$.

Solución: Planteemos lo mismo que en el ejemplo anterior:

$$\begin{aligned} N = (B - A) \times (C - A) &= ((0,-1,-3) - (2,3,3)) \times ((3,5,6) - (2,3,3)) \\ &= (-2,-4,-6) \times (1,2,3) = (0,0,0) \end{aligned}$$

Como comentamos antes, este resultado indica que los tres puntos están alineados. Para la normal solo necesitamos un vector ortogonal a la dirección de la recta que pasa por los tres puntos. Por ejemplo, si $N = (a,b,c)$, la condición para $N \perp \overrightarrow{AB}$ nos lleva a la ecuación

$$\begin{aligned} (a,b,c) \cdot ((0,-1,-3) - (2,3,3)) &= 0 \\ (a,b,c) \cdot (-2,-4,-6) &= 0 \\ -2a - 4b - 6c &= 0 \end{aligned}$$

Eligiendo $a = b = 1$, se despeja $c = -1$ y se obtiene una solución posible: $N = (1,1,-1)$.
Por lo tanto $d = A \cdot N = (2,3,3) \cdot (1,1,-1) = 2$ nos da la ecuación de un plano posible:

$\boxed{\text{Respuesta: } \Pi : x + y - z = 2}$

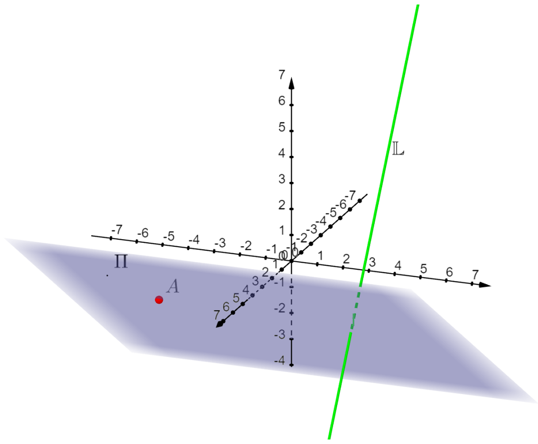
Verificación:

$A \in \Pi : \quad 2 + 3 - 3 = 2$
$B \in \Pi : \quad 0 - 1 - (-3) = 2$
$C \in \Pi : \quad 3 + 5 - 6 = 2$

Observación

En este problema no hay una única dirección para la normal así que habrá muchos planos distintos como posibles respuestas.

Ejemplo 8. Dados el punto $A = (3, -4, -1)$ y la recta $\mathbb{L} : \lambda(-2, 0, 3) + (2, 3, -2)$, hallar una ecuación implícita para el plano Π perpendicular a $\mathbb{L}$ que pasa por A.

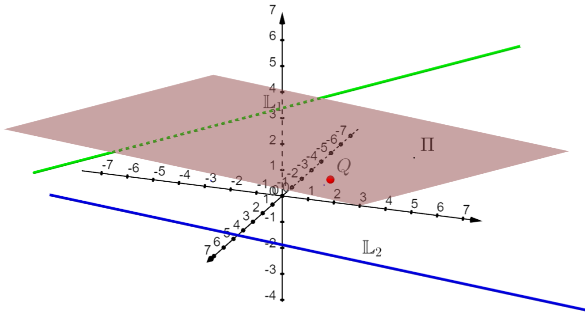


Solución: Como la recta tiene que ser perpendicular al plano, su vector director (o cualquier múltiplo no nulo), sirve como vector normal. Con $N = (-2, 0, 3)$, por ejemplo, y con el punto de paso A hallamos la ecuación

$$(x, y, z) \cdot (-2, 0, 3) = d = (3, -4, -1) \cdot (-2, 0, 3) = -9$$

$\boxed{\text{Respuesta: } \Pi : -2x + 3z = -9.}$

Ejemplo 9. Dadas las rectas $\mathbb{L}_1 : \lambda(1, 2, 1) + (0, -1, 3)$, $\mathbb{L}_2 : \lambda(2, -2, 1) + (3, 4, -1)$ y el punto $Q = (3, 3, 2)$, hallar la ecuación de un plano Π paralelo a las dos rectas y que pase por Q.



Solución: Como las rectas tienen que ser paralelas al plano, sus direcciones deben ser ortogonales a la normal del plano. Entonces, el producto vectorial entre sus vectores directores nos da un vector normal.

$$N = (1,2,1) \times (2,-2,1) = (4,1,-6)$$

y además, para que el plano pase por $Q = (3,3,2)$,

$$d = (3,3,2) \cdot (4,1,-6) = 3$$

$\boxed{\text{Respuesta: } \Pi : 4x + y - 6z = 3}$

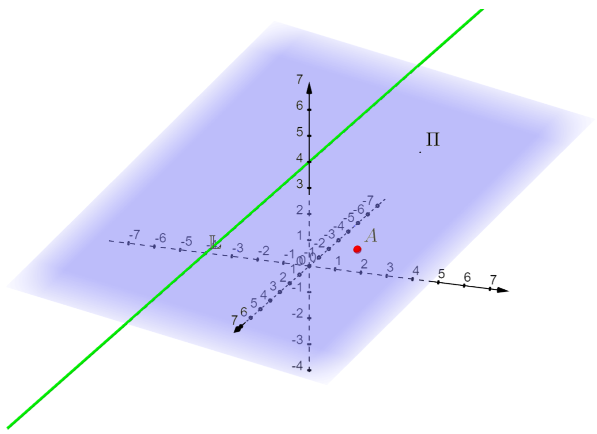
Verificación:

$Q \in \Pi : \quad 4 \cdot 3 + 3 - 6 \cdot 2 = 3$
Perpendicularidad entre vector director de las rectas y normal del plano:
$\mathbb{L}_1 \parallel \Pi : \quad (1,2,1) \cdot (4,1,-6) = 0$
$\mathbb{L}_2 \parallel \Pi : \quad (2,-2,1) \cdot (4,1,-6) = 0$

Observación

Notar que una recta y un plano son paralelos si el vector director de la recta es perpendicular a la normal al plano.

Ejemplo 10. Dados el punto $A = (1,-3,-4)$ y la recta $\mathbb{L} : \lambda(-2,1,1) + (3,-3,1)$, hallar un plano Π que los contenga.



