
Comentarios teóricos y ejemplos

Resolución de Ejercicios Surtidos de la Práctica 5

desde el Ejercicio 1 hasta el 11 inclusive

Sigo sugiriendo que estudien las siguientes teóricas de derivadas propuestas por la cátedra de Mate 51 :

.- Derivada y recta tangente.pdf

.- Reglas de derivacion.pdf

.- Regla de la cadena.pdf

.- Crecimiento y decrecimiento.pdf

.- Extremos locales.pdf

.- Estudio de funciones.pdf

+-+

EJERCICIOS SURTIDOS

Ejercicio 1.- Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x)=\frac{9}{x^2}-\frac{3}{x}$ en el punto de abscisa $x=3$.

Ej Surt 1

ecuación de la recta tangente al gráfico de f en x_0
(pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$)

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$f(x) = \frac{9}{x^2} - \frac{3}{x}$ $\qquad\qquad$ $x_0 = 3$

Calculemos $f'(x)$ y evaluemos en $x_0 = 3$

$$f'(x) = \left[\frac{9}{x^2} - \frac{3}{x}\right]' = \left[9x^{-2} - 3x^{-1}\right]' =$$

$$9\left[x^{-2}\right]' - 3\left[x^{-1}\right]' = 9(-2)x^{-3} - 3(-1)x^{-2} \qquad \Longrightarrow \qquad f'(2) = \frac{3}{2}2^2 = \frac{3}{2}\cdot 4 = 6$$

$$f'(x) = -\frac{18}{x^3} + \frac{3}{x^2}$$

$$\Longrightarrow \quad f'(3) = -\frac{18}{3^3} + \frac{3}{3^2} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

y como $f(3) = \frac{9}{3^2} - \frac{3}{3} = 1 - 1 = 0$

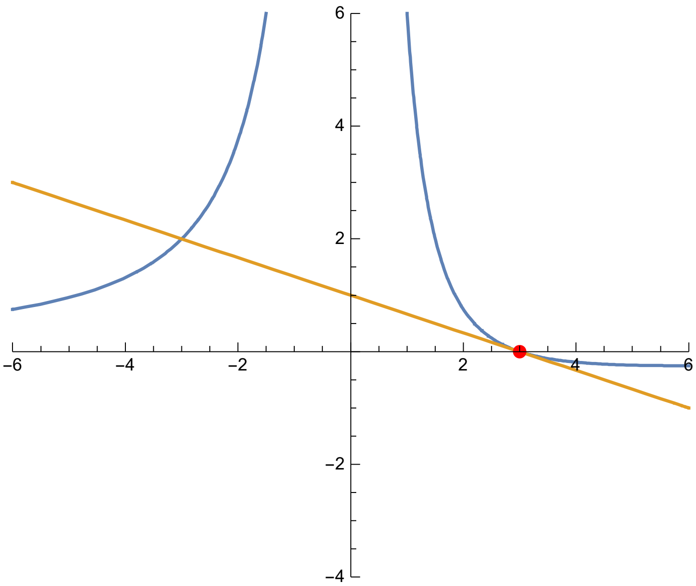
Obtenemos la ecuación de la recta tangente a f en $(x_0, f(x_0)) = (3, 0)$ **:**

$$y = f'(3)(x-3) + f(3) = -\frac{1}{3}(x-3) + 0 = -\frac{1}{3}x + 1$$

ecuación de la recta tangente a $f(x) = \frac{9}{x^2} - \frac{3}{x}$ **en** $x_0 = 3$ **es :**

$$y = -\frac{1}{3}x + 1$$

Gráfico : color azul : $f(x) = \frac{9}{x^2} - \frac{3}{x}$ **; color naranja :** $y = -\frac{1}{3}x + 1$



+-+

Ejercicio 2.- Sea $f(x) = 3\ln(ax-1) - 2$. Hallar el valor de a para que la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto de abscisa $x = 1$ sea 6. Dar la ecuación de la recta tangente.

Ej Surt 2

$f(x) = 3\ln(ax-1) - 2$ $\qquad\qquad x_0 = 1$

Hallar a para que $f'(1) = 6$ **y encontrar la ecuación de la recta tg**

Cálculo del Dom (f) :

Debido al logaritmo deberá ser $ax - 1 > 0 \implies ax > 1 \implies x > \frac{1}{a}$

a deberá ser distinto de 0 , $a \neq 0$

$$\text{Dom}(f) = \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$$

Calculemos $f'(x)$ **:**

$f'(x) = \left[3\ln(ax - 1) - 2\right]' = 3 \cdot \left[\ln(ax - 1)\right]' - [2]' =$

$= 3 \cdot \frac{1}{ax - 1} a - 0 = \frac{3a}{ax - 1}$

$f'(x) = \frac{3a}{ax - 1}$ $\quad a \neq 0$, $\text{Dom}(f') = \text{Dom}(f) = \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$

Para que la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto

de abscisa $x_0 = 1$ **sea 6, deberá ser** $f'(1) = 6$

Planteamos $f'(1) = 6$

$f'(1) = \frac{3a}{a \cdot 1 - 1} = \frac{3a}{a - 1} = 6 \implies 3a = 6(a - 1) \implies 3a = 6a - 6$

$\implies 3a = 6 \implies \mathbf{a = 2}$

----

hallemos la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en x_0
(pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$**)**

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

reemplzando $a = 2$ **en** $f(x)$ **y evaluando en** $x_0 = 1$ **:**

$f(1) = 3\ln(2 \cdot 1 - 1) - 2 = 3\ln(2 - 1) - 2 = 3\ln(1) - 2$

y como $\ln(1) = 0$

$f(1) = 3 \cdot 0 - 2 = -2$

Entonces $(x_0, f(x_0)) = (1, f(1)) = (1, -2)$

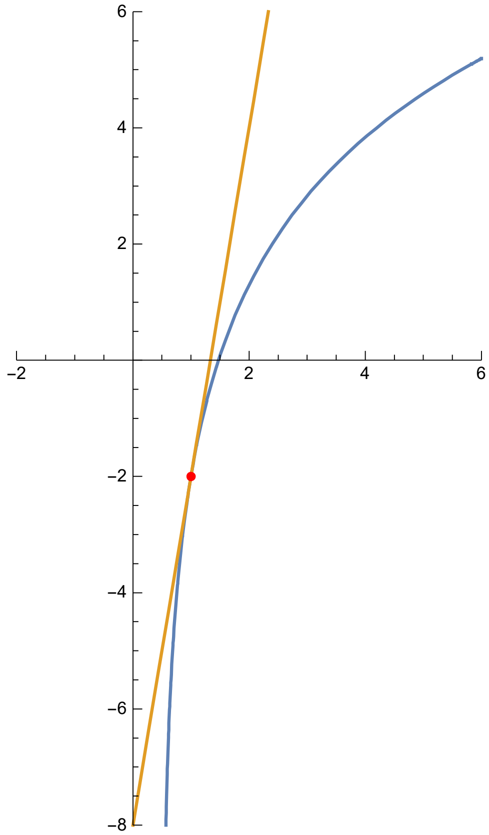
la ecuación de la recta tangente en $x_0 = 1$ **es :**

$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 6(x - 1) - 2 = 6x - 6 - 2 = 6x - 8$

ecuación de la recta tangente a $f(x) = 3\ln(2x - 1) - 2$
en $x_0 = 1$ **es :**

$$y = 6x - 8$$

Gráfico : color azul : $f(x) = 3\ln(2x-1) - 2$; color naranja : $y = 6x - 8$



+-+

Ejercicio 3.- Sea $f(x)=x^3-6x^2-10x+1$. Hallar el punto del gráfico de f en el que la recta tangente tiene ecuación $y=5x+9$.

Ej Surt 3

$f(x) = x^3 - 6x^2 - 10x + 1$

Hallar P ∈ gráf (f) que tiene como recta tangente a $y = 5x + 9$

Como la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en x_0
(pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$) es :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

comparando con $y = 5x + 9$, tendrá que ser $f'(x_0) = 5$

Calculemos $f'(x)$:

$f'(x) = \left[x^3 - 6x^2 - 10x + 1\right]' = 3x^2 - 12x - 10$

Planteamos $f'(x) = 5$

$f'(x) = 3x^2 - 12x - 10 = 5 \implies 3x^2 - 12x - 15 = 0 \implies 3\left(x^2 - 4x - 5\right) = 0$

resolvemos la ecuación cuadrática $x^2 - 4x - 5 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} \implies x_1 = \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad ó \quad x_2 = \frac{4-6}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

$\implies x_1 = 5 \quad ó \quad x_2 = -1$

Hemos obtenido dos valores de x, $x_1 = 5$ ó $x_2 = -1$ **para los cuales**

la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ **es 5**

$x_1 = 5$ ó $x_2 = -1$ **son las abscisas de los puntos** P_1 **y** P_2

calculemos las ordenadas de P_1 **y** P_2 **evaluando**
en $f(x) = x^3 - 6x^2 - 10x + 1$

$y_1 = f(x_1) = f(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 - 10 \cdot 5 + 1 = 125 - 6 \cdot 25 - 50 + 1 = -74$

entonces $P_1 = (5, 74)$

Ahora con $x_2 = -1$

$y_2 = f(x_2) = f(-1) = (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 - 10 \cdot (-1) + 1 = -1 - 6 + 10 + 1 = 4$

entonces $P_2 = (-1, 4)$

Veamos cuá de estos dos puntos $P_1 = (5, 74)$ **y** $P_2 = (-1, 4)$ **tiene como**

recta tangente a $y = 5x + 9$

el que verifique la ecuación $y = 5x + 9$ **será el punto buscado**

evaluemos $P_1 = (5, -74)$ **en** $y = 5x + 9$:

$y = 5(5) + 9 = 25 + 9 = 34$

entonces $P_1 = (5, 74)$ **no pertence a la recta tangente** $y = 5x + 9$

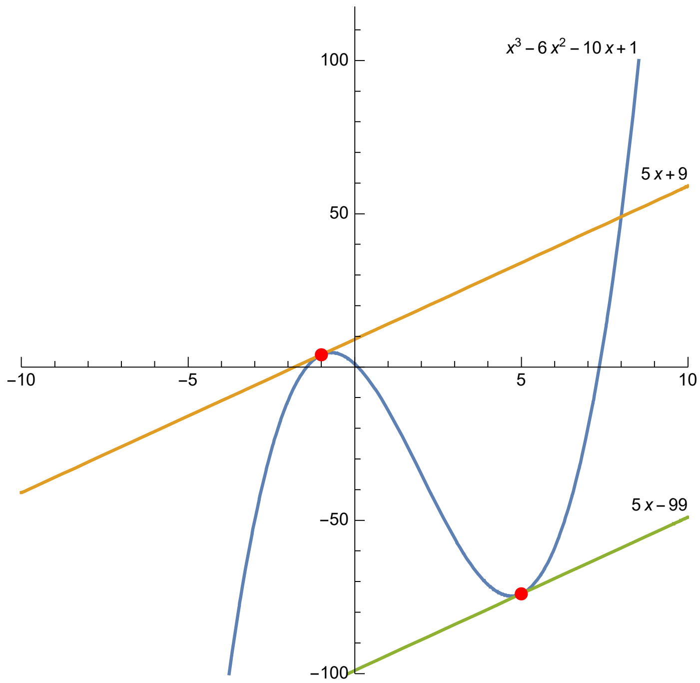
Veamos con $P_2 = (-1, 4)$:

$y = 5(-1) + 9 = -5 + 9 = 4$

$\implies P_2 = (-1, 4)$ **pertenece a la recta tangente** $y = 5x + 9$

Finalmente es el punto $P_2 = (-1, 4)$ el que tiene
como recta tangente a $f(x) = x^3 - 6x^2 - 10x + 1$
la recta $y = 5x + 9$

Gráfico : color azul : $f(x) = x^3 - 6x^2 - 10x + 1$; color naranja : $y = 5x + 9$



+-+

Ejercicio 4.- Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de

$f(x) = 3 + \dfrac{\ln(x-4)}{-x^2 + 10x - 24}$ en el punto $(5, f(5))$.

Ej Surt 4

$$f(x) = 3 + \frac{\ln(x-4)}{-x^2 + 10x - 24}$$

Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $(5, f(5))$

----

ecuación de la recta tangente al gráfico de f en x_0
(pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ es :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$x_0 = 5 \implies f(5) = 3 + \dfrac{\ln(5-4)}{-5^2 + 10 \cdot 5 - 24} = 3 + \dfrac{\ln(1)}{-5^2 + 10 \cdot 5 - 24}$

y como $\ln(1) = 0$

$f(5) = 3 + \dfrac{0}{-25 + 50 - 24} = 3 + \dfrac{0}{1} = 3 \quad (*)$

el punto $P = (5, f(5)) = (5, 3)$

Calculemos f' (x) para hallar f' (5) :

$$f'(x) = \left[3 + \frac{\ln(x-4)}{-x^2+10x-24}\right]' = [3]' + \left[-\frac{\ln(x-4)}{x^2-10x+24}\right]' = 0 - \left[\frac{\ln(x-4)}{x^2-10x+24}\right]'$$

$$f'(x) = (-1)\left(\left([\ln(x-4)]' \cdot (x^2-10x+24) - \ln(x-4)\cdot[x^2-10x+24]'\right) \Big/ (x^2-10x+24)^2\right)$$

$$f'(x) = (-1)\left\{\frac{\frac{1}{x-4}\cdot(x^2-10x+24) - \ln(x-4)\cdot(2x-10)}{(x^2-10x+24)^2}\right\}$$

$$f'(x) = (-1)\left\{\frac{x^2-10x+24 - \ln(x-4)\cdot(x-4)\cdot(2x-10)}{(x-4)\,(x^2-10x+24)^2}\right\} = \quad (*)$$

----

como $x^2 - 10x + 24 = x^2 - 10x + 24 + 1 - 1 = x^2 - 10x + 25 - 1 = (x-5)^2 - 1 =$

$= ((x-5)-1)\,((x-5)+1) = (x-6)\,(x-4) = x^2 - 10x + 24$

----

reemplazando en (*)

$$f'(x) = (-1)\left\{\frac{(x-6)\,(x-4) - \ln(x-4)\cdot(x-4)\cdot 2\,(x-5)}{(x-4)\,((x-6)\,(x-4))^2}\right\} \Rightarrow$$

$$f'(x) = (-1)\,\frac{(x-4)}{(x-4)}\left\{\frac{(x-6) - \ln(x-4)\cdot 2\,(x-5)}{((x-6)\,(x-4))^2}\right\} \Rightarrow$$

$$f'(x) = (-1)\left\{\frac{(x-6) - \ln(x-4)\cdot 2\,(x-5)}{((x-6)\,(x-4))^2}\right\} = \frac{(6-x) + \ln(x-4)\cdot 2\,(x-5)}{((x-6)\,(x-4))^2}$$

$$f'(x) = \frac{(6-x) + \ln(x-4)\cdot 2\,(x-5)}{((x-6)\,(x-4))^2}$$

Obtengmos f' (5) :

$$f'(5) = \frac{(6-5) + \ln(5-4)\cdot 2\,(5-5)}{((5-6)\cdot(5-4))^2} = \frac{1 + \ln(1)\cdot 2\,(0)}{((-1)\cdot(1))^2} = \frac{1 + 0\cdot 0}{((-1))^2} = \frac{1}{1} = 1$$

entonces $f'(5) = 1$

Como $f(5) = 3 \quad (*)$

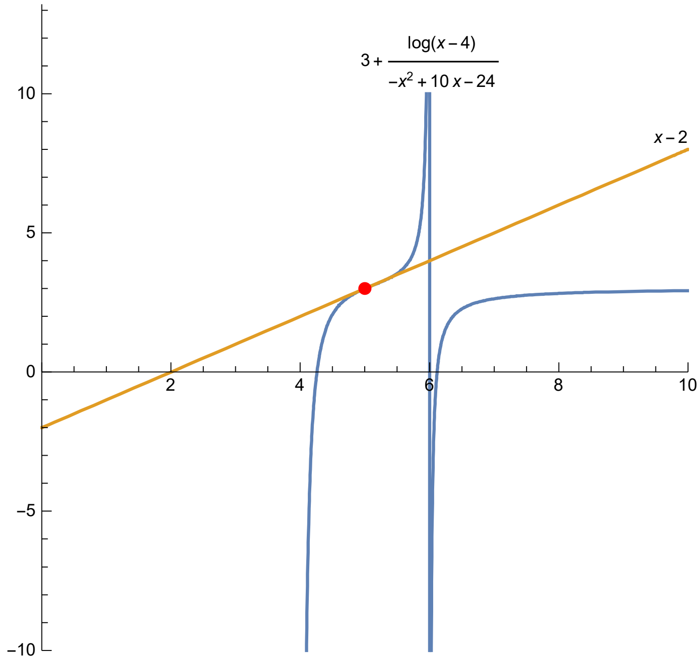
La ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $(5, f(5)) = (5, 3)$ **es :**

$y = f'(5)\,(x-5) + f(5) = 1\,(x-5) + 3 = x - 5 + 3 = x - 2$

recta tangente al gráfico de f en (5, f (5)) = (5, 3) es

$y = x - 2$

Gráfico : color azul : $f(x) = 3 + \dfrac{\ln(x-4)}{-x^2 + 10x - 24}$; color naranja : $y = x - 2$



+-+

Ejercicio 5.- Hallar todos los puntos del gráfico de $f(x) = x^3 - 12x^2 - 17x + 1$ en los que la pendiente de la recta tangente es 10.