Solución: Para contener a la recta, alcanza con que el plano contenga a dos de sus puntos: por ejemplo

con $\lambda = 0$, $B = 0(-2,1,1) + (3,-3,1) = (3,-3,1) \in \mathbb{L}$

con $\lambda = 1$, $C = 1(-2,1,1) + (3,-3,1) = (1,-2,2) \in \mathbb{L}$

Como el plano también tiene que contener a A, el problema se reduce a encontrar el plano que pasa por los tres puntos A, B y C. Para hallarlo, procedemos como en el Ejemplo 7.

$$\begin{aligned} N = (B-A)\times(C-A) &= ((3,-3,1)-(1,-3,-4))\times((1,-2,2)-(1,-3,-4)) \\ &= (2,0,5)\times(0,1,6) = (-5,-12,2) \end{aligned}$$

Verificación de la ortogonalidad del producto vectorial:
$(2,0,5)\cdot(-5,-12,2) = 0$ y $(0,1,6)\cdot(-5,-12,2) = 0$

Con esta normal y el punto A, formamos la ecuación del plano

$$-5x - 12y + 2z = (-5,-12,2)\cdot(1,-3,-4) = 23$$

Respuesta: $\Pi : -5x - 12y + 2z = 23.$

Verificación:

$A \in \Pi : \quad -5\cdot 1 - 12(-3) + 2(-4) = 23$

$\mathbb{L} \subset \Pi$: Para que la recta esté incluida en el plano basta verificar que dos de sus puntos pertenezcan al plano

$B \in \Pi : \quad -5\cdot 3 - 12\cdot(-3) + 2\cdot 1 = 23$

$C \in \Pi : \quad -5\cdot 1 - 12\cdot(-2) + 2\cdot 2 = 23$

Notar que la condición $\mathbb{L} \subset \Pi$ también se puede verificar mostrando que la dirección de la recta es ortogonal a la normal (lo que indica que $\mathbb{L} \parallel \Pi$) y que tienen algún punto en común.

Ecuación paramétrica del plano

La ecuación implícita de un plano nos da una relación que deben cumplir las coordenadas de sus puntos. Por ejemplo en el plano de ecuación implícita $\Pi : 2x + z = 7$ podemos despejar $z = -2x + 7$. Esto nos permite escribir las coordenadas de los puntos del plano como:

$$X = (x,y,z) \in \Pi \quad \Leftrightarrow \quad X = (x,y,-2x+7) \quad (\text{con } x,y \in \mathbb{R})$$

Si separamos esta expresión en una suma de tres ternas (separando las variables entre sí y de los términos sin variables):

$$\begin{aligned} X = (x,y,-2x+7) &= (0,0,7) + (x,0,-2x) + (0,y,0) \\ &= (0,0,7) + x(1,0,-2) + y(0,1,0) \quad (\text{con } x,y \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

llegamos a una expresión similar a la ecuación paramétrica de una recta pero esta vez con dos parámetros. Esta es otra forma de describir a los planos llamada *ecuación paramétrica*. La orientación del plano está controlada por los vectores $(1,0,-2)$ y $(0,1,0)$, que son paralelos al plano, y el punto $(0,0,7)$ es un punto del plano.

En general, dados dos vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ (no paralelos ni nulos) y un punto P, el conjunto de todos los X que cumplen

$$X = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + P \quad (\text{con } \alpha \text{ y } \beta \in \mathbb{R})$$

es el plano que pasa por P y es paralelo a las direcciones de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.
Dado un plano, al igual que para rectas, no hay una única ecuación paramétrica para describirlo.
Notar que si los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ fueran paralelos, determinarían una única dirección y la expresión anterior describiría una recta con esa dirección.

Ejemplo 11. Hallar una ecuación implícita del plano

$$\Pi : X = \alpha(1,2,3) + \beta(1,0,-1) + (0,-2,1).$$

Solución: Como el plano es paralelo a los vectores $(1,2,3)$ y $(1,0,-1)$, un vector normal debe ser ortogonal a los dos.
Podemos usar $N = (1,2,3) \times (1,0,-1) = (-2,4,-2)$.

Verificación de la ortogonalidad del producto vectorial:
$(1,2,3) \cdot (-2,4,-2) = 0$ y $(1,0,-1) \cdot (-2,4,-2) = 0$.

Con el punto de paso $(0,-2,1)$ obtenemos $d = (0,-2,1) \cdot (-2,4,-2) = -10$.

Respuesta: Una ecuación implícita para el plano es $\Pi : -2x + 4y - 2z = -10$

Verificación:
Ya verificamos la ortogonalidad de la normal.
$(0,-2,1) \in \Pi$: $-2 \cdot 0 + 4(-2) - 2 \cdot 1 = -10$

Para decidir si un punto pertenece o no a un plano definido por una ecuación paramétrica, se procede de forma similar a lo visto para una recta dada por una ecuación paramétrica:

Ejemplo 12. Dados el punto $A = (-3,1,2)$ y el plano $\Pi : X = \alpha(3,1,3) + \beta(2,0,-2) + (4,2,1)$, decidir si A pertenece a Π.

Solución: Queremos ver si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ que verifiquen:

$$(-3,1,2) = \alpha(3,1,3) + \beta(2,0,-2) + (4,2,1)$$

Procedemos igual que en el caso de ecuaciones paramétricas de rectas

$$\begin{aligned}(-3,1,2) &= \alpha(3,1,3) + \beta(2,0,-2) + (4,2,1) \\ &= (3\alpha + 2\beta + 4, \alpha + 2, 3\alpha - 2\beta + 1)\end{aligned}$$

Se deben cumplir simultáneamente las tres ecuaciones:

$$-3 = 3\alpha + 2\beta + 4 \quad , \quad 1 = \alpha + 2 \quad \text{y} \quad 2 = 3\alpha - 2\beta + 1$$

Si despejamos $\alpha = -1$ en la segunda ecuación y sustituimos el valor en la primera, $-3 = 3(-1) + 2\beta + 4$, podemos despejar $\beta = -2$.

Sustituyendo los valores hallados de α y β en la tercera ecuación

$$2 = 3(-1) - 2(-2) + 1 = 2$$

vemos que se verifica, por lo tanto, el punto A pertenece al plano Π.

$\boxed{\text{Respuesta: } A = (-3,1,2) \in \Pi.}$

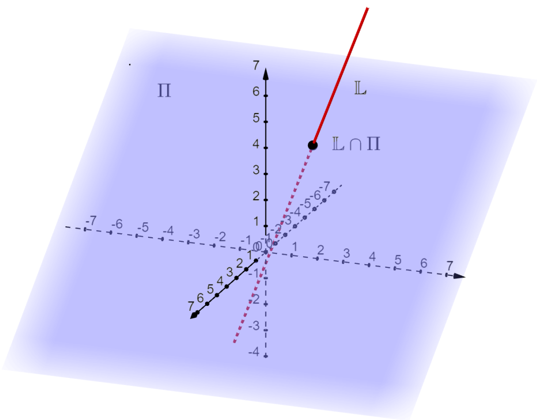
Verificación:

$A \in \Pi$:
Reemplazando los valores hallados de $\alpha = -1$ y $\beta = -2$ en la ecuación paramétrica de Π
$-1(3,1,3) + -2(2,0,-2) + (4,2,1) = (-3-4+4, -1+0+2, -3+4+1) = (-3,1,2)$
obtenemos el punto A.

1.9 Intersecciones y posiciones relativas entre rectas y planos

Intersección de una recta y un plano

Ejemplo 1. Dados la recta $\mathbb{L} : \lambda(1,1,2) + (-3,1,4)$ y el plano $\Pi : 2x + 3z = 2$, hallar $\mathbb{L} \cap \Pi$.



Solución: Si Q es un punto de la intersección, deberá cumplir simultáneamente:

i) $Q \in \mathbb{L}$: existe algún valor particular de $\lambda \in \mathbb{R}$ que verifica $Q = \lambda(1,1,2) + (-3,1,4)$

ii) $Q \in \Pi$: Q verifica la ecuación de Π

De i) obtenemos que $Q = (\lambda - 3, \lambda + 1, 2\lambda + 4)$. Reemplazando en ii) nos queda una ecuación para λ:

$$2(\lambda - 3) + 3(2\lambda + 4) = 2$$

Despejamos $\lambda = -\dfrac{1}{2}$, con lo cual:

$$Q = -\frac{1}{2}(1,1,2) + (-3,1,4) = (-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 3).$$

$\boxed{\text{Respuesta: } \mathbb{L} \cap \Pi = \{(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 3)\}}$

Verificación:

$(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 3) \in \mathbb{L}$: Con $\lambda = -\frac{1}{2}$ en la ecuación de $\mathbb{L}$ queda $-\frac{1}{2}(1,1,2) + (-3,1,4) = (-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 3)$.

$(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 3) \in \Pi$: $2(-\frac{7}{2}) + 3 \cdot 3 = 2$ verifica la ecuación del plano.

Podemos asegurarnos que la intersección es solo un punto si vemos que el plano y la recta no son paralelos:

$(1,1,2) \cdot (2,0,3) = 8 \neq 0 \quad \Rightarrow$ la dirección de la recta no es ortogonal a la normal del plano.

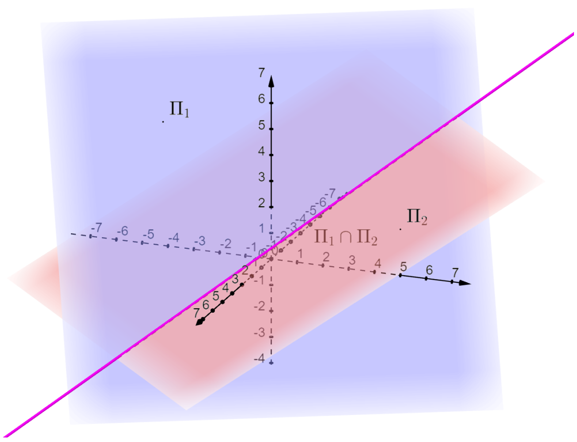
Observación

La ecuación que surgió de reemplazar i) en ii) podría habernos llevado a otras posibilidades. Si quedara una identidad, indicaría que todos los puntos de la recta están en el plano, es decir, que $\mathbb{L} \subset \Pi$. Si quedara un absurdo, no habría ningún punto de la recta que pertenezca al plano, es decir, $\mathbb{L} \cap \Pi = \emptyset$. En $\mathbb{R}^3$, esto último solo puede pasar si la recta y el plano son paralelos y la recta no está incluida en el plano.

Intersección de planos

Ejemplo 2. Hallar la intersección de los planos

$$\Pi_1 : 2x + y + 2z = 4 \;\text{ y }\; \Pi_2 : x - y + 3z = 5.$$



Solución: Los puntos $X = (x, y, z)$ de la intersección de Π_1 y Π_2 son los puntos que verifican las ecuaciones de los dos planos simultáneamente:

$$2x + y + 2z = 4 \quad \text{y} \quad x - y + 3z = 5$$

De la primera podemos despejar $y = 4 - 2x - 2z$, sustituir en la segunda

$x - (4 - 2x - 2z) + 3z = 5$, y así obtener $x = 3 - \frac{5}{3}z$.

Reemplazando x en el despeje anterior de y, nos quedan las dos variables x e y en términos de z:

$$x = 3 - \frac{5}{3}z \quad \text{y} \quad y = 4 - 2(3 - \frac{5}{3}z) - 2z = -2 + \frac{4}{3}z \qquad \forall z \in \mathbb{R}$$

Si miramos la expresión resultante para $X = (x, y, z) = (3 - \frac{5}{3}z, -2 + \frac{4}{3}z, z)$, podemos ver que es la de los puntos de un recta con parámetro z:

Si reescribimos esta expresión como suma de dos ternas, una con los términos que son múltiplos de z y la otra con los términos en los que no aparece z, se obtiene:

$$X = \left(3 - \frac{5}{3}z, -2 + \frac{4}{3}z, z\right) = \left(-\frac{5}{3}z, \frac{4}{3}z, z\right) + (3, -2, 0)$$

y si sacamos z como factor escalar de la primera terna

$$\left(-\frac{5}{3}z, \frac{4}{3}z, z\right) + (3, -2, 0) = z\left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1\right) + (3, -2, 0)$$

nos queda la ecuación paramétrica de una recta.

$$\boxed{\text{Respuesta: } \Pi_1 \cap \Pi_2 = \mathbb{L} : \lambda\left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1\right) + (3, -2, 0).}$$

Verificación:

$\mathbb{L} \subset \Pi_1$:

$(3, -2, 0) \in \Pi_1 : \quad 2 \cdot 3 + (-2) + 2 \cdot 0 = 4$

$\mathbb{L} \perp N_1(\text{normal de } \Pi_1) : \quad \left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1\right) \cdot (2, 1, 2) = 0$

$\mathbb{L} \subset \Pi_2$:

$(3, -2, 0) \in \Pi_2 : \quad 3 - (-2) + 0 = 5$

$\mathbb{L} \perp N_2(\text{normal de } \Pi_2) : \quad \left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1\right) \cdot (1, -1, 3) = 0$

Podemos asegurarnos que la intersección es una recta si comprobamos que los planos no son paralelos, es decir, que sus vectores normales no son paralelos.
Si son múltiplos, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $(2, 1, 2) = k(1, -1, 3) \Rightarrow 2 = k, \quad 1 = -k \quad \text{y} \quad 2 = 3k$.
Entre la primera y la segunda igualdad obtenemos el absurdo $2 = k = -1$.

Observaciones

En general una recta en $\mathbb{R}^3$ puede describirse como la intersección de dos planos no paralelos que la contienen.
Al conjunto de las ecuaciones de esos planos se lo denomina *ecuaciones implícitas* de la recta. Dada una ecuación paramétrica de una recta, esos planos deberán tener vectores normales perpendiculares a la dirección de la recta, no ser paralelos entre sí y contener algún punto de la recta.

Otros posibles resultados:
Si al resolver las ecuaciones hubiéramos llegado a un absurdo, significaría que los planos no tienen puntos en común, es decir, que los planos son paralelos y distintos.
Si al despejar en las ecuaciones llegamos a una identidad, quedando más de una variable como parámetro, entonces los dos planos son el mismo.

Ejemplo 3. Hallar la intersección de los planos

$$\Pi_1 : -2x + y + 2z = 4 \text{ y } \Pi_2 : 6x - 3y - 6z = -12.$$

Solución: Como en el Ejemplo 2, los puntos $X = (x, y, z)$ de la intersección deberán verificar las ecuaciones de los dos planos simultáneamente:

$$-2x + y + 2z = 4 \quad \text{y} \quad 6x - 3y - 6z = -12$$

De la primera podemos despejar $y = 4 + 2x - 2z$ y, sustituyendo en la segunda obtenemos

$$6x - 3(4 + 2x - 2z) - 6z = -12 \iff 6x - 12 - 6x + 6z - 6z = -12 \iff -12 = -12$$

que es una identidad y no nos permite despejar más variables. Esto indica que todos los puntos que cumplen la primera ecuación, y por lo tanto pertenecen al plano Π_1, verifican la segunda, y entonces son puntos de Π_2.
Los dos planos coinciden.