Ej Surt 5

$f(x) = x^3 - 12x^2 - 17x + 1$

Hallar los puntos P del gráfico de f en los que la pendiente de las rectas tangentes son iguales a 10 $(f'(x_P) = 10)$

Calculemos $f'(x)$ e igualemos a 10 para obtener las abscisas de los P

$f'(x) = \left[x^3 - 12x^2 - 17x + 1\right]' = 3x^2 - 24x - 17$

como las pendientes de las rectas tangentes que buscamos deben ser = 10

$f'(x) = 10 \implies 3x^2 - 24x - 17 = 10 \implies 3x^2 - 24x - 27 = 0$

$\implies 3\left(x^2 - 8x - 9\right) = 0 \implies x^2 - 8x - 9 = 0$

resolvemos la ecuación cuadrática $x^2 - 8x - 9 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2} \implies x_1 = \frac{8+10}{2} = \frac{18}{2} = 9 \quad ó \quad x_2 = \frac{8-10}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$\Longrightarrow\ x_1 = 9$ ó $x_2 = -1$

son las abscisas de los puntos P en donde las pendientes de las rectas tangentes a f (x) son iguales a 10

calculemos las ordenadas de los 2 puntos P para $f(x) = x^3 - 12x^2 - 17x + 1$ **:**

$y_1 = f(9) = 9^3 - 12 \cdot 9^2 - 17 \cdot 9 + 1 = 729 - 12 \cdot 81 - 153 + 1$

$y_1 = 729 - 972 - 153 + 1 = -395$

Entonces $P_1 = (9, -395)$

Ahora con $x_2 = -1$ **:**

$y_2 = f(-1) = (-1)^3 - 12 \cdot (-1)^2 - 17 \cdot (-1) + 1 = -1 - 12 \cdot 1 + 17 + 1 = 5$

Entonces $P_2 = (-1, 5)$

Por lo tanto $P_1 = (9, -395)$ **y** $P_2 = (-1, 5)$ **son puntos de** $f(x) = x^3 - 12x^2 - 17x + 1$

en donde las rectas tangentes a f (x) en esos puntos tienen pendiente 10

Calculemos las ecuaciones de las rectas tangentes a f (x) en P_1 **y** P_2

----

ecuación de la recta tangente al gráfico de f en x_0
(pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ **) es :**

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Con $P_1 = (9, -395) = (9, f(9))$ **y** $f'(9) = 10$

$y = f'(9)(x - 9) + f(9) = 10(x - 9) - 395 = 10x - 90 - 395 = 10x - 485$

$$y = 10x - 485$$

es la ecuación de la recta tangente a f (x) en $P_1 = (9, -395)$

Con $P_2 = (-1, 5) = (-1, f(-1))$ **y** $f'(-1) = 10$

$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1) = 10(x + 1) + 5 = 10x + 10 + 5 = 10x + 15$

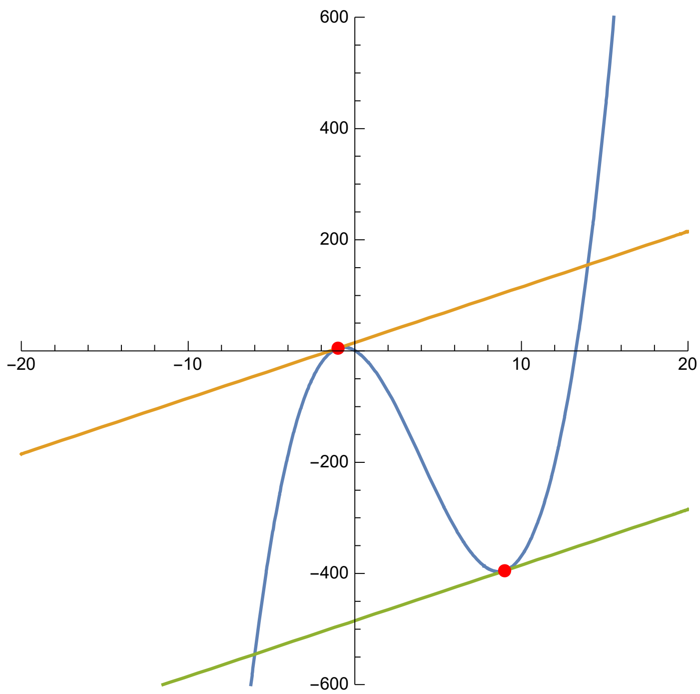
$$y = 10x + 15$$

es la ecuación de la recta tangente a f (x) en $P_2 = (-1, 5)$

Gráfico : color azul : $f(x) = x^3 - 12x^2 - 17x + 1$

color naranja : $y = 10x + 15$

color verde : $y = 10x - 485$



+-+

Ejercicio 6.- Sea $f(x) = \ln(x^2 + 81)$. Hallar el punto del gráfico de f en el que la pendiente de la recta tangente es $\frac{1}{9}$.

Ej Surt 6

$f(x) = \ln(x^2 + 81)$

Hallar el punto P del gráfico de f en el que la pendiente de la recta tangente es $\frac{1}{9}$ $\left(f'(x_P) = \frac{1}{9}\right)$

Calculamos $f'(x)$ igualamos a $\frac{1}{9}$ para obtener la abscisa del punto P

$$f'(x) = \left[\ln\left(x^2 + 81\right)\right]' = \frac{1}{x^2 + 81} \cdot \left[x^2 + 81\right]' = \frac{1}{x^2 + 81} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 81}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 81}$$

Igualamos a $\frac{1}{9}$:

$f'(x) = \frac{1}{9} \Longrightarrow \frac{2x}{x^2 + 81} = \frac{1}{9} \Longrightarrow 2x \cdot 9 = x^2 + 81 \Longrightarrow 0 = x^2 - 18x + 81$

como $x^2 - 18x + 81$ es binomio al cuadrado :

$\Longrightarrow (x - 9)^2 = 0 \Longrightarrow (x - 9) = 0 \Longrightarrow x = 9$

Entonces x = 9 es la abscisa del punto P para el que la pendiente de la recta tangente es $\frac{1}{9}$

Calculemos la ordenada del punto P :

$y = f(9) = \ln(9^2 + 81) = \ln(9^2 + 9^2) = \ln(2 \cdot 9^2) = \ln(2) + \ln(9^2) \Longrightarrow$

$y = \ln(2) + 2\ln(9)$

el punto $P = (9, f(9)) = (9, \ln(2) + 2\ln(9))$

$P = (9, \ln(2) + 2\ln(9))$

Calculemos la ecuación de la recta tangente a f (x) en $P = (9, \ln(2) + 2\ln(9))$

con $f'(9) = \frac{1}{9}$ y $f(9) = \ln(2) + 2\ln(9)$

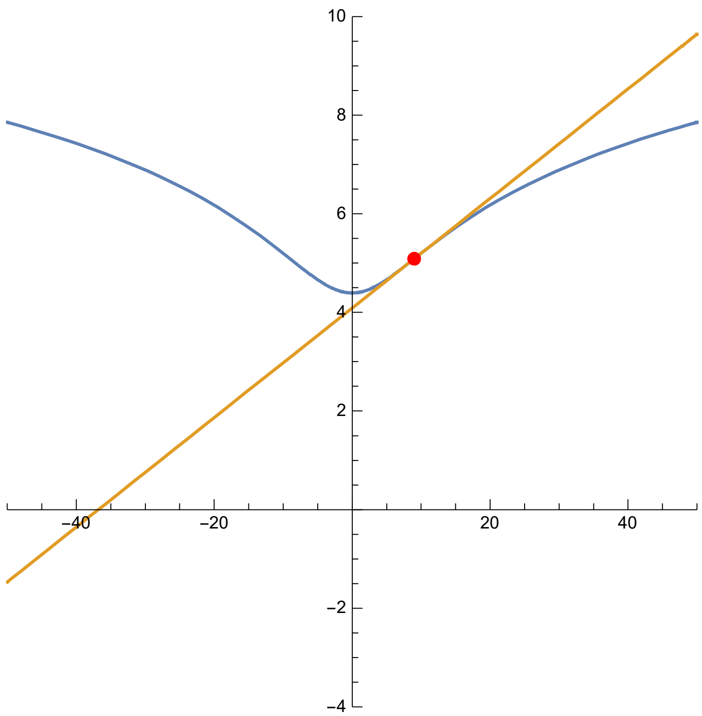
ecuación de la recta tangente :

$y = f'(9)(x - 9) + f(9) = \frac{1}{9}(x - 9) + \ln(2) + 2\ln(9) = \frac{1}{9}x - 1 + \ln(2) + 2\ln(9)$

$y = \frac{1}{9}x - 1 + \ln(2) + 2\ln(9)$

Gráfico : color azul : $f(x) = \ln(x^2 + 81)$

color naranja : $y = \frac{1}{9}x - 1 + \ln(2) + 2\ln(9)$



+-+

Ejercicio 7.- Sea $f(x)=\frac{8}{x}$. Hallar el punto del gráfico de f en el que la recta tangente tiene ecuación $y=-\frac{1}{2}x-4$.

Ej Surt 7

$f(x) = \frac{8}{x}$

Hallar el punto P del gráfico de f (x) en el que la recta tangente

tiene ecuación $y = -\frac{1}{2}x - 4$

como la ecuación de la recta tangente en $(x_0, f(x_0))$ es :

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

comparando, deberá ser :

$f'(x) = -\frac{1}{2}$

Calculemos $f'(x)$ e igualemos a $-\frac{1}{2}$:

$f'(x) = \left[\frac{8}{x}\right]' = \left[8\, x^{-1}\right]' = 8\left[x^{-1}\right]' = 8\,(-1)\, x^{-2} = -\frac{8}{x^2}$

$f'(x) = -\frac{8}{x^2}$

Igualamos a $-\frac{1}{2}$ para obtener las abscisas de los puntos P

$f'(x) = -\frac{1}{2} \Longrightarrow -\frac{8}{x^2} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow x^2 = 16 \Longrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{16} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow |x| = 4 \Longrightarrow x = 4$ ó $x = -4$

Tenemos dos abscisas entonces dos puntos P
calculemos las ordenadas de los puntos

$y_1 = f(x_1) = f(4) = \frac{8}{4} = 2 \Longrightarrow P_1 = (4, 2)$

con la otra abscisa $x = -4$:

$y_2 = f(x_2) = f(-4) = \frac{8}{(-4)} = -2 \Longrightarrow P_2 = (-4, -2)$

Hasta el momento P_1 y P_2 son puntos de $f(x)$ para los que la pendiente de la recta tangente en ellos es $-\frac{1}{2}$

Veamos cuáles de los puntos P_1 y P_2 tienen como ecuación de la recta tangente a $y = -\frac{1}{2}x - 4$

verifiquemos si $P_1 = (4, 2) \in y = -\frac{1}{2}x - 4$:

$y = -\frac{1}{2} \cdot 4 - 4 = -2 - 4 = -6$ (debería haber dado 2)

$\Longrightarrow$ P_1 no satisface la ecuación $y = -\frac{1}{2}x - 4$

verifiquemos si $P_2 = (-4, -2) \in y = -\frac{1}{2}x - 4$:

$y = -\frac{1}{2} \cdot (-4) - 4 = 2 - 4 = -2$ (sí satisface la ecuación pues da -2)

Por lo tanto $P_2 = (-4, -2)$ es el punto de $f(x)$ que tiene a $y = -\frac{1}{2}x - 4$ como ecuación de recta tangente a $f(x)$

Gráfico : color azul : $f(x) = \frac{8}{x}$

color naranja : $y = -\frac{1}{2}x - 4$

color verde : $y = -\frac{1}{2}x + 4$

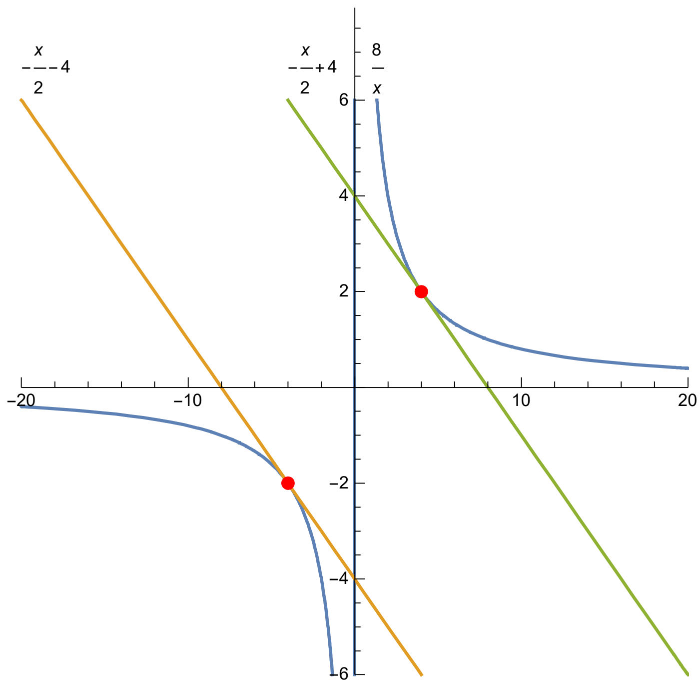
```
tablapuntoSurt7 = {{-4, -2}, {4, 2}};

graficopuntoSurt7 =
  ListPlot[tablapuntoSurt7, PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], PointSize[0.02]}];
  representación de lista       estilo de represe·· color RGB     tamaño de punto

graficoSurt7 = Plot[{8/x, -1/2 x - 4, -1/2 x + 4}, {x, -20, 20},
               representación gráfica

  PlotRange → {{-20, 20}, {-6, 6}}, AspectRatio → 1, PlotLabels → Placed[Automatic, Above]]
  rango de representación          cociente de aspecto  etiquetas de rep··· colocado automático encima

Show[graficoSurt7, graficopuntoSurt7]
muestra
```



+-+

Ejercicio 8.- Sea $f(x)$ tal que $y = 5x - 4$ es la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $(1, f(1))$. Si $g(x) = (x^3 - 6x) f(x)$, calcular $g'(1)$.