$\boxed{\text{Respuesta: } \Pi_1 \cap \Pi_2 = \Pi_1 = \Pi_2.}$

Verificación:

Podemos ver que son paralelos: sus normales son múltiplos
$(6, -3, -6) = -3(-2, 1, 2)$
y que comparten un punto o directamente que la ecuación de Π_2 es la de Π_1 multiplicada por ese factor -3 entre las normales.

Ejemplo 4. Hallar ecuaciones implícitas para la recta $\mathbb{L} : \lambda(1, -2, 4) + (3, 0, -1)$.

Solución: Como observamos antes, estas ecuaciones corresponden a las de dos planos Π_1 y Π_2, no paralelos, cuya intersección es la recta $\mathbb{L}$.
Tomando un punto cualquiera de la recta, tenemos un punto de paso común para estos planos.
Nos queda encontrar dos vectores normales, no paralelos, que sean ortogonales a la dirección de la recta:
Si $N = (a, b, c)$, queremos que

$$(1, -2, 4) \cdot N = a - 2b + 4c = 0.$$

Dos soluciones posibles son, por ejemplo, $N_1 = (4, 0, -1)$ y $N_2 = (0, 2, 1)$ que no son nulos ni múltiplos entre sí.
Con el punto $(3, 0, -1)$ de la recta obtenemos:
$d_1 = (3, 0, -1) \cdot (4, 0, -1) = 13$ para Π_1 y $d_2 = (3, 0, -1) \cdot (0, 2, 1) = -1$ para Π_2.

Respuesta: Un conjunto de ecuaciones implícitas para $\mathbb{L}$ es $\begin{cases} 4x - z = 13 \\ 2y + z = -1 \end{cases}$

Verificación:

$\mathbb{L} \subset \Pi_1$:
$\mathbb{L} \parallel \Pi_1$: $(1, -2, 4) \cdot (4, 0, -1) = 0$
$(3, 0, -1) \in \Pi_1$: $4 \cdot 3 - (-1) = 13$
$\mathbb{L} \subset \Pi_2$:
$\mathbb{L} \parallel \Pi_2$: $(1, -2, 4) \cdot (0, 2, 1) = 0$
$(3, 0, -1) \in \Pi_2$: $0 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + (-1) = -1$
Los planos no son paralelos:
Si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $(4, 0, -1) = k(0, 2, 1)$ tenemos el absurdo $4 = 0$ en la primera coordenada.

Más sobre posiciones relativas de rectas y planos

Ejemplo 5. Dadas las rectas $\mathbb{L}_1 : \lambda(1, 1, 2) + (2, 3, -1)$ y $\mathbb{L}_2 : \lambda(-2, 1, 1) + (3, 3, 2)$ hallar, si es posible, una ecuación implícita para un plano Π que las contenga.

Solución: Para dar una ecuación implícita de un plano Π que cumpla lo pedido necesitamos un vector normal N y un punto de paso que garanticen

$\mathbb{L}_1 \subset \Pi$:

i) $(1, 1, 2) \perp N$

ii) $(2, 3, -1) \in \Pi$

y, simultáneamente, $\mathbb{L}_2 \subset \Pi$:

iii) $(-2, 1, 1) \perp N$

iv) $(3, 3, 2) \in \Pi$

Con i) y iii) obtenemos un vector normal $N = (1,1,2) \times (-2,1,1) = (-1,-5,3)$

Verificación de la ortogonalidad del producto vectorial: $(1,1,2) \cdot (-1,-5,3) = 0$
y $(-2,1,1) \cdot (-1,-5,3) = 0$.

Usando la condición ii) obtenemos $d = (2,3,-1) \cdot (-1,-5,3) = -20$.
Nos queda entonces la ecuación $-x - 5y + 3z = -20$.
Este plano contiene a la recta $\mathbb{L}_1$ y es paralelo a $\mathbb{L}_2$. Sin embargo, no sabemos si contiene a la recta $\mathbb{L}_2$. Nos queda ver si se verifica iv):

$$-3 - 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = -12 \neq -20$$

Como no se verifica, el plano que encontramos no contiene a $\mathbb{L}_2$.
Como $(1,1,2)$ y $(-2,1,1)$ no son paralelos, el producto vectorial nos da un vector en la única dirección que es ortogonal a las dos rectas simultáneamente. Podemos cambiar el vector normal pero solo por múltiplos no nulos, lo que cambiará la ecuación pero no el plano.
Si en lugar de ii) usamos iv) para calcular d, obtenemos el plano $-x - 5y + 3z = -12$, paralelo al anterior, pero que no cumple ii). Este plano contiene a $\mathbb{L}_2$ y es paralelo a $\mathbb{L}_1$, pero no la contiene.
Estos son los únicos planos paralelos a las dos rectas que contienen a alguna de las dos rectas.

Respuesta: No existe un plano Π que contenga simultáneamente a $\mathbb{L}_1$ y a $\mathbb{L}_2$.

Observaciones

Las rectas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ no tienen puntos en común porque están incluidas en planos paralelos distintos. Además no son paralelas. Por lo tanto, son alabeadas.
En general, dado cualquier par de rectas alabeadas podemos construir dos planos paralelos (distintos), cada uno de los cuales contiene a una de las rectas, pero no existe un plano que las contenga a ambas simultáneamente.

Ejemplo 6. Para las rectas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ del ejemplo anterior, hallar ecuaciones implícitas de dos planos Π_1 y Π_2 que verifiquen simultáneamente: $\mathbb{L}_1 \subset \Pi_1$, $\mathbb{L}_2 \subset \Pi_2$ y $\Pi_1 \parallel \Pi_2$.

Solución: Π_1 y Π_2 son los planos que encontramos en la resolución del ejemplo anterior:
$\Pi_1 : -x - 5y + 3z = -20$ que contiene a $\mathbb{L}_1$.
$\Pi_2 : -x - 5y + 3z = -12$ que contiene a $\mathbb{L}_2$.
Estos planos son paralelos.

Respuesta: $\Pi_1 : -x - 5y + 3z = -20$ y $\Pi_2 : -x - 5y + 3z = -12$

Verificación:

$\mathbb{L}_1 \subset \Pi_1$:
$(1,1,2) \perp N$: $(1,1,2) \cdot (-1,-5,3) = 0$
$(2,3,-1) \in \Pi_1$: $-2 - 5 \cdot 3 + 3(-1) = -20$
$\mathbb{L}_2 \subset \Pi_2$:
$(-2,1,1) \perp N$: $(-2,1,1) \cdot (-1,-5,3) = 0$
$(3,3,2) \in \Pi_2$: $-3 - 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = -12$

$\Pi_1 \parallel \Pi_2$: Tienen la misma normal.

Ejemplo 7. Dadas las rectas $\mathbb{L}_1 : \lambda(1,3,-1) + (-2,1,4)$ y $\mathbb{L}_2 : \lambda(2,2,1) + (-4,3,0)$ hallar, si es posible, una ecuación implícita para un plano Π que las contenga.

Solución: Podemos ver que las rectas no son paralelas:
si existe $k \in \mathbb{R}$ que cumple $(1,3,-1) = k(2,2,1)$, tenemos que, para que valga la igualdad de las primeras coordenadas $k = \dfrac{1}{2}$ y, para la de las segundas, $k = \dfrac{3}{2}$.
Calculemos la intersección entre $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$. Buscamos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ que verifiquen simultáneamente:

$$\lambda(1,3,-1) + (-2,1,4) = \mu(2,2,1) + (-4,3,0)$$
$$(\lambda - 2, 3\lambda + 1, -\lambda + 4) = (2\mu - 4, 2\mu + 3, \mu)$$

Esto nos lleva a las tres ecuaciones

$$\lambda - 2 = 2\mu - 4\,, \quad 3\lambda + 1 = 2\mu + 3 \quad \text{y} \quad -\lambda + 4 = \mu$$

Reemplazamos la expresión de μ dada por la tercera ecuación en la primera:
$\lambda - 2 = 2(-\lambda + 4) - 4$, y despejamos $\lambda = 2$.
En la tercera ecuación queda entonces $\mu = -2 + 4 = 2$.
Sustituyendo los valores encontrados de λ y μ en la segunda ecuación $3 \cdot 2 + 1 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$ vemos que se verifican las tres simultáneamente.
La intersección entre $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ es el punto $Q = 2(1,3,-1) + (-2,1,4) = (0,7,2)$.
Veremos que esta intersección garantiza la existencia de un plano que contiene a las dos rectas.
Para hallar la normal de Π podemos usar los vectores directores de $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$, como en los ejemplos anteriores (N debe ser ortogonal a las direcciones de ambas rectas):

$N = (1,3,-1) \times (2,2,1) = (5,-3,-4)$

Verificación de la ortogonalidad del producto vectorial:
$(1,3,-1) \cdot (5,-3,-4) = 0$ y $(2,2,1) \cdot (5,-3,-4) = 0$.

Con el punto $(0,7,2)$ de $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ obtenemos $d = (0,7,2) \cdot (5,-3,-4) = -29$
Nos queda la ecuación $5x - 3y - 4z = -29$.
El punto de intersección de las rectas garantiza que el plano encontrado contiene a las dos rectas porque es paralelo a las dos y contiene un punto que pertenece a ambas.

$\boxed{\text{Respuesta: } \Pi : 5x - 3y - 4z = -29.}$

Verificación:

$\mathbb{L}_1 \subset \Pi$:
$(1,3,-1) \perp N$: $\quad (1,3,-1) \cdot (5,-3,-4) = 0$
$(-2,1,4) \in \Pi$: $\quad 5(-2) - 3 \cdot 1 - 4 \cdot 4 = -29$
$\mathbb{L}_2 \subset \Pi$:
$(2,2,1) \perp N$: $\quad (2,2,1) \cdot (5,-3,-4) = 0$
$(-4,3,0) \in \Pi$: $\quad 5(-4) - 3 \cdot 3 - 4 \cdot 0 = -29$

Ejemplo 8. Dadas las rectas $\mathbb{L}_1 : \lambda(1,1,-1) + (0,1,-2)$ y $\mathbb{L}_2 : \lambda(-2,-2,2) + (3,3,1)$, hallar, si es posible, un plano Π que las contenga.

Solución: Observar que las rectas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ son paralelas, ya que $(-2,-2,2) = (-2)(1,1,-1)$, así que un plano paralelo a una, será también paralelo a la otra.
Buscamos entonces un plano Π que contenga a una de las rectas y que pase por un punto de la otra.
Si tomamos dos puntos de $\mathbb{L}_1$, por ejemplo $A = (0,1,-2)$ y $B = 1(1,1,-1) + (0,1,-2) = (1,2,-3)$, más un punto de $\mathbb{L}_2$, por ejemplo $C = (3,3,1)$, podemos obtener Π como el plano que pasa por los tres puntos.

$$\begin{aligned} N = (B-A) \times (C-A) &= ((1,2,-3) - (0,1,-2)) \times ((3,3,1) - (0,1,-2)) \\ &= (1,1,-1) \times (3,2,3) = (5,-6,-1) \end{aligned}$$

Verificación de la ortogonalidad del producto vectorial:
$(1,1,-1) \cdot (5,-6,-1) = 0$ y $(3,2,3) \cdot (5,-6,-1) = 0$.

Con A calculamos $d = (0,1,-2) \cdot (5,-6,-1) = -4$

$\boxed{\text{Respuesta: } \Pi : 5x - 6y - z = -4.}$

Verificación:

$\mathbb{L}_1 \subset \Pi$:
$(1,1,-1) \perp N$: $(1,1,-1) \cdot (5,-6,-1) = 0$
$(0,1,-2) \in \Pi$: $5 \cdot 0 - 6 \cdot 1 - (-2) = -4$
$\mathbb{L}_2 \subset \Pi$:
$(-2,-2,2) \perp N$: $(-2,-2,2) \cdot (5,-6,-1) = 0$
$(3,3,1) \in \Pi$: $5 \cdot 3 - 6 \cdot 3 - 1 = -4$

Observación

Los ejemplos anteriores ilustran la siguiente propiedad:

Dadas dos rectas, existe un plano que las contiene, si y solo si, las rectas se cortan o son paralelas.

1.10 Distancia de un punto a un plano

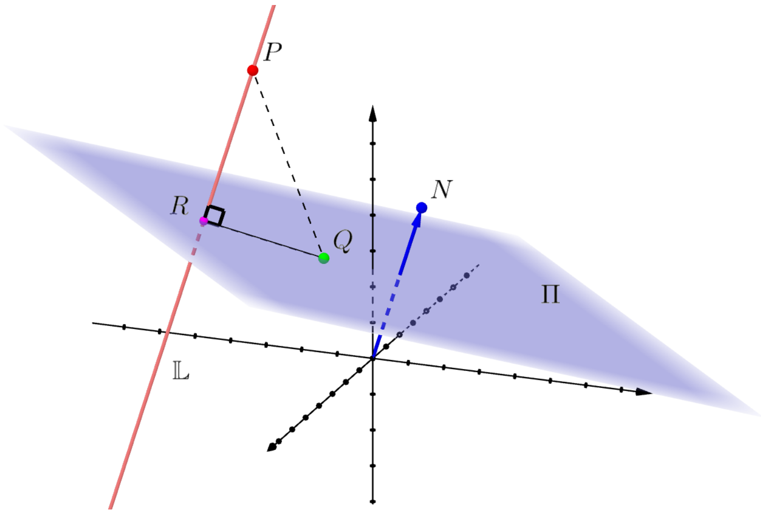
Recordemos que para medir distancias entre puntos utilizamos la norma con la fórmula:

$$d(A,B) = \|B - A\|.$$

Dados un punto $P \in \mathbb{R}^3$ y un plano Π definimos la distancia entre ellos, $d(P,\Pi)$, como la que hay entre el punto P y el punto de Π más cercano a P.