Ej Surt 8

f (x) es una función tal que y = 5 x - 4 es la ecuación de la recta tangente al gráfico de f (x) en el punto $(1, f(1))$

Si $g(x) = (x^3 - 6x) \cdot f(x)$ se pide calcular $g'(1)$

Como $y = 5x - 4$ es la ecuación de la recta tangente a f (x) en $(1, f(1))$

entonces $f'(1) = 5$ (*)

Este resultado surge de comparar con la ecuación de la recta tangente

al gráfico de f en x_0 (pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Calculemos $g'(x)$ para luego evaluar en x = 1

$$g'(x) = \left[(x^3 - 6x) \cdot f(x)\right]' = \left[(x^3 - 6x)\right]' \cdot f(x) + (x^3 - 6x) \cdot [f(x)]'$$

$$g'(x) = (3x^2 - 6) \cdot f(x) + (x^3 - 6x) \cdot f'(x)$$

Evaluando en x = 1 :

$$g'(1) = (3 \cdot 1^2 - 6) \cdot f(1) + (1^3 - 6 \cdot 1) \cdot f'(1) = (3 - 6) \cdot f(1) + (-5) \cdot f'(1)$$

$$g'(1) = (-3) \cdot f(1) + (-5) \cdot f'(1) \quad (**)$$

Observemos que podemos obtener $f(1)$ a partir de la recta tangente $y = 5x - 4$ evaluando en x = 1 porque el punto de tangencia pertenece tanto a f (x) como a la recta tangente

$\Longrightarrow$ $y = 5 \cdot 1 - 4 = 5 - 4 = 1$ **es** $f(1) = 1$

$f(1) = 1$

Y teníamos que por (*) $f'(1) = 5$

reemplazando en (**) :

$$g'(1) = (-3) \cdot 1 + (-5) \cdot 5 = -3 - 25 = -28$$

Por lo tanto :

$$g'(1) = -28$$

+-+

Ejercicio 9.- Hallar el dominio, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los extremos locales y las asíntotas verticales y horizontales. Hacer un gráfico.

a. $f(x)=x^5(x-7)$ **b.** $f(x)=2x+7+\dfrac{9}{2x-1}$

c. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$ **d.** $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x+9}}$

e. $f(x)=e^{x^3-3x^2}$ **f.** $f(x)=2x-6\ln(x)$

g. $f(x)=3x^2e^{x/3}$ **h.** $f(x)=1+\dfrac{12}{x^2-4x}$

Hallar Dom (f), $I^{\uparrow}$ (f) e $I^{\downarrow}$ (f), extremos locales, AV y AH y graficar

Ej Surt 9 a)

$f(x) = x^5 (x - 7)$

Dom (f) = $\mathbb{R}$

Analicemos f (x) a partir de su derivada f' (x)

Calculemos f' (x) :

$f'(x) = \left[x^5 (x - 7)\right]' = \left[x^5\right]' \cdot (x - 7) + x^5 \cdot [(x - 7)]'$

$f'(x) = 5x^4 \cdot (x - 7) + x^5 \cdot 1 = x^4 (5 (x - 7) + x) = x^4 \left(5x - 35 + x\right)$

$f'(x) = x^4 \left(6x - 35\right)$

$f'(x) = x^4 (6x - 35)$

Buscamos los puntos críticos de f (x) para los que f' (x) = 0 :

$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^4 \left(6x - 35\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^4 = 0 \quad ó \quad 6x - 35 = 0$

$\Longrightarrow \quad x = 0$ **(es raíz cuádruple)** ó $x = \dfrac{35}{6}$

Entonces $x = 0$ **y** $x = \dfrac{35}{6}$ **son puntos críticos de f (x)**

$C^0 \left(f'\right) = \left\{0, \dfrac{35}{6}\right\}$

Veamos qué tipo de extremos locales son los puntos críticos

Criterio de la derivada 1 era :

Como f' (x) es continua en todo $\mathbb{R}$ aplicamos el corolario del Teorema de Bolzano en los intervalos determinados entre ceros de f' (x) en $x = 0$ **y** $x = \dfrac{35}{6}$

intervalos de análisis : $\left(-\infty, 0\right)$; $\left(0, \frac{35}{6}\right)$; $\left(\frac{35}{6}, +\infty\right)$

En $\left(-\infty, 0\right)$

tomamos $x = -1 \in \left(-\infty, 0\right) \implies f'\left(-1\right) = \left(-1\right)^4 \left(6 \cdot \left(-1\right) - 35\right) = 1\left(-6-35\right)$

$\implies f'\left(-1\right) = 1\left(-6-35\right) = -41 < 0$

En $\left(0, \frac{35}{6}\right)$

tomamos $x = 1 \in \left(0, \frac{35}{6}\right) \implies f'\left(1\right) = 1^4 \left(6 \cdot 1 - 35\right)$

$\implies f'\left(1\right) = 1\left(6-35\right) = -29 < 0$

En $\left(\frac{35}{6}, +\infty\right)$

tomamos $x = 6 \in \left(\frac{35}{6}, +\infty\right) \implies f'\left(6\right) = 6^4 \left(6 \cdot 6 - 35\right)$

$\implies f'\left(6\right) = 6^4 \left(1\right) > 0$

Análisis :

Vemos que $f'(x) < 0$ **a la izquierda de** $x = 0$ **y** $f'(x) < 0$ **a la derecha de** $x = 0$

por el criterio de la 1 er derivada en $x = 0$ **NO hay ni un Máximo ni un Mínimo local o relativo de** $f(x)$ **hay un punto de inflexión en** $x = 0$

Vemos que $f'(x) < 0$ **a la izquierda de** $x = \frac{35}{6}$ **y** $f'(x) > 0$ **a la derecha de** $x = \frac{35}{6}$

por el criterio de la 1 er derivada en $x = \frac{35}{6}$ **hay un Mínimo local o relativo**

El corolario del Teo de Bolzano aplicado a $f'(x)$ **nos permite construir la tabla :**

x	(-∞, 0)	0	(0, 35/6)	35/6	(35/6, +∞)
f '(x)	< 0	0	< 0	0	> 0
f(x)	es decreciente	pto. de inflexión	es decreciente	MÍN	es creciente

Además se obtienen los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f
$I^{\uparrow}(f)$ e $I^{\downarrow}(f)$:

$$I^{\uparrow}(f) = (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{35}{6}\right)$$

$$I^{\downarrow}(f) = \left(\frac{35}{6}, +\infty\right)$$

Análisis de asíntotas

AV :

f (x) no tiene AV porque no tiene discontinuidades en el Dominio ℝ

AH :

$$\lim_{x\to+\infty} x^5 (x-7) = \lim_{x\to+\infty} x^5 x \left(1-\frac{7}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^6 \left(1-\frac{7}{x}\right) = +\infty$$

$\Longrightarrow$ **f (x) no tiene AH para** $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} x^5 (x-7) = \lim_{x\to-\infty} x^5 x \left(1-\frac{7}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} x^6 \left(1-\frac{7}{x}\right) = +\infty$$

$\Longrightarrow$ **f (x) no tiene AH para** $x \to -\infty$

AO : asíntota oblicua $y = mx + b$ **en el** ∞

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^5 (x-7)}{x} = \lim_{x\to\infty} x^4 \left(1-\frac{7}{x}\right) = \infty$$

Entonces f (x) NO tiene AO para $x \longrightarrow \infty$

$f(x) = x^5 (x-7)$; $f'(x) = x^4 (6x-35)$

Resumiendo asíntotas :

f (x) no tiene AV

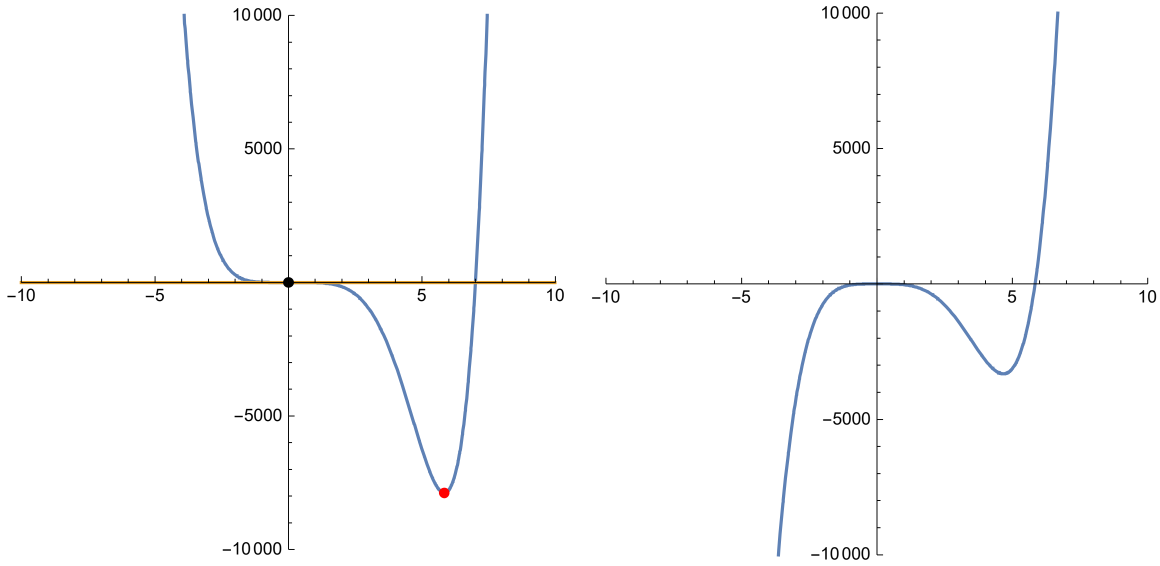
f (x) no tiene AH para $x \to +\infty$ y su $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

f (x) no tiene AH para $x \to -\infty$ y su $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

f (x) NO tiene AO para $x \longrightarrow \infty$

Gráfico1 : color azul : $f(x) = x^5 (x - 7)$;
Gráfico2 : color azul : $f'(x) = x^4 (6x - 35)$;

$x_0 = 0$ es un punto de inflexión y el valor de $f(0) = 0$
$x_0 = \frac{35}{6}$ es Mínimo local o relativo y el valor mínimo es aprox. -7880.082



Hallar Dom (f), $I^{\uparrow}(f)$ e $I^{\downarrow}(f)$, extremos locales, AV y AH y graficar

Ej Surt 9 b)

$f(x) = 2x + 7 + \frac{9}{2x - 1}$

deberá ser $2x - 1 \neq 0 \implies x \neq \frac{1}{2}$

Dom (f) = $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Analicemos f (x) a partir de su derivada f' (x)

Calculemos f' (x) :

$$f'(x) = \left[2x + 7 + \frac{9}{2x-1}\right]' = [2x+7]' + \left[\frac{9}{2x-1}\right]'$$

$$f'(x) = 2 + \left[9\,(2x-1)^{-1}\right]' = 2 + 9\left[(2x-1)^{-1}\right]' = 2 + 9\,(-1)\,(2x-1)^{-2} \cdot 2$$

$$f'(x) = 2 - 18\,(2x-1)^{-2} = 2 - \frac{18}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{18}{(2x-1)^2}$$

$$\mathrm{Dom}\left(f'\right) = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Buscamos los puntos críticos de $f(x)$ que son aquellos x en los que $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \implies 2 - \frac{18}{(2x-1)^2} = 0 \implies 2 = \frac{18}{(2x-1)^2} \implies 2\,(2x-1)^2 = 18$$

desarrollando el binomio al cuadrado $(2x-1)^2 = 4x^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2$

$$\implies 2\left(4x^2 - 4x + 1\right) = 18 \implies 8x^2 - 8x + 2 = 18 \implies 8x^2 - 8x - 16 = 0$$

$$\implies 8\left(x^2 - x - 2\right) = 0 \implies x^2 - x - 2 = 0$$

resolvemos la ecuación cuadrática $x^2 - x - 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \implies x_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{ó} \quad x_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\implies x_1 = 2 \quad \text{ó} \quad x_2 = -1$$

Entonces $x = 2$ y $x = -1$ son puntos críticos de $f(x)$

$$C^0\left(f'\right) = \{-1, 2\}$$

Veamos qué tipo de extremos locales son los puntos críticos $x = 2$ y $x = -1$

Criterio de la derivada 1 era :

Como $f'(x)$ es continua en todo $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ aplicamos el corolario del

Teorema de Bolzano en los intervalos determinados entre ceros de $f'(x)$

en $x = -1$ y $x = 2$ y las discontinuidades de $f'(x)$ $\left(x = \frac{1}{2}\right)$

intervalos de análisis de $f'(x) = 2 - \frac{18}{(2x-1)^2}$:

$(-\infty, -1)$; $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$; $(2, +\infty)$

En $(-\infty, -1)$

tomamos $x = -2 \in (-\infty, -1) \Longrightarrow f'(-2) = 2 - \frac{18}{(2(-2)-1)^2}$

$\Longrightarrow f'(-2) = 2 - \frac{18}{(-4-1)^2} = 2 - \frac{18}{(-5)^2} = 2 - \frac{18}{25} = \frac{32}{25} > 0$

En $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

tomamos $x = 0 \in \left(-1, \frac{1}{2}\right) \Longrightarrow f'(0) = 2 - \frac{18}{(2 \cdot 0 - 1)^2}$

$\Longrightarrow f'(0) = 2 - \frac{18}{(-1)^2} = 2 - \frac{18}{1} = -16 < 0$

En $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

tomamos $x = 1 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right) \Longrightarrow f'(1) = 2 - \frac{18}{(2 \cdot 1 - 1)^2}$

$\Longrightarrow f'(1) = 2 - \frac{18}{(1)^2} = -16 < 0$

En $(2, +\infty)$

tomamos $x = 3 \in (2, +\infty) \Longrightarrow f'(3) = 2 - \frac{18}{(2 \cdot 3 - 1)^2}$

$\Longrightarrow f'(3) = 2 - \frac{18}{(5)^2} = 2 - \frac{18}{25} = \frac{32}{25} > 0$

Análisis :

Vemos que $f'(x) > 0$ a la izquierda de $x = -1$ y $f'(x) < 0$ a la derecha de $x = -1$

entonces en $x = -1$ hay un Máximo local o relativo de $f(x)$

Vemos que $f'(x) < 0$ a la izquierda de $x = \frac{1}{2}$ y $f'(x) < 0$ a la derecha de $x = \frac{1}{2}$

pero en $x = \frac{1}{2}$ $f(x)$ no está definida. Discontinuidad de $f(x)$

Vemos que $f'(x) < 0$ a la izquierda de $x = 2$ y $f'(x) > 0$ a la derecha de $x = 2$

entonces en $x = 2$ hay un Mínimo local o relativo de f

El corolario del Teo de Bolzano aplicado a $f'(x)$ nos permite construir la tabla :

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1/2)$	1/2	$(1/2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f '(x)	> 0	0	< 0	No Existe	< 0	0	> 0
f(x)	es creciente	MÁX	es decreciente	No Existe	es decreciente	MÍN	es creciente

----

Además se obtienen los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f
$I^{\uparrow}(f)$ e $I^{\downarrow}(f)$:

$$I^{\uparrow}(f) = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

$$I^{\downarrow}(f) = \left(-1, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

Análisis de asíntotas

AV : $f(x)$ puede tener asíntotas verticales en los x que no están en el Dom (f)

$x = \frac{1}{2}$ es candidato a ser AV

Calculemos los límites laterales en $x = \frac{1}{2}$

Para $x \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{+}$:

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} 2x+7+\frac{9}{2x-1} = \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} 2x+7+\frac{9}{2x-1} \quad (*)$$

----

cálculo auxiliar :

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} 2x+7 = 8 \quad y \quad \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{9}{2x-1} = \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{9}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

el cociente tiende a $\frac{9}{2\cdot 0^+} \longrightarrow +\infty$

entonces $\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{9}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} = +\infty$

Como los dos límites existen podemos expresar (*) como

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} 2x+7+\frac{9}{2x-1} = \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} 2x+7+\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{9}{2x-1} = 8+(+\infty) = +\infty$$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ es AV de f (x) por derecha cuando $x\longrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^+$

Para $x\longrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^-$:

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} 2x+7+\frac{9}{2x-1} = \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} 2x+7+\frac{9}{2x-1} \quad (**)$$

----

cálculo auxiliar :

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} 2x+7 = 8 \quad y \quad \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{9}{2x-1} = \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{9}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

el cociente tiende a $\frac{9}{2\cdot 0^-} \longrightarrow -\infty$

entonces $\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{9}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} = -\infty$

Como los dos límites existen podemos expresar (**) como

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} 2x+7+\frac{9}{2x-1} = \lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} 2x+7+\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{9}{2x-1} = 8+(-\infty) = -\infty$$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ es AV de f (x) por izquierda cuando $x\longrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^-$

AH :

Para $x \longrightarrow +\infty$:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} 2x+7+\frac{9}{2x-1} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{(2x+7)\,(2x-1)+9}{2x-1} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{4x^2+12x-7+9}{2x-1}$$

$$= \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{4x^2+12x+2}{2x-1} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x^2\left(4+\frac{12}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x\left(4+\frac{12}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\left(2-\frac{1}{x}\right)} = +\infty$$

$\Longrightarrow$ f (x) no tiene AH para $x \to +\infty$

Para $x \longrightarrow -\infty$:

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} 2x+7+\frac{9}{2x-1} = \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{(2x+7)\,(2x-1)+9}{2x-1} = \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{4x^2+12x-7+9}{2x-1}$$

$$= \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{4x^2+12x+2}{2x-1} = \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{x^2\left(4+\frac{12}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{x\left(4+\frac{12}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\left(2-\frac{1}{x}\right)} = -\infty$$

$\Longrightarrow$ f (x) no tiene AH para $x \to -\infty$

AO : asíntota oblicua $y = mx + b$ en el ∞

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2x+7+\frac{9}{2x-1}}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{4x^2+12x-7+9}{2x-1}}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{4x^2+12x-7+9}{x\,(2x-1)} =$$

$$= \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2\left(4+\frac{12}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x\cdot x\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\left(4+\frac{12}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\left(2-\frac{1}{x}\right)} = 2$$

Entonces f (x) tiene AO para $x \longrightarrow \infty$ con pendiente $m = 2$

Calculemos la ordenada al origen b de $y = mx + b$ la AO de f (x)

$$b = \lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) - m\cdot x = \lim_{x\longrightarrow\infty} 2x+7+\frac{9}{2x-1} - 2x =$$

$$= \lim_{x\longrightarrow\infty} 7+\frac{9}{2x-1} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{7\,(2x-1)+9}{2x-1} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{14x+2}{2x-1} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x\left(14+\frac{12}{x}\right)}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\left(14+\frac{12}{x}\right)}{\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \frac{14}{2} = 7$$

Entonces f (x) tiene AO de ecuación $y = 2x + 7$ para $x \longrightarrow \infty$

Resumiendo asíntotas :

la recta vertical $x = \frac{1}{2}$ **es AV de f (x) para** $x \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{+}$ **y su límite da** $+\infty$

la recta vertical $x = \frac{1}{2}$ **es AV de f (x) para** $x \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-}$ **y su límite da** $-\infty$

f (x) no tiene AH para $x \to +\infty$ **y su límite da** $+\infty$

f (x) no tiene AH para $x \to +\infty$ **y su límite da** $-\infty$

f (x) tiene AO de ecuación $y = 2x + 7$ **para** $x \longrightarrow \infty$

Gráfico1 : color azul : $f(x) = 2x + 7 + \frac{9}{2x - 1}$;