Ejemplo 1. Dados $P = (1, -3, 8)$ y $\Pi : -x + y + 4z = 10$, hallar el punto de Π más cercano a P y calcular la distancia entre P y Π.

Solución: En el gráfico podemos ver que el punto R que buscamos está sobre la recta $\mathbb{L}$ perpendicular a Π que pasa por P. Efectivamente, si tomamos otro punto Q en el plano, el segmento que mide su distancia a P es la hipotenusa del triángulo rectángulo PRQ y por lo tanto su longitud es mayor que la del cateto $\overline{RP}$.



Para hallar R buscamos la intersección de la recta $\mathbb{L}$ con el plano Π.
En primer lugar, hallamos una ecuación paramétrica de la recta $\mathbb{L}$.
Como vector director nos sirve el vector normal del plano y como punto de paso tenemos a P:

$$\mathbb{L} : \lambda(-1, 1, 4) + (1, -3, 8)$$

El punto que buscamos lo encontramos como $R \in \mathbb{L} \cap \Pi$.

Como R debe pertenecer a $\mathbb{L}$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$R = \lambda(-1, 1, 4) + (1, -3, 8) = (-\lambda + 1, \lambda - 3, 4\lambda + 8).$$

Reemplazando en la ecuación del plano obtenemos

$$-(-\lambda + 1) + (\lambda - 3) + 4(4\lambda + 8) = 10 \quad \Longleftrightarrow \quad 18\lambda + 28 = 10 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = -1$$

y, entonces, el punto que buscamos es $R = -1(-1, 1, 4) + (1, -3, 8) = (2, -4, 4)$.

Con este punto calculamos la distancia de P al plano Π

$$d(P, \Pi) = d(P, R) = \|(2, -4, 4) - (1, -3, 8)\| = \sqrt{18}$$

$\boxed{\text{Respuesta: El punto de } \Pi \text{ más cercano a } P \text{ es } R = (2, -4, 4) \text{ y la distancia de } P \text{ a } \Pi \text{ es } \sqrt{18}.}$

Fórmula para la distancia entre un punto y un plano

Si Π es el plano de vector normal $N = (a, b, c)$ que pasa por el punto Q, podemos calcular la distancia de un punto $P = (x_P, y_P, z_P)$ al plano Π, con el procedimiento visto en el ejemplo anterior:

i) Buscamos la recta $\mathbb{L}$ perpendicular a Π que pasa por P.

ii) Hallamos el punto R de la intersección entre $\mathbb{L}$ y Π.

iii) Calculamos $d(P, \Pi) = d(P, R)$.

i) La recta perpendicular al plano que pasa por P es $\mathbb{L} : \lambda N + P$.

ii) Para el punto R más cercano a P vale, como antes:

$$R = \lambda N + P \quad \text{para algún valor de } \lambda \in \mathbb{R}$$

y cumple la ecuación del plano Π:

$$(R - Q) \cdot N = 0$$

Reemplazando la expresión de R como punto de la recta $\mathbb{L}$ en la ecuación del plano

$$(\lambda N + P - Q) \cdot N = 0$$

podemos despejar λ:

$$\lambda N \cdot N + (P - Q) \cdot N = 0 \iff \lambda N \cdot N = (Q - P) \cdot N \iff \lambda = \frac{(Q - P) \cdot N}{N \cdot N}$$

Recordando que $N \cdot N = \|N\|^2$ tenemos

$$\lambda = \frac{(Q - P) \cdot N}{\|N\|^2}$$

y

$$R = \frac{(Q - P) \cdot N}{\|N\|^2} N + P \quad \text{o} \quad R = \frac{d - P \cdot N}{\|N\|^2} N + P \quad (\text{con } d = Q \cdot N)$$

iii) La distancia entre P y el plano Π queda expresada en términos de P, N y Q:

$$d(P, \Pi) = \|R - P\| = \left\| \left(\frac{(Q - P) \cdot N}{\|N\|^2} N + P \right) - P \right\| = \left\| \frac{(Q - P) \cdot N}{\|N\|^2} N \right\|$$

Podemos simplificar esta fórmula teniendo en cuenta que el cociente $\dfrac{(Q - P) \cdot N}{\|N\|^2}$ es un escalar y la norma de N es un número positivo:

$$d(P, \Pi) = \left| \frac{(Q - P) \cdot N}{\|N\|^2} \right| \|N\| = \frac{|(Q - P) \cdot N|}{\|N\|^2} \|N\| = \frac{|(Q - P) \cdot N|}{\|N\|}$$

$$d(P, \Pi) = \frac{|(Q - P) \cdot N|}{\|N\|}$$

que, en términos de las coordenadas de los vectores y con $d = Q \cdot N$, se puede expresar

$$d(P,\Pi) = \frac{|ax_P + by_P + cz_P - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Observación:

Al punto R del plano más cercano al punto P se lo denomina *proyección ortogonal* de P sobre el plano Π y se lo puede calcular con las fórmulas obtenidas en la deducción anterior:

$$R = \frac{(Q-P)\cdot N}{\|N\|^2}N + P \quad \text{o} \quad R = \frac{d - P\cdot N}{\|N\|^2}N + P \quad (\text{si } \Pi : ax+by+cz=d)$$

Si aplicamos estas fórmulas en el Ejemplo 1 obtenemos:

$$d((1,-3,8),\Pi) = \frac{|-1+(-3)+4\cdot 8-10|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+4^2}} = \frac{|18|}{\sqrt{18}} = \sqrt{18}$$

y

$$R = \frac{10-(1,-3,8)\cdot(-1,1,4)}{\|(-1,1,4)\|^2}(-1,1,4)+(1,-3,8) = \frac{10-28}{18}(-1,1,4)+(1,-3,8) = (2,-4,4).$$

Ejemplo 2. Hallar los puntos de la recta $\mathbb{L} : \lambda(-2,1,2)+(2,3,0)$ que están a distancia $\sqrt{6}$ del plano $\Pi : -x+2y+7z=2$.