Gráfico2 : color azul : $f'(x) = 2 - \frac{18}{(2x - 1)^2}$;

$x = -1$ es **Máximo** local o relativo y el valor máximo es 2

$x = \frac{1}{2}$ es una discontinuidad de f (x)

$x = 2$ es **Mínimo** Mínimo local o relativo y el valor mínimo es 14

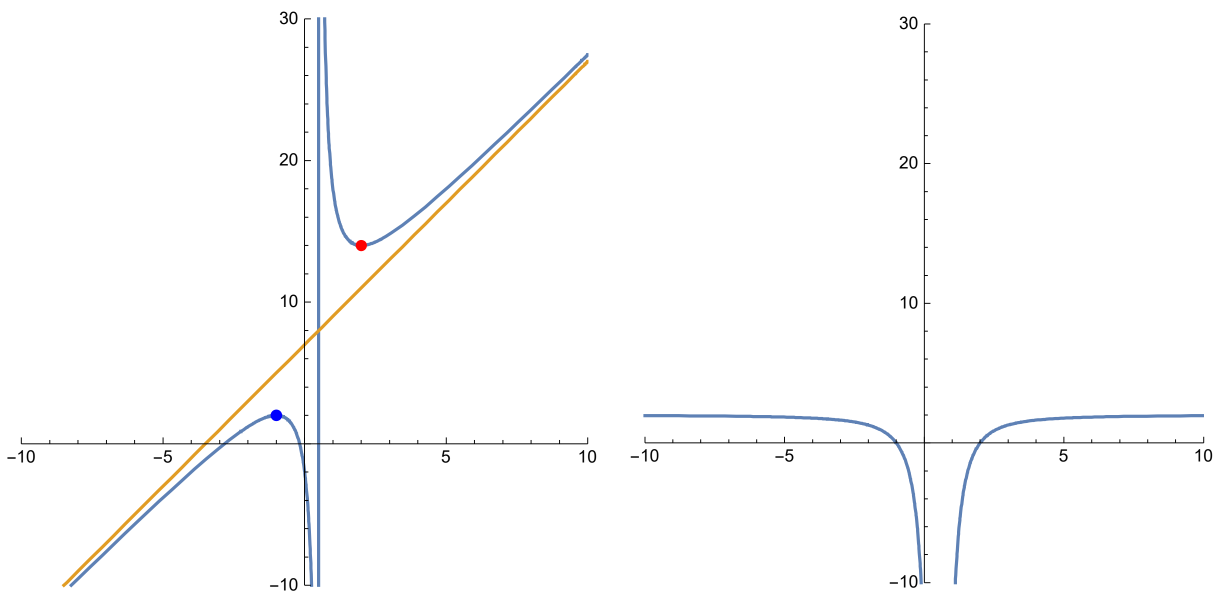
la recta vertical $x = \frac{1}{2}$ es AV de f (x) para $x \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{+}$ y su límite da $+\infty$

la recta vertical $x = \frac{1}{2}$ es AV de f (x) para $x \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-}$ y su límite da $-\infty$

f (x) no tiene AH para $x \to +\infty$ y su límite da $+\infty$

f (x) no tiene AH para $x \to -\infty$ y su límite da $-\infty$

f (x) tiene AO de ecuación $y = 2x + 7$ para $x \longrightarrow \infty$



Hallar Dom (f), $I^{\uparrow}$ (f) e $I^{\downarrow}$ (f), extremos locales, AV y AH y graficar

Ej Surt 9 c)

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

deberá ser $x^2 - 4 \neq 0 \implies |x| \neq 2 \implies x \neq 2$ **y** $x \neq -2$

Dom (f) = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Analicemos f (x) a partir de su derivada f' (x)

Calculemos f' (x) :

$$f'(x) = \left[\frac{x^2}{x^2 - 4}\right]' = \frac{[x^2]' \cdot (x^2 - 4) - x^2 \cdot [x^2 - 4]'}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x \cdot (x^2 - 4) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}$$

Dom (f') = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Buscamos los puntos críticos de f (x) que son aquellos x en los que f' (x) = 0 :

$$f'(x) = 0 \implies \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \implies -8x = 0 \implies x = 0$$

x = 0 es punto crítico

$C^0 (f') = \{0\}$

Veamos qué tipo de extremos locales es el punto crítico x = 0

Criterio de la derivada 1 era :

Como f' (x) es continua en todo $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ aplicamos el corolario del Teorema de Bolzano en los intervalos determinados entre ceros de f' (x) en x = 0 y las discontinuidades de f' (x) $(x = -2;\ x = 2)$

intervalos de análisis de $f'(x) = \dfrac{-8x}{(x^2-4)^2}$:

$(-\infty, -2)$; $(-2, 0)$; $(0, 2)$; $(2, +\infty)$

En $(-\infty, -2)$

tomamos $x = -3 \in (-\infty, -2) \implies f'(-3) = \dfrac{-8(-3)}{((-3)^2-4)^2}$

$\implies f'(-3) = \dfrac{24}{(9-4)^2} = \dfrac{24}{(5)^2} = \dfrac{24}{25} > 0$

En $(-2, 0)$

tomamos $x = -1 \in (-2, 0) \implies f'(-1) = \dfrac{-8(-1)}{((-1)^2-4)^2}$

$\implies f'(-1) = \dfrac{8}{(1-4)^2} = \dfrac{8}{(-3)^2} = \dfrac{8}{9} > 0$

En $(0, 2)$

tomamos $x = 1 \in (0, 2) \implies f'(1) = \dfrac{-8(1)}{(1^2-4)^2}$

$\implies f'(1) = \dfrac{-8}{(-3)^2} = \dfrac{-8}{9} < 0$

En $(2, +\infty)$

tomamos $x = 3 \in (2, +\infty) \implies f'(3) = \dfrac{-8(3)}{(3^2-4)^2}$

$\implies f'(3) = \dfrac{-24}{(9-4)^2} = \dfrac{-24}{(5)^2} = \dfrac{-24}{25} < 0$

Análisis de crecimiento, decrecimiento y extremos locales de $f(x)$:

Vemos que $f'(x) > 0$ **a la izquierda de** $x = -2$ **y** $f'(x) > 0$ **a la derecha de** $x = -2$

pero en $x = -2$ $f(x)$ **no está definida. Hay una discontinuidad de** $f(x)$

Vemos que $f'(x) > 0$ **a la izquierda de** $x = 0$ **y** $f'(x) < 0$ **a la derecha de** $x = 0$

entonces en $x = 0$ hay un Máximo local o relativo de f

Vemos que $f'(x) < 0$ a la izquierda de $x = 2$ y $f'(x) < 0$ a la derecha de $x = 2$

pero en $x = 2$ $f(x)$ no está definida. Hay una discontinuidad de $f(x)$

El corolario del Teo de Bolzano aplicado a $f'(x)$ nos permite construir la tabla :

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
f '(x)	> 0	No Existe	> 0	0	< 0	No Existe	< 0
f(x)	es creciente	No Existe	es creciente	MÁX	es decreciente	No Existe	es decreciente

----

Intervalos de crecimiento y decrecimiento de f
$I^{\uparrow}(f)$ e $I^{\downarrow}(f)$:

$I^{\uparrow}(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

$I^{\downarrow}(f) = (0, 2) \cup (2, +\infty)$

Análisis de asíntotas

AV : $f(x)$ puede tener asíntotas verticales en los x que no están en el Dom (f)

$x = -2$ y $x = 2$ son candidatos a ser AV

Calculemos los límites laterales de $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$ en $x = -2$

Para $x \longrightarrow (-2)^+$:

$$\lim_{x \to (-2)^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to (-2)^+} \frac{x^2}{(x - 2)(x + 2)} \quad (*)$$

----

cálculo auxiliar :

el cociente tiende a $\dfrac{4}{-4 \cdot 0^+} \longrightarrow -\infty$ reemplazando en $(*)$

----

entonces $\displaystyle\lim_{x \to (-2)^+} \frac{x^2}{(x - 2)(x + 2)} = -\infty$

$\Longrightarrow$ $x = -2$ es AV de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow (-2)^{+}$ por derecha y su límite da $-\infty$

Para $x \longrightarrow (-2)^{-}$:

$$\lim_{x \longrightarrow (-2)^{-}} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \longrightarrow (-2)^{-}} \frac{x^2}{(x-2)(x+2)} \quad (**)$$

----

cálculo auxiliar :

el cociente tiende a $\dfrac{4}{-4 \cdot 0^{-}} \longrightarrow +\infty$ reemplazando en (**)

----

entonces $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow (-2)^{-}} \frac{x^2}{(x-2)(x+2)} = +\infty$

$\Longrightarrow$ $x = -2$ es AV de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow (-2)^{-}$ por izquierda y su límite da $+\infty$

Calculemos los límites laterales de $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$ en $x = 2$

Para $x \longrightarrow (2)^{+}$:

$$\lim_{x \longrightarrow (2)^{+}} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \longrightarrow (2)^{+}} \frac{x^2}{(x-2)(x+2)} \quad (***)$$

----

cálculo auxiliar :

el cociente tiende a $\dfrac{4}{0^{+} \cdot 4} \longrightarrow +\infty$ reemplazando en (***)

----

entonces $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow (2)^{+}} \frac{x^2}{(x-2)(x+2)} = +\infty$

$\Longrightarrow$ $x = 2$ es AV de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow (2)^{+}$ por derecha y su límite da $+\infty$

Para $x \longrightarrow (2)^{-}$:

$$\lim_{x \longrightarrow (2)^{-}} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \longrightarrow (2)^{-}} \frac{x^2}{(x-2)(x+2)} \quad (****)$$

----

cálculo auxiliar :

el cociente tiende a $\frac{4}{0^- \cdot 4} \longrightarrow -\infty$ reemplazando en (****)

----

entonces $\lim\limits_{x \longrightarrow (2)^-} \frac{x^2}{(x-2)\,(x+2)} = -\infty$

$\Longrightarrow$ x = 2 es AV de f (x) cuando $x \longrightarrow (2)^-$ por izquierda y su límite da $-\infty$

AH :

Para $x \longrightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = 1$$

$\Longrightarrow$ la recta horixontal y = 1 es AH de f (x) cuando $x \longrightarrow +\infty$

Para $x \longrightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = 1$$

$\Longrightarrow$ la recta horixontal y = 1 es AH de f (x) cuando $x \longrightarrow -\infty$

AO : asíntota oblicua y = mx + b en el ∞

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2-4}}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x\,(x^2 - 4)} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x}{(x^2 - 4)} = \infty$$

Entonces

f (x) no tiene AO para $x \longrightarrow \infty$

Resumiendo asíntotas :

la recta vertical x = -2 es AV de f (x) cuando $x \longrightarrow (-2)^+$ por derecha y su límite da $-\infty$

la recta vertical x = -2 es AV de f (x) cuando $x \longrightarrow (-2)^-$ por izquierda y su límite da $+\infty$

la recta vertical x = 2 es AV de f (x) cuando $x \longrightarrow (2)^+$ por derecha y su límite da $+\infty$

la recta vertical x = 2 es AV de f (x) cuando $x \longrightarrow (2)^-$ por izquierda y su límite da $-\infty$

la recta horixontal y = 1 es AH de f (x) cuando $x \longrightarrow +\infty$

la recta horixontal y = 1 es AH de f (x) cuando $x \longrightarrow -\infty$

f (x) no tiene AO para $x \longrightarrow \infty$

Gráfico1 : color azul : $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$; color naranja; $y = 1$

Gráfico2 : color azul : $f'(x) = \dfrac{-8x}{\left(x^2 - 4\right)^2}$;

$x = -2$ es una discontinuidad de $f(x)$

$x = 0$ es Máximo local o relativo y el valor máximo es 0

$x = 2$ es una discontinuidad de $f(x)$

la recta vertical $x = -2$ es AV de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow (-2)^+$ por derecha y su límite da $-\infty$

la recta vertical $x = -2$ es AV de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow (-2)^-$ por izquierda y su límite da $+\infty$

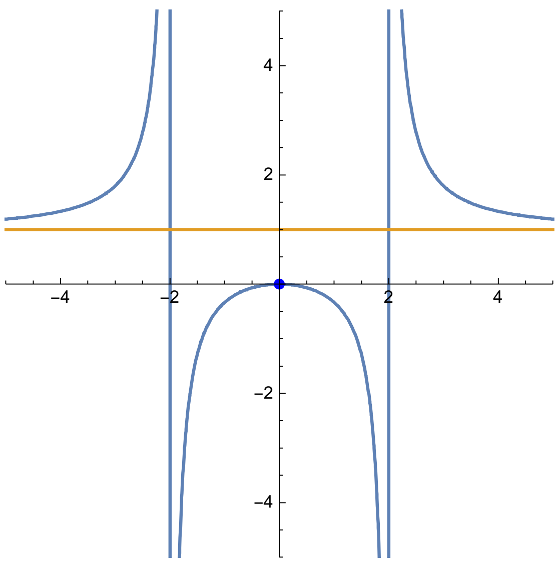
la recta vertical $x = 2$ es AV de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow (2)^+$ por derecha y su límite da $+\infty$

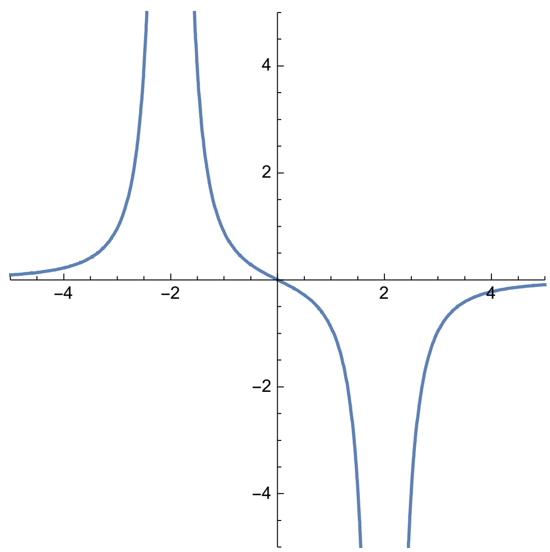
la recta vertical $x = 2$ es AV de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow (2)^-$ por izquierda y su límite da $-\infty$

la recta horixontal $y = 1$ es AH de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow +\infty$

la recta horixontal $y = 1$ es AH de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow -\infty$

$f(x)$ no tiene AO para $x \longrightarrow \infty$





Hallar Dom (f), $I^{\uparrow}(f)$ e $I^{\downarrow}(f)$, extremos locales, AV y AH y graficar

Ej Surt 9 d)

$f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x + 9}}$

deberá ser $x + 9 > 0 \implies x > -9$

Dom (f) = $\mathbb{R}_{>-9} = (-9, +\infty)$

Analicemos $f(x)$ a partir de su derivada $f'(x)$

Calculemos $f'(x)$:

$$f'(x) = \left[\frac{x^2}{\sqrt{x+9}}\right]' = \frac{\left[x^2\right]' \cdot \sqrt{x+9} - x^2 \cdot \left[\sqrt{x+9}\right]'}{\left(\sqrt{x+9}\right)^2} = \frac{2x \cdot \sqrt{x+9} - x^2 \cdot \left[(x+9)^{\frac{1}{2}}\right]'}{\left(\sqrt{x+9}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \sqrt{x+9} - x^2 \cdot \frac{1}{2}(x+9)^{-\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt{x+9}\right)^2} = \frac{2x \cdot \sqrt{x+9} - x^2 \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+9}}}{\left(\sqrt{x+9}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{4x(x+9)-x^2}{2\sqrt{x+9}}}{\left(\sqrt{x+9}\right)^2} = \frac{4x \cdot (x+9) - x^2}{2\sqrt{x+9}\left(\sqrt{x+9}\right)^2} = \frac{4x^2 + 36x - x^2}{2\sqrt{x+9}\left(\sqrt{x+9}\right)^2} = \frac{3x^2 + 36x}{2\sqrt{x+9}\left(\sqrt{x+9}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x(x+12)}{2\sqrt{x+9}\left(\sqrt{x+9}\right)^2} = \frac{3x(x+12)}{2\left(\sqrt{x+9}\right)^3}$$

$$f'(x) = \frac{3x(x+12)}{2\left(\sqrt{x+9}\right)^3}$$

$\text{Dom}\left(f'\right) = \mathbb{R}_{>-9} = (-9, +\infty)$

Buscamos los puntos críticos de $f(x)$ que son aquellos x en los que $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \implies \frac{3x(x+12)}{2\left(\sqrt{x+9}\right)^3} = 0 \implies 3x(x+12) = 0 \implies 3x = 0 \text{ ó } x+12 = 0$$

$$\implies 3x = 0 \quad \text{ó} \quad x+12 = 0 \implies x = 0 \quad \text{ó} \quad x = -12$$

$x = 0$ y $x = -12$ son candidatos a puntos críticos de $f(x)$

pero como tanto f como f' están definidas para $x > -9$

no se puede considerar $x = -12$

Entonces :