Solución: Si P es un punto de la recta $\mathbb{L}$, debe cumplir

$$P = \lambda(-2,1,2)+(2,3,0) = (-2\lambda+2, \lambda+3, 2\lambda)$$

para algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$.
Usamos la fórmula para la distancia al plano

$$d(P,\Pi) = \frac{|-x_P+2y_P+7z_P-2|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+7^2}}$$

y reemplazamos las coordenadas de P para despejar los valores de λ que dan lugar a puntos de la recta que están a distancia $\sqrt{6}$ de Π:

$$d(P,\Pi) = \frac{|-(-2\lambda+2)+2(\lambda+3)+7(2\lambda)-2|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+7^2}} = \sqrt{6}$$

$$\frac{|2\lambda-2+2\lambda+6+14\lambda-2|}{\sqrt{54}} = \sqrt{6}$$

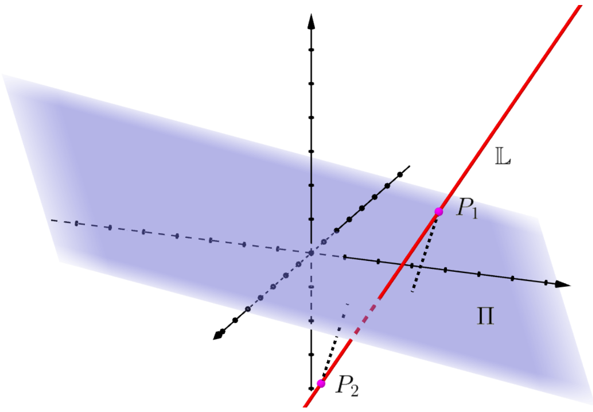
$$|18\lambda+2| = \sqrt{6}\sqrt{54} = 18$$

El módulo nos lleva a dos posibilidades:

i) $18\lambda_1 + 2 = 18$

ii) $18\lambda_2 + 2 = -18$

De i) se obtiene $\lambda_1 = \frac{8}{9}$ y de ii) $\lambda_2 = -\frac{10}{9}$, lo que nos da dos puntos en la recta:



$$P_1 = \frac{8}{9}(-2,1,2) + (2,3,0) = \left(\frac{2}{9}, \frac{35}{9}, \frac{16}{9}\right)$$
$$P_2 = -\frac{10}{9}(-2,1,2) + (2,3,0) = \left(\frac{38}{9}, \frac{17}{9}, -\frac{20}{9}\right)$$

Respuesta: Los puntos buscados son $P_1 = \left(\frac{2}{9}, \frac{35}{9}, \frac{16}{9}\right)$ y $P_2 = \left(\frac{38}{9}, \frac{17}{9}, -\frac{20}{9}\right)$.

Verificación:

$$d(P_1, \Pi) = \frac{\left|-\frac{2}{9} + 2\frac{35}{9} + 7\frac{16}{9} - 2\right|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 7^2}} = \frac{|18|}{\sqrt{54}} = \sqrt{6}$$
$$d(P_2, \Pi) = \frac{\left|-\frac{38}{9} + 2\frac{17}{9} + 7\left(-\frac{20}{9}\right) - 2\right|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 7^2}} = \frac{|-18|}{\sqrt{54}} = \sqrt{6}$$

Ejemplo 3. Hallar los puntos $P \in \mathbb{R}^3$ que están a distancia $\sqrt{6}$ del plano $\Pi : -x + 2y + 7z = 2$.

Solución: Si tomamos $P = (x, y, z)$, la condición de la distancia se cumple si se satisface la ecuación

$$d(P, \Pi) = \frac{|-x + 2y + 7z - 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 7^2}} = \sqrt{6}$$

que reagrupando nos conduce a

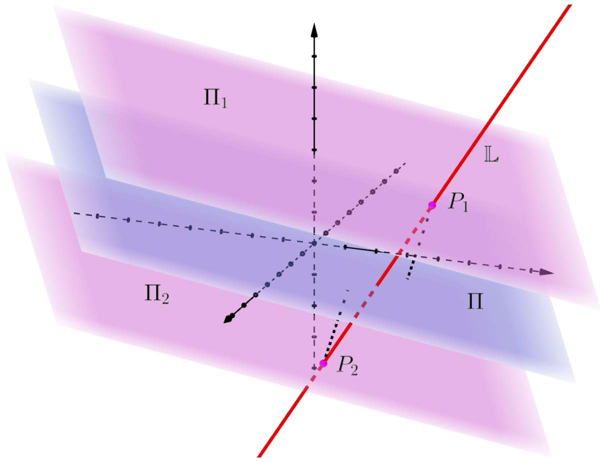
$$|-x+2y+7z-2| = \sqrt{6}\sqrt{54} = 18.$$

Esto equivale a que valga alguna de las dos igualdades siguientes:

i) $-x+2y+7z-2 = 18 \iff -x+2y+7z = 20$

ii) $-x+2y+7z-2 = -18 \iff -x+2y+7z = -16$

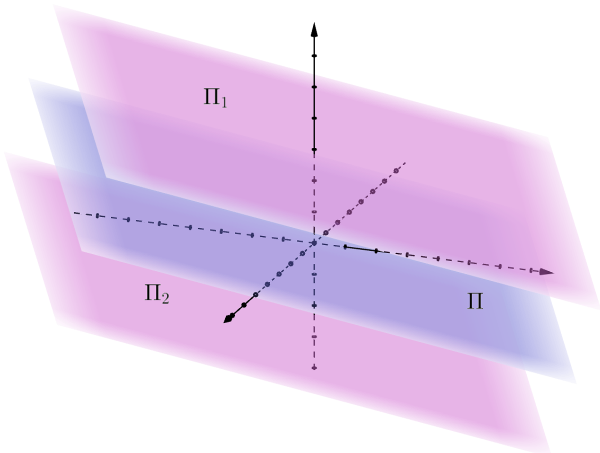
Cada una de estas ecuaciones describe un plano de soluciones.



Respuesta: Los puntos $P \in \mathbb{R}^3$ que están a distancia $\sqrt{6}$ del plano Π son los pertenecientes a los planos $\Pi_1 : -x+2y+7z = 20$ y $\Pi_2 : -x+2y+7z = -16$.

Observación:

En este problema, el plano Π y la distancia que buscamos son los mismos que en el Ejemplo 2. Los puntos P_1 y P_2 que encontramos en ese ejemplo pueden verse como las intersecciones entre los planos Π_1 y Π_2 con la recta $\mathbb{L}$.



Ejemplo 4. Si $\Pi_1 : y + 4z = 1$ y $\Pi_2 : -x + 10y + z = -21$, hallar todos los puntos $P \in \mathbb{R}^3$ que verifican: $2\, d(P, \Pi_1) = \sqrt{6}\, d(P, \Pi_2)$.

Solución: Si tomamos $P = (x, y, z)$, las fórmulas para la distancia de P a cada plano quedan:

$$d(P, \Pi_1) = \frac{|y + 4z - 1|}{\sqrt{1^2 + 4^2}}$$

$$d(P, \Pi_2) = \frac{|-x + 10y + z - (-21)|}{\sqrt{(-1)^2 + 10^2 + 1^2}}$$

Planteando la relación que buscamos entre las distancias nos queda la igualdad

$$2\frac{|y + 4z - 1|}{\sqrt{17}} = \sqrt{6}\frac{|-x + 10y + z - (-21)|}{\sqrt{102}} \iff \frac{2|y + 4z - 1|}{\sqrt{17}} = \frac{|-x + 10y + z + 21|}{\sqrt{17}}.$$