$C^0\left(f'\right) = \{0\}$

Veamos qué tipo de extremo local es el punto crítico $x = 0$

Criterio de la derivada 1 era :

Como $f'(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}_{>-9}$ aplicamos el corolario del

Teorema de Bolzano en los intervalos determinados entre ceros de $f'(x)$

en $x = 0$ y las discontinuidades de $f'(x)$ si las hubiera $(x = -9)$

intervalos de análisis de $f'(x) = \dfrac{3x(x+12)}{2\left(\sqrt{x+9}\right)^3}$:

$(-9, 0)$; $(0, +\infty)$

En $(-9, 0)$

tomamos $x = -1 \in (-9, 0) \Longrightarrow f'(-1) = \dfrac{3(-1)(-1+12)}{2\left(\sqrt{-1+9}\right)^3}$

$\Longrightarrow f'(-1) = \dfrac{(-3)(11)}{2\left(\sqrt{8}\right)^3} = \dfrac{-33}{2\left(\sqrt{8}\right)^3} < 0$

En $(0, +\infty)$

tomamos $x = 1 \in (0, +\infty) \Longrightarrow f'(1) = \dfrac{3 \cdot 1 \cdot (1+12)}{2\left(\sqrt{1+9}\right)^3}$

$\Longrightarrow f'(1) = \dfrac{3 \cdot (13)}{2\left(\sqrt{10}\right)^3} = \dfrac{39}{2\left(\sqrt{10}\right)^3} > 0$

Análisis de crecimiento, decrecimiento y extremos locales de $f(x)$ **:**

Vemos que $f'(x) < 0$ **a la izquierda de** $x = 0$ **y** $f'(x) > 0$ **a la derecha de** $x = 0$

entonces en $x = 0$ **hay un Mínimo local o relativo de f**

El corolario del Teo de Bolzano aplicado a $f'(x)$ **nos permite construir la tabla :**

x	(-9, 0)	0	(0, +∞)
f '(x)	< 0	0	> 0
f(x)	es decreciente	MÍN	es creciente

Intervalos de crecimiento y decrecimiento de f
$I^{\uparrow}(f)$ **e** $I^{\downarrow}(f)$ **:**

$I^{\uparrow}(f) = (-9, 0)$

$I^{\downarrow}(f) = (0, +\infty)$

Análisis de asíntotas

AV :

f (x) puede tener asíntotas verticales alrededor de los x del Dom (f) = $(-9, +\infty)$

en donde hay un crecimiento excesivo de f (x) que es lo que sucede a la derecha

de x = - 9

Entonces en x = - 9 hay un candidato a AV

Calculemos el límite lateral de f (x) $= \dfrac{x^2}{\sqrt{x+9}}$ en x = - 9 por la derecha

Para $x \longrightarrow (-9)^+$:

$$\lim_{x\longrightarrow(-9)^+} \frac{x^2}{\sqrt{x+9}} = \lim_{x\longrightarrow(-9)^+} \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{9}{x}\right)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x\longrightarrow(-9)^+} \frac{x^{2-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{9}{x}\right)}} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{9}{x}\right)}} = +\infty$$

Entonces la recta vertical x = - 9 es AV de f (x) para $x \longrightarrow (-9)^+$ y su límite es $+\infty$

Para $x \longrightarrow (-9)^-$: no tiene sentido calcular porque f (x) no está definida

----

AH :

Para $x \longrightarrow +\infty$:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x+9}} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{9}{x}\right)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x^{2-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{9}{x}\right)}} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{9}{x}\right)}} = +\infty$$

$\Longrightarrow$ f (x) no tiene AH para $x \longrightarrow +\infty$

Para $x \longrightarrow -\infty$: no tiene sentido pues Dom (f) = $(-9, +\infty)$

AO : asíntota oblicua y = mx + b en $+\infty$

$$m = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x+9}}}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x+9}} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{9}{x}\right)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{9}{x}\right)^{\frac{1}{2}}} = +\infty$$

Entonces

f (x) no tiene AO para $x \longrightarrow +\infty$

Resumiendo asíntotas :

la recta vertical $x = -9$ es AV de f (x) para $x \longrightarrow (-9)^+$ y su límite es $+\infty$

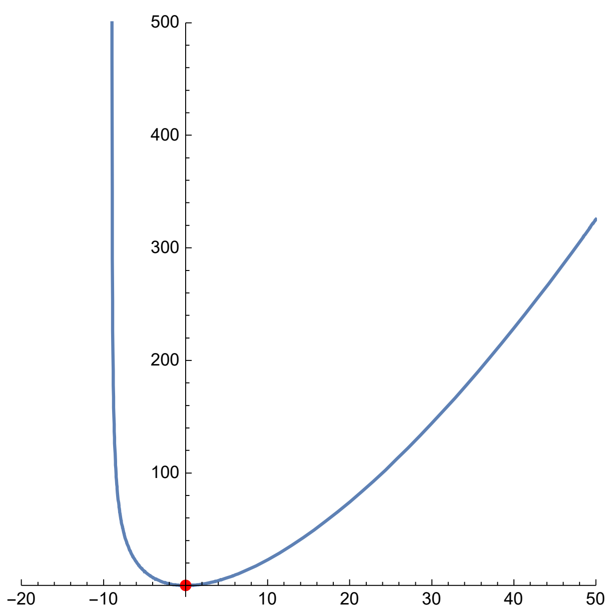
f (x) no tiene AH para $x \longrightarrow +\infty$ y límite de f (x) cuando $x \longrightarrow +\infty$ es $+\infty$

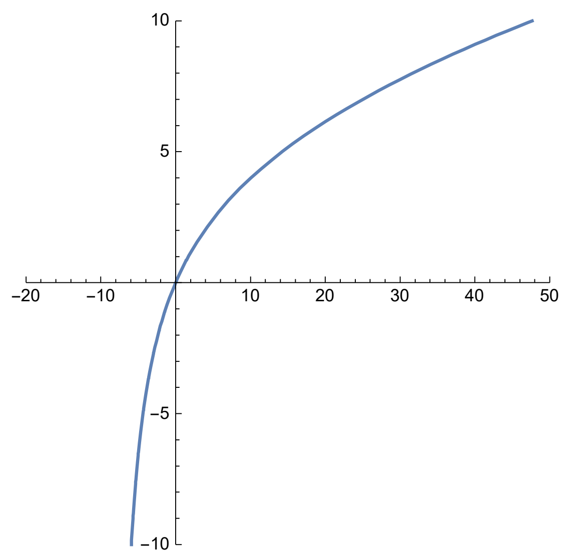
f (x) no tiene AO para $x \longrightarrow +\infty$

Gráfico1 : color azul : $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+9}}$;

Gráfico2 : color azul : $f'(x) = \dfrac{3x(x+12)}{2\left(\sqrt{x+9}\right)^3}$;

$x = 0$ es **Mínimo** local de f (x) y su valor mínimo es 0
la recta vertical $x = -9$ es AV de f (x) para $x \longrightarrow (-9)^+$ y su límite es $+\infty$
f (x) no tiene AH para $x \longrightarrow +\infty$ y límite de f (x) cuando $x \longrightarrow +\infty$ es $+\infty$
f (x) no tiene AO para $x \longrightarrow +\infty$





Hallar Dom (f), $I^{\uparrow}$ (f) e $I^{\downarrow}$ (f), extremos locales, AV y AH y graficar

Ej Surt 9 e)

$f(x) = e^{x^3-3x^2}$

Dom (f) = $\mathbb{R}$

Analicemos f (x) a partir de su derivada $f'(x)$

Calculemos $f'(x)$:

$f'(x) = \left[e^{x^3-3x^2}\right]' = e^{x^3-3x^2} \cdot \left[x^3-3x^2\right]' = e^{x^3-3x^2}\left(3x^2-6x\right)$

$f'(x) = 3x\,e^{x^3-3x^2}\left(x-2\right)$

$$f'(x) = 3x\,e^{x^3-3x^2}\,(x-2)$$

$$\mathrm{Dom}\left(f'\right) = \mathbb{R}$$

Buscamos los puntos críticos de f (x) que son aquellos x en los que $f'(x) = 0$:

$f'(x) = 0 \implies 3x\,e^{x^3-3x^2}\left(x-2\right) = 0$ **como la exponencial es siempre** > 0

deberá ser $3x\left(x-2\right) = 0 \implies x\left(x-2\right) = 0$

$\implies x = 0$ ó $x - 2 = 0 \implies x = 0$ ó $x = 2$

$x = 0$ **y** $x = 2$ **son puntos críticos de f (x)**

$C^0\left(f'\right) = \{0, 2\}$

Veamos qué tipo de extremos locales son los puntos críticos $x = 0$ y $x = 2$

Criterio de la derivada 1 era :

Como $f'(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ aplicamos el corolario del

Teorema de Bolzano en los intervalos determinados entre ceros de $f'(x)$

en $x = 0$ y $x = 2$ y las discontinuidades de $f'(x)$ si las hubiera

intervalos de análisis de $f'(x) = 3x\,e^{x^3-3x^2}\left(x-2\right)$:

$\left(-\infty, 0\right);\ \left(0, 2\right);\ \left(2, +\infty\right)$

En $\left(-\infty, 0\right)$

tomamos $x = -1 \in \left(-\infty, 0\right) \implies f'\left(-1\right) = 3\left(-1\right) e^{(-1)^3-3(-1)^2}\left(-1-2\right)$

$\implies f'\left(-1\right) = 3\left(-1\right) e^{-1-3}\left(-3\right) = 9\,e^{-4} = \dfrac{9}{e^4} > 0$

En $\left(0, 2\right)$

tomamos $x = 1 \in (0, 2) \implies f'(1) = 3 \cdot 1\, e^{1^3 - 3 \cdot 1^2} (1 - 2)$

$\implies f'(1) = 3 \cdot 1\, e^{-2} (-1) = 3 \cdot 1\, e^{-2} (-1) = \frac{-3}{e^2} < 0$

En $(2, +\infty)$

tomamos $x = 3 \in (2, +\infty) \implies f'(3) = 3 \cdot 3\, e^{3^3 - 3 \cdot 3^2} (3 - 2)$

$\implies f'(3) = 3 \cdot 3\, e^{27-27} (1) = 3 \cdot 3\, e^{0} (1) = 9 > 0$

Análisis de crecimiento, decrecimiento y extremos locales de f (x) :

Vemos que $f'(x) > 0$ **a la izquierda de** $x = 0$ **y** $f'(x) < 0$ **a la derecha de** $x = 0$

entonces en $x = 0$ **hay un Máximo local o relativo de f**

Vemos que $f'(x) < 0$ **a la izquierda de** $x = 2$ **y** $f'(x) > 0$ **a la derecha de** $x = 2$

entonces en $x = 2$ **hay un Mínimo local o relativo de f**

El corolario del Teo de Bolzano aplicado a $f'(x)$ **nos permite construir la tabla :**

x f '(x)	$(-\infty, 0)$ >0	0 0	$(0, 2)$ <0	2 0	$(2, +\infty)$ >0
f(x)	es creciente	MÁX	es decreciente	MÍN	es creciente

Intervalos de crecimiento y decrecimiento de f
$I^{\uparrow}(f)$ **e** $I^{\downarrow}(f)$ **:**

$I^{\uparrow}(f) = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

$I^{\downarrow}(f) = (0, 2)$

Análisis de asíntotas

AV : f (x) puede tener asíntotas verticales en los x que no están en el Dom (f)

Como Dom (f) $= \mathbb{R} \implies$

f (x) no tiene AV

AH :

Para $x \longrightarrow +\infty$:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} e^{x^3-3x^2} = \qquad (*)$$

----

cálculo auxiliar :

como $\lim_{x\longrightarrow+\infty} x^3 - 3x^2 = \lim_{x\longrightarrow+\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x}\right) = +\infty$ existe $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow+\infty} e^{g(x)} = e^{\lim_{x\to+\infty} g(x)} \longrightarrow e^{+\infty} \longrightarrow +\infty$

----

reemplazando en (*)

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} e^{x^3-3x^2} = +\infty$$

$\Longrightarrow$ f (x) no tiene AH cuando $x \longrightarrow +\infty$

Para $x \longrightarrow -\infty$:

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} e^{x^3-3x^2} = \qquad (**)$$

----

cálculo auxiliar :

como $\lim_{x\longrightarrow-\infty} x^3 - 3x^2 = \lim_{x\longrightarrow-\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x}\right) = -\infty$ existe

$\Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow-\infty} e^{g(x)} = e^{\lim_{x\to+\infty} g(x)} \longrightarrow e^{-\infty} \longrightarrow 0$

----

reemplazando en (**)

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} e^{x^3-3x^2} = 0$$

$\Longrightarrow$ la recta horizontal $y = 0$ es AH de f (x) cuando $x \longrightarrow -\infty$

AO : asíntota oblicua $y = mx + b$ en el ∞

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{e^{x^3-3x^2}}{x} = \infty$$

Entonces

f (x) no tiene AO para $x \longrightarrow \infty$

Resumiendo asíntotas :

f (x) no tiene AV

f (x) no tiene AH cuando $x \longrightarrow +\infty$

la recta horizontal $y = 0$ es AH de f (x) cuando $x \longrightarrow -\infty$

f (x) no tiene AO para $x \longrightarrow \infty$

Gráfico1 : color azul : $f(x) = e^{x^3-3x^2}$; color naranja; $y = 1$
Gráfico2 : color azul : $f'(x) = 3x e^{x^3-3x^2}(x-2)$;

$x = 0$ es Máximo local o relativo y el valor máximo es 1

$x = 2$ es Mínimo local o relativo y el valor mínimo es $\frac{1}{e^4}$

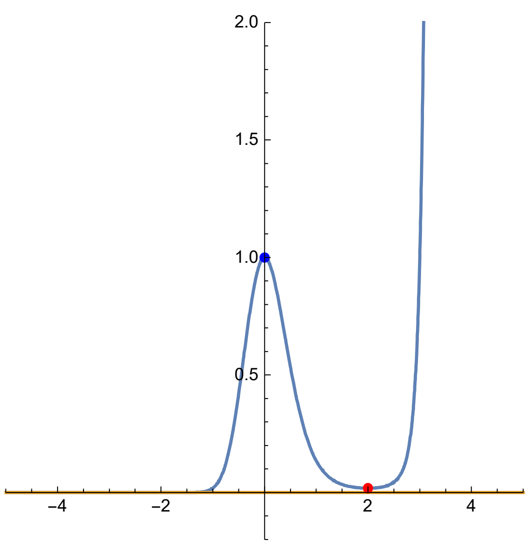
f (x) no tiene AV

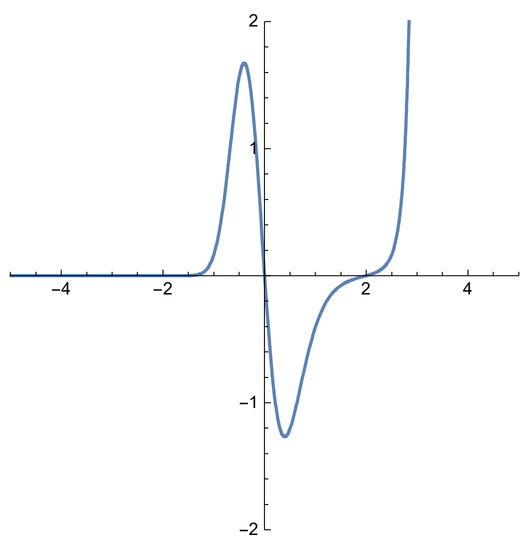
f (x) no tiene AH cuando $x \longrightarrow +\infty$

la recta horizontal $y = 0$ es AH de f (x) cuando $x \longrightarrow -\infty$

la recta vertical $x = 2$ es AV de f (x) cuando $x \longrightarrow (2)^-$ por izquierda y su límite da $-\infty$

f (x) no tiene AO para $x \longrightarrow \infty$





Hallar Dom (f), $I^{\uparrow}$ (f) e $I^{\downarrow}$ (f), extremos locales, AV y AH y graficar

Ej Surt 9 f)

$f(x) = 2x - 6\ln(x)$

Debido al logaritmo deberá ser $x > 0$

Dom (f) = $\mathbb{R}_{>0} = (0, +\infty)$

Analicemos $f(x)$ a partir de su derivada $f'(x)$

Calculemos $f'(x)$:

$f'(x) = [2x - 6\ln(x)]' = [2x]' - [6\ln(x)]' = 2[x]' - 6[\ln(x)]'$

$f'(x) = 2 \cdot 1 - 6 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2x-6}{x} = \frac{2(x-3)}{x}$

$f'(x) = \frac{2(x-3)}{x}$

$$f'(x) = \frac{2(x-3)}{x}$$

$\text{Dom}(f') = \text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{>0} = (0, +\infty)$

si bien $f'(x)$ está definida para $x \neq 0$ su dominio está restringido a $(0, +\infty)$ porque proviene de $f(x)$ que tiene un $\ln(x)$ en su definición