Simplificando llegamos a la igualdad

$$2|y + 4z - 1| = |-x + 10y + z + 21|.$$

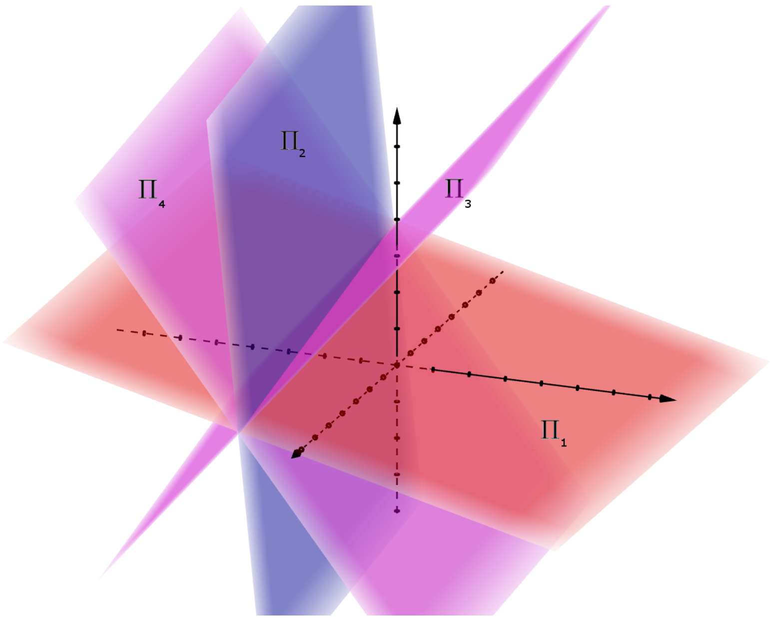
Esta igualdad equivale a que valga alguna de las dos igualdades siguientes:

i) $2(y + 4z - 1) = (-x + 10y + z + 21) \iff x - 8y + 7z = 23$

ii) $2(y + 4z - 1) = -(-x + 10y + z + 21) \iff -x + 12y + 9z = -19$

Cada una de estas ecuaciones representa un plano de soluciones.

Respuesta: Los puntos P que verifican la relación $2\, d(P, \Pi_1) = \sqrt{6}\, d(P, \Pi_2)$ son los de los planos $\Pi_3 : x - 8y + 7z = 23$ y $\Pi_4 : -x + 12y + 9z = -19$.



Ejemplo 5. Dados el plano $\Pi : 2x + 3y - 6z = 3$ y la recta $\mathbb{L} : \lambda(-1, 2, 3) + (2, 2, 0)$, hallar la ecuación paramétrica de una recta $\mathbb{L}'$ que cumpla simultáneamente:

$$\mathbb{L} \cap \mathbb{L}' \neq \emptyset \quad \text{y} \quad d(P, \Pi) = 2\ \forall P \in \mathbb{L}'.$$

Solución: Buscamos un vector director $\mathbf{v}$ y un punto de paso Q para $\mathbb{L}'$ que garanticen simultáneamente

$\mathbb{L} \cap \mathbb{L}' \neq \emptyset$:

i) Debe existir al menos un punto S que cumpla $S \in \mathbb{L}$ y $S \in \mathbb{L}'$.

y $d(P, \Pi) = 2 \quad \forall P \in \mathbb{L}'$:

Esta condición dice literalmente que la distancia al plano debe ser la misma para todos los puntos de $\mathbb{L}'$ y esto implica que $\mathbb{L}'$ debe ser paralela al plano Π.

ii) $\mathbb{L}' \parallel \Pi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{v} \perp (2, 3, -6)$

Además, el punto de paso Q tiene que cumplir

iii) $d(Q, \Pi) = 2$.

El punto S de i), por pertenecer a $\mathbb{L}'$, tiene que cumplir la condición de la distancia. Si tomamos $Q = S$ como punto de paso de la recta, se cumplirán simultáneamente las condiciones i) y iii). Calculemos entonces S como un punto de $\mathbb{L}$ a distancia 2 del plano Π.

Si $S \in \mathbb{L}$, debe cumplir $S = \lambda(-1, 2, 3) + (2, 2, 0) = (-\lambda + 2, 2\lambda + 2, 3\lambda)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Reemplazando en la fórmula de la distancia a Π

$$d(S, \Pi) = \frac{|2x_S + 3y_S - 6z_S - 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}}$$

podemos despejar λ

$$d(S, \Pi) = \frac{|2(-\lambda + 2) + 3(2\lambda + 2) - 6(3\lambda) - 3|}{7} = 2$$

$$|-14\lambda + 7| = 14$$

es decir,

$$-14\lambda + 7 = 14 \quad \text{o} \quad -14\lambda + 7 = -14.$$

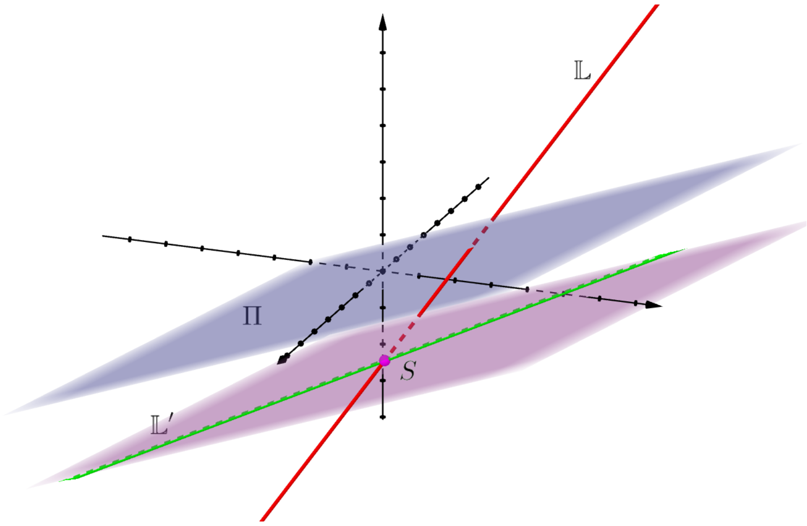
Tenemos dos soluciones: $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{3}{2}$.

Como el problema nos pide una sola recta podemos elegir cualquiera de los dos valores, por ejemplo con $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ obtenemos el punto

$$S = -\frac{1}{2}(-1, 2, 3) + (2, 2, 0) = \left(\frac{5}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right).$$

Nos queda la condición ii), que podemos hacer que se cumpla con cualquier vector ortogonal a $(2, 3, -6)$, por ejemplo, $(0, 2, 1)$.

Respuesta: Una recta $\mathbb{L}'$ que cumple lo pedido es $\mathbb{L}' : \lambda(0, 2, 1) + \left(\frac{5}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right)$.



Verificación:

$\mathbb{L} \cap \mathbb{L}' \neq \emptyset$:

$\left(\frac{5}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right) \in \mathbb{L}$: Se obtiene con $\lambda = -\frac{1}{2}$ en la ecuación paramétrica.

$\left(\frac{5}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right) \in \mathbb{L}'$: Lo usamos como punto de paso.

$d(P, \Pi) = 2 \quad \forall P \in \mathbb{L}'$:

$\mathbb{L}' \parallel \Pi : \quad (0, 2, 1) \cdot (2, 3, -6) = 0.$

$$d\left(\left(\frac{5}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right), \Pi\right) = \frac{\left|2\frac{5}{2} + 3 \cdot 1 - 6\left(-\frac{3}{2}\right) - 3\right|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}} = \frac{|5 + 3 + 9 - 3|}{7} = \frac{|14|}{7} = \frac{14}{7} = 2.$$