----

Buscamos los puntos críticos de $f(x)$ que son aquellos x en los que $f'(x) = 0$:

$f'(x) = 0 \implies \frac{2(x-3)}{x} = 0 \implies 2(x-3) = 0 \implies x - 3 = 0 \implies x = 3$

$x = 3$ es punto crítico de $f(x)$

$C^0(f') = \{3\}$

Veamos qué tipo de extremos locales es el punto crítico $x = 3$

Criterio de la derivada 1 era :

Como $f'(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}_{>0}$ aplicamos el corolario del

Teorema de Bolzano en los intervalos determinados entre ceros de $f'(x)$

en $x = 3$ y las discontinuidades de $f'(x)$ si las hubiera $(x = 0)$

intervalos de análisis de $f'(x) = \frac{2(x-3)}{x}$:

$(0, 3)$; $(3, +\infty)$

En $(0, 3)$

tomamos $x = 1 \in (0, 3) \Longrightarrow f'(1) = \frac{2(1-3)}{1}$

$\Longrightarrow f'(1) = \frac{2(-2)}{1} = -4 < 0$

En $(3, +\infty)$

tomamos $x = 4 \in (3, +\infty) \Longrightarrow f'(4) = \frac{2(4-3)}{4}$

$\Longrightarrow f'(4) = \frac{2(1)}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0$

Análisis de crecimiento, decrecimiento y extremos locales de f (x) :

Vemos que $f'(x) < 0$ **a la izquierda de** $x = 3$ **y** $f'(x) > 0$ **a la derecha de** $x = 3$

entonces en $x = 3$ **hay un Mínimo local o relativo de f**

El corolario del Teo de Bolzano aplicado a $f'(x)$ **nos permite construir la tabla :**

x	(0, 3)	3	(3, +∞)
f '(x)	< 0	0	> 0
f(x)	es decreciente	MÍN	es creciente

Intervalos de crecimiento y decrecimiento de f
$I^{\uparrow}(f)$ **e** $I^{\downarrow}(f)$ **:**

$I^{\uparrow}(f) = (3, +\infty)$

$I^{\downarrow}(f) = (0, 3)$

Análisis de asíntotas

AV : f (x) puede tener asíntotas verticales en los x que no están en el Dom (f)

y como cerca de $x = 0$ **a la derecha f (x) decrece por el logaritmo**

$x = 0$ **es candidato a ser AV**

Calculemos el límite lateral por derecha de $x = 0$

Para $x \longrightarrow 0^+$:

$$\lim_{x\to 0^+} 2x - 6\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln(x)\left(2\frac{x}{\ln(x)} - 6\right) = \quad (*)$$

----

cálculo auxiliar :

el cociente $2\frac{x}{\ln(x)}$ cuando $x \longrightarrow 0^+$ se comporta como :

el numerador tiende a 0^+

el denominador tiende a $-\infty$

el cociente tiende a $2\frac{0^+}{-\infty} \longrightarrow 0^-$

Por lo tanto el argumento $\left(2\frac{x}{\ln(x)} - 6\right) \longrightarrow 0^- - 6 \longrightarrow -6$

Luego el producto : $\ln(x)\left(2\frac{x}{\ln(x)} - 6\right) \longrightarrow (-\infty)\cdot(-6) \longrightarrow +\infty$

Reemplazando en $(*)$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x)\left(2\frac{x}{\ln(x)} - 6\right) = +\infty$$

Entonces :

la recta vertical $x = 0$ es AV de $f(x)$ para $x \longrightarrow 0^+$ por la derecha y su límite da $+\infty$

Para $x \longrightarrow 0^-$: no tiene sentido porque $f(x)$ no está definida a la izquierda de $x = 0$

AH :

Para $x \longrightarrow +\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty} 2x - 6\ln(x) = \qquad (**)$$

----

cálculo auxiliar :

$$\lim_{x\to +\infty} 2x - 6\ln(x) = \lim_{x\to +\infty} x\left(2 - 6\frac{\ln(x)}{x}\right) \Longrightarrow$$

el cociente $6\frac{\ln(x)}{x}$ cuando $x \longrightarrow +\infty$ tiende a 0 ya que siempre $x > \ln(x)$

Entonces $2 - 6 \frac{\ln(x)}{x}$ **cuando** $x \longrightarrow +\infty$ **tiende a 2**

Luego el producto $x \left(2 - 6 \frac{\ln(x)}{x}\right)$ **cuando** $x \longrightarrow +\infty$ **tiende a** $+\infty$

----

reemplazando en (**)

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} 2x - 6 \ln(x) = +\infty$$

$\Longrightarrow$ **f (x) no tiene AH cuando** $x \longrightarrow +\infty$

Para $x \longrightarrow -\infty$ **: no tiene sentido calcular porque** $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{>0}$

AO : asíntota oblicua y = mx + b en el ∞

$$m = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2x - 6\ln(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(2 - 6 \frac{\ln(x)}{x}\right) = 2 \quad (****)$$

por lo visto en el cálculo de AH :

el argumento $2 - 6 \frac{\ln(x)}{x}$ **cuando** $x \longrightarrow +\infty$ **tiende a 2**

Entonces f (x) puede tener AO con pendiente $m = 2$ **para** $x \longrightarrow +\infty$

Calculemos la ordenada al origen de la AO

$$b = \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \longrightarrow +\infty} 2x - 6\ln(x) - 2x = \lim_{x \longrightarrow +\infty} -6\ln(x) = +\infty$$

Entonces f (x) no tiene AO para $x \longrightarrow +\infty$

Resumiendo asíntotas :

la recta vertical $x = 0$ **es AV de f (x) para** $x \longrightarrow 0^+$ **por la derecha y su límite da** $+\infty$

f (x) no tiene AH cuando $x \longrightarrow +\infty$

f (x) no tiene AO para $x \longrightarrow +\infty$

Gráfico1 : color azul : $f(x) = 2x - 6\ln(x)$;

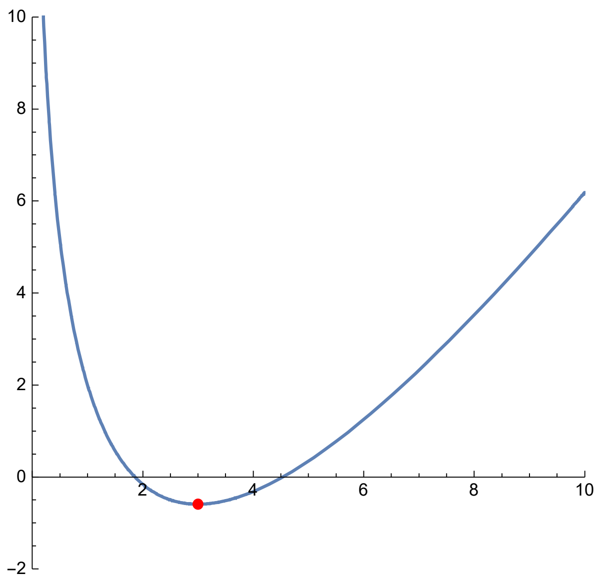
Gráfico2 : color azul : $f'(x) = \dfrac{2(x-3)}{x}$;

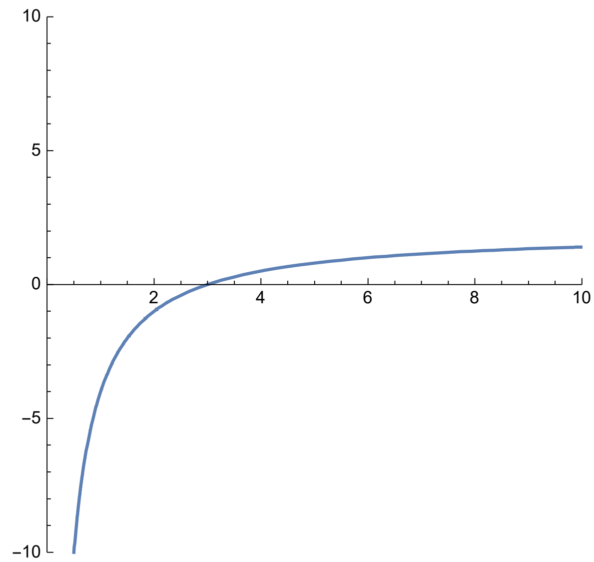
$x = 3$ es Mínimo local o relativo y el valor mínimo es $6 - 6\ln(3)$

la recta vertical $x = 0$ es AV de $f(x)$ para $x \longrightarrow 0^+$ por la derecha y su límite da $+\infty$

$f(x)$ no tiene AH cuando $x \longrightarrow +\infty$

$f(x)$ no tiene AO para $x \longrightarrow \infty$





Hallar Dom (f), $I^{\uparrow}$ (f) e $I^{\downarrow}$ (f), extremos locales, AV y AH y graficar

Ej Surt 9 g)

$f(x) = 3x^2 e^{\frac{1}{3}x}$

Dom (f) = $\mathbb{R}$

Analicemos f (x) a partir de su derivada f' (x)

Calculemos f' (x) :

$$f'(x) = \left[3x^2 e^{\frac{1}{3}x}\right]' = \left[3x^2\right]' \cdot e^{\frac{1}{3}x} + 3x^2 \cdot \left[e^{\frac{1}{3}x}\right]'$$

$$f'(x) = 6x \cdot e^{\frac{1}{3}x} + 3x^2 \cdot e^{\frac{1}{3}x} \cdot \frac{1}{3} = x e^{\frac{1}{3}x}(6 + x)$$

$$f'(x) = x e^{\frac{1}{3}x}(6 + x)$$

$$\mathbf{f'(x) = x e^{\frac{1}{3}x}(6 + x)}$$

$\text{Dom}\left(f'\right) = \text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$

Buscamos los puntos críticos de $f\,(x)$ que son aquellos x en los que $f'\,(x) = 0$:

$f'\,(x) = 0 \implies x\, e^{\frac{1}{3}x}\left(6 + x\right) = 0 \implies x\left(6 + x\right) = 0 \implies x = 0$ ó $6 + x = 0$

$\implies x = 0$ ó $x = -6$

$x = -6$ y $x = 0$ son puntos críticos de $f\,(x)$

$C^0\left(f'\right) = \{-6, 0\}$

Veamos qué tipo de extremos locales son los puntos críticos $x = -6$ y $x = 0$

Criterio de la derivada 1 era :

Como $f'\,(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ aplicamos el corolario del

Teorema de Bolzano en los intervalos determinados entre ceros de $f'\,(x)$

en $x = -6$ y $x = 0$ y las discontinuidades de $f'\,(x)$ si las hubiera

intervalos de análisis de $f'\,(x) = x\, e^{\frac{1}{3}x}\left(6 + x\right)$:

$\left(-\infty, -6\right);\ \left(-6, 0\right);\ \left(0, +\infty\right)$

En $\left(-\infty, -6\right)$

tomamos $x = -7 \in \left(-\infty, -6\right) \implies f'\,(-7) = (-7)\, e^{\frac{1}{3}(-7)}\left(6 + (-7)\right)$

$\implies f'\,(-7) = (-7)\, e^{-\frac{7}{3}}\left(-1\right) = 7\, e^{-\frac{7}{3}} = \dfrac{7}{e^{\frac{7}{3}}} > 0$

En $\left(-6, 0\right)$

tomamos $x = -1 \in \left(-6, 0\right) \implies f'\left(-1\right) = \left(-1\right) e^{\frac{1}{3}(-1)}\left(6 + \left(-1\right)\right)$

$\implies f'\left(-1\right) = \left(-1\right) e^{-\frac{1}{3}}\,(5) = -5\, e^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{-5}{e^{\frac{1}{3}}} < 0$

En $\left(0, +\infty\right)$

tomamos $x = 1 \in \left(0, +\infty\right) \implies f'\left(1\right) = 1\, e^{\frac{1}{3}1}\left(6 + 1\right)$

$\Longrightarrow \quad f'(1) = 1\, e^{\frac{1}{3}}\,(7) = 7\, e^{\frac{1}{3}} > 0$

Análisis de crecimiento, decrecimiento y extremos locales de f (x) :

Vemos que $f'(x) > 0$ a la izquierda de $x = -6$ y $f'(x) < 0$ a la derecha de $x = -6$

entonces en $x = -6$ hay un Máximo local o relativo de f

Vemos que $f'(x) < 0$ a la izquierda de $x = 0$ y $f'(x) > 0$ a la derecha de $x = 0$

entonces en $x = 0$ hay un Mínimo local o relativo de f

El corolario del Teo de Bolzano aplicado a $f'(x)$ nos permite construir la tabla :

x	(-∞, −6)	−6	(−6, 0)	0	(0, +∞)
f '(x)	> 0	0	< 0	0	> 0
f(x)	es creciente	MÁX	es decreciente	MÍN	es creciente

Intervalos de crecimiento y decrecimiento de f
$I^{\uparrow}(f)$ e $I^{\downarrow}(f)$:

$I^{\uparrow}(f) = (-\infty, -6) \cup (0, +\infty)$

$I^{\downarrow}(f) = (-6, 0)$

Análisis de asíntotas

AV : f (x) puede tener asíntotas verticales en los x que no están en el Dom (f)

y como Dom (f) = $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$

f (x) No tiene AV

AH :

Para $x \longrightarrow +\infty$:

$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} 3\, x^2\, e^{\frac{1}{3}x} =$ (*)

----

cálculo auxiliar :

$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} 3\,x^2 = +\infty$ existe

$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} e^{\frac{1}{3}x} = +\infty$ existe

Entonces existe el límite del producto es el producto de los límites

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} 3\,x^2\,e^{\frac{1}{3}x} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} 3\,x^2 \cdot \lim_{x\longrightarrow+\infty} e^{\frac{1}{3}x} = +\infty$$

----

reemplazando en (*)

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} 3\,x^2\,e^{\frac{1}{3}x} = +\infty$$

$\Longrightarrow$ f (x) no tiene AH cuando $x\longrightarrow+\infty$

Para $x\longrightarrow-\infty$:

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} 3\,x^2\,e^{\frac{1}{3}x} = \quad (**)$$

----

cálculo auxiliar :

$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} 3\,x^2 = +\infty$ existe

$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} e^{\frac{1}{3}x} = 0$ existe

Entonces existe el límite del producto es el producto de los límites

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} 3\,x^2\,e^{\frac{1}{3}x} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} 3\,x^2 \cdot \lim_{x\longrightarrow+\infty} e^{\frac{1}{3}x} = 0$$

----

reemplazando en (*)

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} 3\,x^2\,e^{\frac{1}{3}x} = 0$$

$\Longrightarrow$ la recta horizontal y = 0 es AH de f (x) cuando $x\longrightarrow-\infty$

AO : asíntota oblicua y = mx + b en el ∞

$$m = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{3\,x^2\,e^{\frac{1}{3}x}}{x} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} 3\,x\,e^{\frac{1}{3}x} = +\infty$$

Entonces f (x) no tiene AO para $x\longrightarrow+\infty$

Resumiendo asíntotas :

f (x) No tiene AV

f (x) no tiene AH cuando $x \longrightarrow +\infty$ y el límite da $+\infty$

la recta horizontal y = 0 es AH de f (x) cuando $x \longrightarrow -\infty$

f (x) no tiene AO para $x \longrightarrow +\infty$

Gráfico1 : color azul : $f(x) = 3\,x^2\,e^{\frac{1}{3}x}$;

Gráfico2 : color azul : $f'(x) = x\,e^{\frac{1}{3}x}\,(6+x)$;

x = -6 es Máximo local o relativo y el valor máximo es $\dfrac{108}{e^2}$

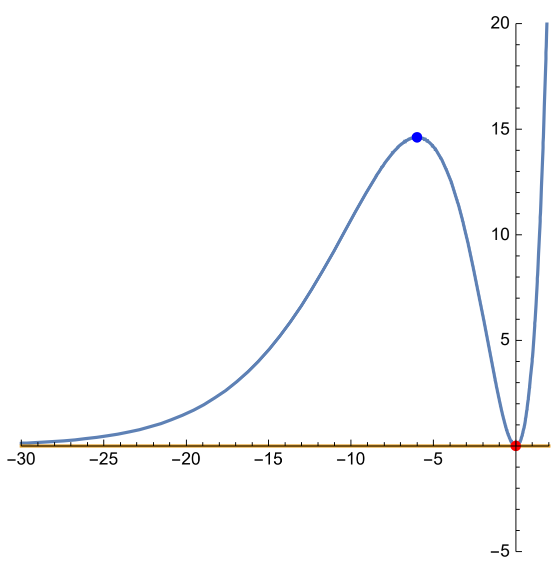
x = 0 es Mínimo local o relativo y el valor mínimo es 0

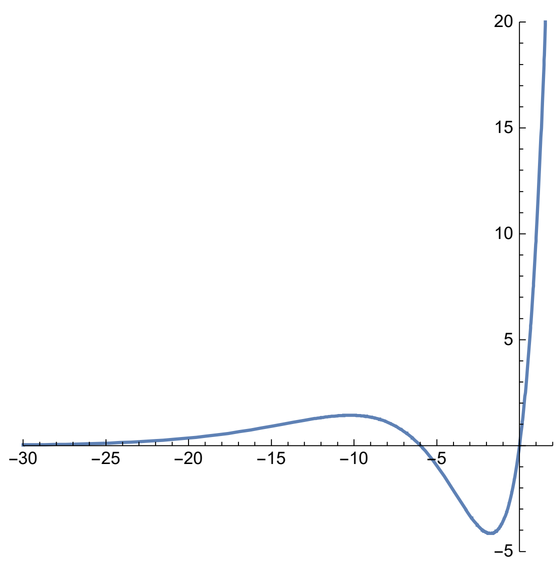
f (x) No tiene AV

f (x) no tiene AH cuando $x \longrightarrow +\infty$ y el límite da $+\infty$

la recta horizontal y = 0 es AH de f (x) cuando $x \longrightarrow -\infty$

f (x) no tiene AO para $x \longrightarrow +\infty$





Hallar Dom (f), $I^{\uparrow}$ (f) e $I^{\downarrow}$ (f), extremos locales, AV y AH y graficar

Ej Surt 9 h)

$$f(x) = 1 + \frac{12}{x^2 - 4x}$$

Para que f (x) esté definida deberá ser $x^2 - 4x \neq 0 \implies x(x-4) \neq 0 \implies$

$\Longrightarrow\ x \neq 0 \ \text{y} \ x \neq 4$

Dom (f) = $\mathbb{R}$ - {0, 4}

Podemos reescribir f (x) como :

$$f(x) = 1 + \frac{12}{x^2 - 4x} = \frac{x^2 - 4x + 12}{x^2 - 4x} = \frac{(x-2)^2 + 8}{x^2 - 4x}$$

Analicemos f (x) a partir de su derivada f' (x)

Calculemos f' (x) :

$$f'(x) = \left[1 + \frac{12}{x^2 - 4x}\right]' = [1]' + \left[12\left(x^2 - 4x\right)^{-1}\right]' = 0 + 12(-1)\left(x^2 - 4x\right)^{-2} \cdot (2x - 4)$$

$$f'(x) = -\frac{12}{\left(x^2 - 4x\right)^2} \cdot (2x - 4) = \frac{-24(x-2)}{\left(x^2 - 4x\right)^2} = \frac{-24(x-2)}{(x(x-4))^2} = \frac{-24(x-2)}{x^2(x-4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-24(x-2)}{x^2(x-4)^2}$$

$$\mathbf{f'(x) = \frac{-24(x-2)}{x^2(x-4)^2}}$$

Dom (f') = Dom (f) = $\mathbb{R}$ - {0, 4}

Buscamos los puntos críticos de f (x) que son aquellos x en los que f' (x) = 0 :

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{-24(x-2)}{x^2(x-4)^2} = 0 \Longrightarrow -24(x-2) = 0 \Longrightarrow x - 2 = 0$$

$\Longrightarrow\ x = 2$

x = 2 es el único punto crítico de f (x)

$C^0(f') = \{2\}$

Veamos qué tipo de extremo local es el punto crítico x = 2

Criterio de la derivada 1 era :

Como f' (x) es continua en todo $\mathbb{R}$ aplicamos el corolario del

Teorema de Bolzano en los intervalos determinados entre ceros de f' (x)

en $x = 2$ **y las discontinuidades de** $f'(x)$ **si las hubiera** $(x = 0$ **y** $x = 4)$

intervalos de análisis de $f'(x) = \dfrac{-24\,(x-2)}{x^2\,(x-4)^2}$ **:**

$(-\infty, 0)$; $(0, 2)$; $(2, 4)$; $(4, +\infty)$

En $(-\infty, 0)$

tomamos $x = -1 \in (-\infty, 0) \implies f'(-1) = \dfrac{-24\,(-1-2)}{(-1)^2\,(-1-4)^2}$

$\implies f'(-1) = \dfrac{-24\,(-3)}{1\,(-5)^2} = \dfrac{72}{125} > 0$

En $(0, 2)$

tomamos $x = 1 \in (0, 2) \implies f'(1) = \dfrac{-24\,(1-2)}{1^2\,(1-4)^2}$

$\implies f'(1) = \dfrac{-24\,(-1)}{1\,(-3)^2} = \dfrac{24}{1\cdot 9} = \dfrac{24}{9} > 0$

En $(2, 4)$

tomamos $x = 3 \in (2, 4) \implies f'(3) = \dfrac{-24\,(3-2)}{3^2\,(3-4)^2}$

$\implies f'(3) = \dfrac{-24\,(1)}{9\,(-1)^2} = \dfrac{-24}{9\cdot 1} = \dfrac{-24}{9} < 0$

En $(4, +\infty)$

tomamos $x = 5 \in (4, +\infty) \implies f'(5) = \dfrac{-24\,(5-2)}{5^2\,(5-4)^2}$

$\implies f'(5) = \dfrac{-24\,(3)}{25\,(1)^2} = \dfrac{-72}{25\cdot 1} = \dfrac{-72}{25} < 0$

Análisis de crecimiento, decrecimiento y extremos locales de $f(x)$ **:**

Vemos que $f'(x) > 0$ **a la izquierda de** $x = 0$ **y** $f'(x) > 0$ **a la derecha de** $x = 0$

pero en $x = 0$ **hay una discontinuidad de f**

Vemos que $f'(x) > 0$ **a la izquierda de** $x = 2$ **y** $f'(x) < 0$ **a la derecha de** $x = 2$

entonces en $x = 2$ hay un Máximo local o relativo de f

Vemos que $f'(x) < 0$ a la izquierda de $x = 4$ y $f'(x) < 0$ a la derecha de $x = 4$

pero en $x = 4$ hay una discontinuidad de f

El corolario del Teo de Bolzano aplicado a $f'(x)$ nos permite construir la tabla :

x	(-∞, 0)	0	(0, 2)	2	(2, 4)	4	(4, +∞)
f '(x)	> 0	No Existe	> 0	0	< 0	No Existe	< 0
f(x)	es creciente	No Existe	es creciente	MÁX	es decreciente	No Existe	es decreciente

----

Intervalos de crecimiento y decrecimiento de f
$I^{\uparrow}(f)$ e $I^{\downarrow}(f)$:

$I^{\uparrow}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, 2)$

$I^{\downarrow}(f) = (2, 4) \cup (4, +\infty)$

Análisis de asíntotas

AV : $f(x)$ puede tener asíntotas verticales en los x que no están en el Dom (f)

y como $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0, 4\}$ $\Longrightarrow$ los candidatos a AV son $x = 0$ y $x = 4$

$$f(x) = 1 + \frac{12}{x^2 - 4x} = \frac{x^2 - 4x + 12}{x^2 - 4x} = \frac{x^2 - 4x + 12}{x(x-4)}$$

Calculemos los límites laterales de $f(x) = 1 + \dfrac{12}{x^2 - 4x}$ en $x = 0$ y $x = 4$

Observemos que podemos reescribir $f(x)$ como :

$$f(x) = 1 + \frac{12}{x^2 - 4x} = \frac{x^2 - 4x + 12}{x^2 - 4x} = \frac{x^2 - 4x + 12}{x(x-4)}$$

Para $x \longrightarrow (0)^+$:

$$\lim_{x \longrightarrow (0)^+} \frac{x^2 - 4x + 12}{x(x-4)} = \lim_{x \longrightarrow (0)^+} \frac{x^2 - 4x + 12}{x(x-4)} \quad (*)$$

----

cálculo auxiliar :

si $x \longrightarrow (0)^+$ el cociente $\frac{x^2 - 4x + 12}{x(x-4)}$ tiende a $\frac{12}{0^+ \cdot (-4)} \longrightarrow -\infty$ reemplazando en (*)

----

entonces $\lim\limits_{x \longrightarrow (-2)^+} \frac{x^2 - 4x + 12}{x(x-4)} = -\infty$

$\Longrightarrow$ $x = 0$ es AV de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow (0)^+$ por derecha y su límite da $-\infty$

Para $x \longrightarrow (0)^-$:

$\lim\limits_{x \longrightarrow (0)^-} \frac{x^2 - 4x + 12}{x(x-4)} = \lim\limits_{x \longrightarrow (0)^-} \frac{x^2 - 4x + 12}{x(x-4)}$ (**)

----

cálculo auxiliar :

si $x \longrightarrow (0)^-$ el cociente $\frac{x^2 - 4x + 12}{x(x-4)}$ tiende a $\frac{12}{0^- \cdot (-4)} \longrightarrow +\infty$ reemplazando en (**)

----

entonces $\lim\limits_{x \longrightarrow (0)^-} \frac{x^2}{(x-2)(x+2)} = +\infty$

$\Longrightarrow$ $x = 0$ es AV de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow (0)^-$ por izquierda y su límite da $+\infty$

Calculemos los límites laterales de

$f(x) = 1 + \frac{12}{x^2 - 4x} = \frac{x^2 - 4x + 12}{x(x-4)}$ en $x = 4$

Para $x \longrightarrow (4)^+$:

$\lim\limits_{x \longrightarrow (4)^+} 1 + \frac{12}{x^2 - 4x} = \lim\limits_{x \longrightarrow (4)^+} \frac{x^2 - 4x + 12}{x(x-4)}$ (***)

----

cálculo auxiliar :

si $x \longrightarrow (4)^+$ el cociente $\frac{x^2 - 4x + 12}{x(x-4)}$ tiende a $\frac{12}{4 \cdot 0^+} \longrightarrow +\infty$ reemplazando en (***)

----

entonces $\lim\limits_{x \longrightarrow (4)^+} \frac{x^2 - 4x + 12}{x(x-4)} = +\infty$

$\Longrightarrow$ $x = 4$ es AV de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow (4)^+$ por derecha y su límite da $+\infty$

Para $x \longrightarrow (4)^-$:

$$\lim_{x\longrightarrow(4)^-} 1+\frac{12}{x^2-4x} = \lim_{x\longrightarrow(4)^-} \frac{x^2-4x+12}{x(x-4)} \quad (****)$$

----

cálculo auxiliar :

si $x\longrightarrow(4)^-$ el cociente $\dfrac{x^2-4x+12}{x(x-4)}$ tiende a $\dfrac{12}{4\cdot 0^-}\longrightarrow -\infty$ reemplazando en (****)

----

entonces $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow(4)^-} \frac{x^2-4x+12}{x(x-4)} = -\infty$

$\Longrightarrow$ x = 4 es AV de f (x) cuando $x\longrightarrow(4)^-$ por izquierda y su límite da $-\infty$

AH :

Para $x\longrightarrow+\infty$:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} 1+\frac{12}{x^2-4x} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x^2-4x+12}{x^2-4x} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{12}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\left(1-\frac{4}{x}+\frac{12}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{4}{x}\right)} = 1$$

$\Longrightarrow$ la recta horizontal y = 1 es AH de f (x) cuando $x\longrightarrow+\infty$

Para $x\longrightarrow-\infty$:

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} 1+\frac{12}{x^2-4x} = \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{x^2-4x+12}{x^2-4x} = \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{12}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{\left(1-\frac{4}{x}+\frac{12}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{4}{x}\right)} = 1$$

$\Longrightarrow$ la recta horizontal y = 1 es AH de f (x) cuando $x\longrightarrow-\infty$

AO : asíntota oblicua y = mx + b en el ∞

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{1+\frac{12}{x^2-4x}}{x} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{x^2-4x+12}{x^2-4x}}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\left(1-\frac{4}{x}+\frac{12}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{4}{x}\right)} = 0$$

Entonces f (x) no tiene AO para $x\longrightarrow\infty$

Resumiendo asíntotas :

x = 0 es AV de f (x) cuando $x \longrightarrow (0)^{+}$ por derecha y su límite da $-\infty$

x = 0 es AV de f (x) cuando $x \longrightarrow (0)^{-}$ por izquierda y su límite da $+\infty$

x = 4 es AV de f (x) cuando $x \longrightarrow (4)^{+}$ por derecha y su límite da $+\infty$

x = 4 es AV de f (x) cuando $x \longrightarrow (4)^{-}$ por izquierda y su límite da $-\infty$

la recta horizontal y = 1 es AH de f (x) cuando $x \longrightarrow +\infty$

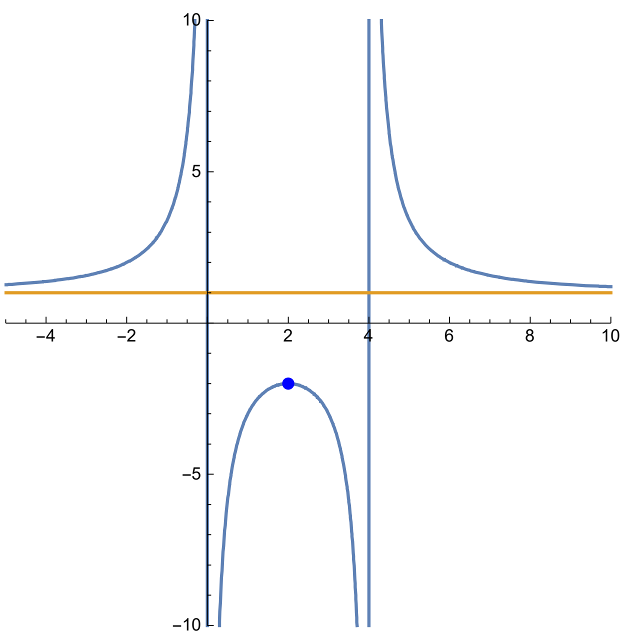
la recta horizontal y = 1 es AH de f (x) cuando $x \longrightarrow -\infty$

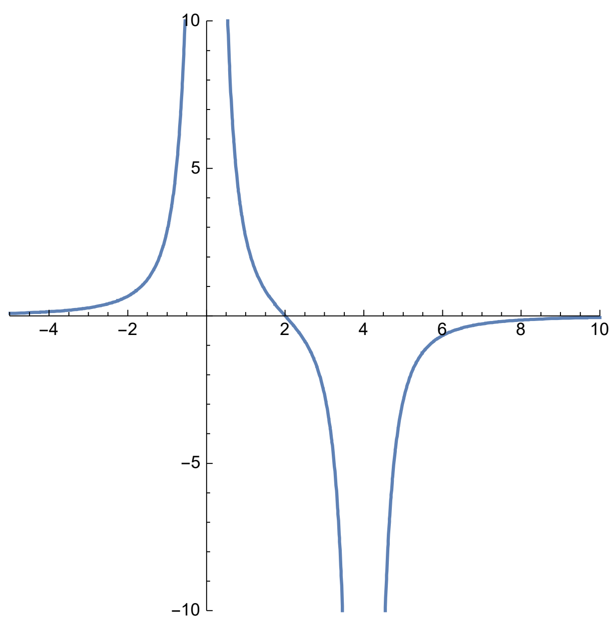
f (x) no tiene AO para $x \longrightarrow +\infty$

Gráfico1 : color azul : $f(x) = 1 + \dfrac{12}{x^2 - 4x}$;

Gráfico2 : color azul : $f'(x) = \dfrac{-24\,(x-2)}{x^2\,(x-4)^2}$;

x = 0 es una discontinuidad de f (x)
x = 2 es Máximo local o relativo y el valor máximo es -2
x = 4 es una discontinuidad de f (x)
x = 0 es AV de f (x) cuando $x \longrightarrow (0)^{+}$ por derecha y su límite da $-\infty$
x = 0 es AV de f (x) cuando $x \longrightarrow (0)^{-}$ por izquierda y su límite da $+\infty$
x = 4 es AV de f (x) cuando $x \longrightarrow (4)^{+}$ por derecha y su límite da $+\infty$
x = 4 es AV de f (x) cuando $x \longrightarrow (4)^{-}$ por izquierda y su límite da $-\infty$
la recta horizontal y = 1 es AH de f (x) cuando $x \longrightarrow +\infty$
la recta horizontal y = 1 es AH de f (x) cuando $x \longrightarrow -\infty$
f (x) no tiene AO para $x \longrightarrow +\infty$





+-+

Ejercicio 10.- Sea $f(x) = x - \frac{k}{x}$. Determinar k de modo que f tenga un máximo local para $x = -1$. Para el valor de k hallado, determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, todos los extremos locales y hacer un gráfico aproximado.

Ej Surt 10

$f(x) = x - \frac{k}{x}$, encontrar k para que $x = -1$ sea un máximo local de $f(x)$

Con ese k, calcular Dom (f), $I^{\uparrow}(f)$ e $I^{\downarrow}(f)$, extremos locales y graficar

----

Para que $x = -1$ sea un máximo local deberá ser un punto crítico de $f(x)$ es decir $f'(-1) = 0$

Calculemos $f'(x)$:

$$f'(x) = \left[x - \frac{k}{x}\right]' = \left[x - k\,x^{-1}\right]' = [x]' - k\left[x^{-1}\right]' = 1 - k(-1)\,x^{-2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{k}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{k}{x^2}$$

Como $f'(-1) = 0$ para que $x = -1$ sea pto crítico :

$$f'(-1) = 1 + \frac{k}{(-1)^2} = 1 + \frac{k}{1} = 1 + k = 0 \implies k = -1$$

$k = -1$ para que $x = -1$ sea pto crítico

Veamos que $x = -1$ sea máximo usando el criterio de la derivada 2 da

----

Con $k = -1$ es $f(x) = x + \frac{1}{x}$; $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

Calculemos $f''(x)$:

$$f''(x) = \left[1 - \frac{1}{x^2}\right]' = [1]' - \left[\frac{1}{x^2}\right]' = 0 - \left[x^{-2}\right]' = \left[x^{-2}\right]' = -(-2)\,x^{-3}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

El criterio de la derivada segunda establece que :

1) si x_0 es punto crítico de $f(x)$ (es decir $f'(x_0) = 0$) y si $f''(x_0) > 0$ entonces x_0 es un **Mínimo** local de $f(x)$

2) si x_0 es punto crítico de $f(x)$ (es decir $f'(x_0) = 0$) y si $f''(x_0) < 0$ entonces x_0 es un **Máximo** local de $f(x)$

3) si x_0 es punto crítico de $f(x)$ (es decir $f'(x_0) = 0$) y si $f''(x_0) = 0$ el criterio falla y no se puede decidir sobre x_0

Evaluemos $f''(-1)$

$$f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} = \frac{2}{(-1)} = -2 < 0$$

Por 2) $x = -1$ es un **Máximo** local de $f(x)$

Por lo tanto con $k = -1$

$f(x) = x - \frac{k}{x} = x + \frac{1}{x}$ tiene un máximo local en $x = -1$

Análisis de $f(x) = x + \frac{1}{x}$

calcular $\mathrm{Dom}(f)$, $I^{\uparrow}(f)$ e $I^{\downarrow}(f)$, extremos locales y graficar

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Como $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ buscamos todos los puntos críticos de $f(x)$

$$1 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 1$$

$\Longrightarrow$ $x = 1$ ó $x = -1$ son los puntos críticos de $f(x)$

$C^0(f') = \{-1, 1\}$

Como $f'(x)$ es continua en todo $\mathbb{R} - \{0\}$ aplicamos el corolario del Teorema de Bolzano en los intervalos determinados entre ceros de $f'(x)$ en $x = -1$ y $x = 1$ y las discontinuidades de $f'(x)$ si las hubiera $(x = 0)$

intervalos de análisis de $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$:

$(-\infty, -1)$; $(-1, 0)$; $(0, 1)$; $(1, +\infty)$

En $(-\infty, -1)$

tomamos x $= -2 \in (-\infty, -1) \implies f'(-2) = 1 - \frac{1}{x^2}$

$\implies f'(-2) = 1 - \frac{1}{(-2)^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$

En $(-1, 0)$

tomamos x $= -\frac{1}{2} \in (-1, 0) \implies f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$

$\implies f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{4}} = 1 - 4 = -3 < 0$

En $(0, 1)$

tomamos x $= 3 \in (0, 1) \implies f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$\implies f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{4}} = 1 - 4 = -3 < 0$

En $(1, +\infty)$

tomamos x $= 2 \in (1, +\infty) \implies f'(2) = 1 - \frac{1}{2^2}$

$\implies f'(2) = 1 - \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$

Análisis de crecimiento, decrecimiento y extremos locales de f (x) :

Vemos que $f'(x) > 0$ **a la izquierda de** $x = -1$ **y** $f'(x) < 0$ **a la derecha de** $x = -1$

entonces en $x = -1$ **hay un Máximo local o relativo de f**

Vemos que $f'(x) < 0$ **a la izquierda de** $x = 0$ **y** $f'(x) < 0$ **a la derecha de** $x = 0$

pero en $x = 0$ **hay una discontinuidad de f**

Vemos que $f'(x) < 0$ **a la izquierda de** $x = 1$ **y** $f'(x) > 0$ **a la derecha de** $x = 1$

entonces en $x = -1$ **hay un Mínimo local o relativo de f**

El corolario del Teo de Bolzano aplicado a $f'(x)$ **nos permite construir la tabla :**

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f '(x)	> 0	0	< 0	No Existe	< 0	0	> 0
f(x)	es creciente	MÁX	es decreciente	No Existe	es decreciente	MÍN	es creciente

----

Intervalos de crecimiento y decrecimiento de f
$I^{\uparrow}$ (f) e $I^{\downarrow}$ (f) :

$I^{\uparrow}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$I^{\downarrow}(f) = (-1, 0) \cup (0, 1)$

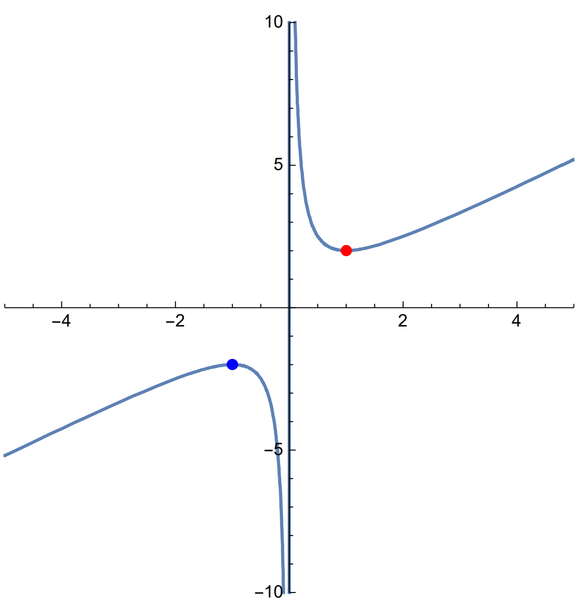
Gráfico1 : color azul : $f(x) = x + \frac{1}{x}$;

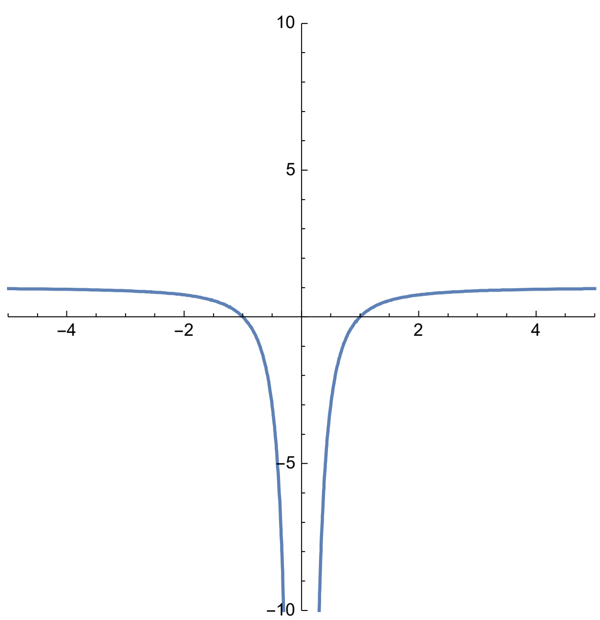
Gráfico2 : color azul : $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$;

x = -1 es Máximo local o relativo y el valor máximo es -2

x = 0 es una discontinuidad de f (x)

x = 1 es Mínimo local o relativo y el valor máximo es 2





+-+

Ejercicio 11.- Sea $f(x)=\dfrac{16}{x^2(x-4)}$. Dar el dominio, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los extremos locales y las ecuaciones de las asíntotas verticales de f. Graficar.

Ej Surt 11

$$f(x) = \frac{16}{x^2\,(x-4)}$$

calcular Dom (f), $I^{\uparrow}$ (f) e $I^{\downarrow}$ (f), extremos locales, AV y graficar

----

Para que f (x) esté definida deberá ser $x^2\,(x-4) \neq 0$

$\Longrightarrow\ x^2\,(x-4) \neq 0 \ \Longrightarrow\ x^2 \neq 0\ \text{ y }\ (x-4) \neq 0 \ \Longrightarrow\ x \neq 0\ \text{ y }\ x \neq 4$

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0,\,4\}$

Buscamos los puntos críticos de f (x) que son aquellos x en los que $f'(x) = 0$:

Calculemos $f'(x)$:

$$f'(x) = \left[\frac{16}{x^2\,(x-4)}\right]' = \left[\frac{16}{x^3-4x^2}\right]' = 16\left[\left(x^3-4x^2\right)^{-1}\right]'$$

$$f'(x) = 16\,(-1)\,\left(x^3-4x^2\right)^{-2}\,\left(3x^2-8x\right) = \frac{-16\,\left(3x^2-8x\right)}{\left(x^3-4x^2\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-16\,x\,(3x-8)}{\left(x^3-4x^2\right)^2} = \frac{-16\,x\,(3x-8)}{\left(x^2\,(x-4)\right)^2} = \frac{-16\,x\,(3x-8)}{x^4\,(x-4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-16\,(3x-8)}{x^3\,(x-4)^2}$$

Planteamos $f'(x) = 0$ para obtener los puntos críticos de f (x) :

$$f'(x) = 0 \ \Longrightarrow\ \frac{-16\,(3x-8)}{x^3\,(x-4)^2} = 0 \ \Longrightarrow\ -16\,(3x-8) = 0$$

$$\Longrightarrow\ (3x-8) = 0 \ \Longrightarrow\ x = \frac{8}{3} \ \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow\ x = \dfrac{8}{3}$ es punto crítico de f (x)

$$C^0\left(f'\right) = \left\{\frac{8}{3}\right\}$$

Veamos qué tipo de extremo local es el punto crítico $x = \frac{8}{3}$

Criterio de la derivada 1 era :

Como $f'(x)$ **es continua en todo** $\mathbb{R} - \{0, 4\}$ **aplicamos el corolario del**

Teorema de Bolzano en los intervalos determinados entre ceros de $f'(x)$

en $x = \frac{8}{3}$ **y las discontinuidades de** $f'(x)$ **si las hubiera** $(x = 0$ **y** $x = 4)$

intervalos de análisis de $f'(x) = \dfrac{-16\,(3\,x - 8)}{x^3\,(x - 4)^2}$ **:**

$(-\infty, 0)$; $\left(0, \frac{8}{3}\right)$; $\left(\frac{8}{3}, 4\right)$; $(4, +\infty)$

En $(-\infty, 0)$

tomamos $x = -1 \in (-\infty, 0) \implies f'(-1) = \dfrac{-16\,(3\,(-1) - 8)}{(-1)^3\,(-1 - 4)^2}$

$\implies f'(-1) = \dfrac{-16\,(-11)}{(-1)\,(-5)^2} = \dfrac{16 \cdot 11}{(-1)\,25} = \dfrac{176}{-25} < 0$

En $\left(0, \frac{8}{3}\right)$

tomamos $x = 1 \in \left(0, \frac{8}{3}\right) \implies f'(1) = \dfrac{-16\,(3 \cdot 1 - 8)}{1^3\,(1 - 4)^2}$

$\implies f'(1) = \dfrac{-16\,(-5)}{1\,(-3)^2} = \dfrac{80}{9} > 0$

En $\left(\frac{8}{3}, 4\right)$

tomamos $x = 3 \in \left(\frac{8}{3}, 4\right) \implies f'(3) = \dfrac{-16\,(3 \cdot 3 - 8)}{3^3\,(3 - 4)^2}$

$\implies f'(3) = \dfrac{-16\,(9 - 8)}{27\,(-1)^2} = \dfrac{-16\,(1)}{27 \cdot 1} = \dfrac{-16}{27} < 0$

En $(4, +\infty)$

tomamos $x = 5 \in (4, +\infty) \implies f'(5) = \dfrac{-16\,(3 \cdot 5 - 8)}{5^3\,(5-4)^2}$

$\implies f'(5) = \dfrac{-16\,(3 \cdot 5 - 8)}{125\,(1)^2} = \dfrac{-16\,(7)}{125} < 0$

Análisis de crecimiento, decrecimiento y extremos locales de $f(x)$ **:**

Vemos que $f'(x) < 0$ **a la izquierda de** $x = 0$ **y** $f'(x) > 0$ **a la derecha de** $x = 0$

pero en $x = 0$ **hay una discontinuidad de f**

Vemos que $f'(x) > 0$ **a la izquierda de** $x = \frac{8}{3}$ **y** $f'(x) < 0$ **a la derecha de** $x = \frac{8}{3}$

entonces en $x = \frac{8}{3}$ **hay un Máximo local o relativo de f**

Vemos que $f'(x) < 0$ **a la izquierda de** $x = 4$ **y** $f'(x) < 0$ **a la derecha de** $x = 4$

pero en $x = 4$ **hay una discontinuidad de f**

El corolario del Teo de Bolzano aplicado a $f'(x)$ **nos permite construir la tabla :**

x	(-∞, 0)	0	(0, 8/3)	8/3	(8/3, 4)	4	(4, +∞)
f '(x)	< 0	No Existe	> 0	0	< 0	No Existe	< 0
f(x)	es decreciente	No Existe	es creciente	MÁX	es decreciente	No Existe	es decreciente

----

Intervalos de crecimiento y decrecimiento de f
$I^{\uparrow}(f)$ **e** $I^{\downarrow}(f)$ **:**

$I^{\uparrow}(f) = \left(0, \frac{8}{3}\right)$

$I^{\downarrow}(f) = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{8}{3}, 4\right) \cup (4, +\infty)$

Análisis de asíntotas

AV : f (x) puede tener asíntotas verticales en los x que no están en el Dom (f)

y como $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0, 4\} \implies$ **los candidatos a AV son** $x = 0$ **y** $x = 4$

Calculemos los límites laterales de $f(x) = \dfrac{16}{x^2\ (x-4)}$ en $x = 0$ y $x = 4$

Para $x \longrightarrow (0)^+$:

$$\lim_{x \longrightarrow (0)^+} \frac{16}{x^2\ (x-4)} = \qquad (*)$$

----

cálculo auxiliar :

si $x \longrightarrow (0)^+$ el cociente $\dfrac{16}{x^2\ (x-4)}$ tiende a $\dfrac{16}{0^+ \cdot (-4)} \longrightarrow -\infty$ reemplazando en (*)

----

entonces $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow (0)^+} \frac{16}{x^2\ (x-4)} = -\infty$

$\Longrightarrow$ $x = 0$ es AV de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow (0)^+$ por derecha y su límite da $-\infty$

Para $x \longrightarrow (0)^-$:

$$\lim_{x \longrightarrow (0)^-} \frac{16}{x^2\ (x-4)} = \qquad (**)$$

----

cálculo auxiliar :

si $x \longrightarrow (0)^-$ el cociente $\dfrac{16}{x^2\ (x-4)}$ tiende a $\dfrac{16}{0^+ \cdot (-4)} \longrightarrow -\infty$ reemplazando en (**)

----

entonces $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow (0)^-} \frac{16}{x^2\ (x-4)} = +\infty$

$\Longrightarrow$ $x = 0$ es AV de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow (0)^-$ por izquierda y su límite da $-\infty$

Calculemos los límites laterales de

$f(x) = \dfrac{16}{x^2\ (x-4)}$ en $x = 4$

Para $x \longrightarrow (4)^+$:

$$\lim_{x \longrightarrow (4)^+} \frac{16}{x^2\ (x-4)} = \qquad (***)$$

----

cálculo auxiliar :

si $x \longrightarrow (4)^+$ el cociente $\frac{16}{x^2\ (x-4)}$ tiende a $\frac{16}{16 \cdot 0^+} \longrightarrow +\infty$ reemplazando en (***)

----

entonces $\lim_{x \longrightarrow (4)^+} \frac{16}{x^2\ (x-4)} = +\infty$

$\Longrightarrow$ x = 4 es AV de f (x) cuando $x \longrightarrow (4)^+$ por derecha y su límite da $+\infty$

Para $x \longrightarrow (4)^-$:

$$\lim_{x \longrightarrow (4)^-} \frac{16}{x^2\ (x-4)} = \quad (****)$$

----

cálculo auxiliar :

si $x \longrightarrow (4)^-$ el cociente $\frac{16}{x^2\ (x-4)}$ tiende a $\frac{16}{16 \cdot 0^-} \longrightarrow -\infty$ reemplazando en (****)

----

entonces $\lim_{x \longrightarrow (4)^-} \frac{16}{x^2\ (x-4)} = -\infty$

$\Longrightarrow$ x = 4 es AV de f (x) cuando $x \longrightarrow (4)^-$ por izquierda y su límite da $-\infty$

AH :

Para $x \longrightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{16}{x^2\ (x-4)} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{16}{x^2\ x \left(1 - \frac{4}{x}\right)} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{16}{x^3\ \left(1 - \frac{4}{x}\right)} = 0$$

$\Longrightarrow$ la recta horizontal y = 0 es AH de f (x) cuando $x \longrightarrow +\infty$

Para $x \longrightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{16}{x^2\ (x-4)} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{16}{x^2\ x \left(1 - \frac{4}{x}\right)} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{16}{x^3\ \left(1 - \frac{4}{x}\right)} = 0$$

$\Longrightarrow$ la recta horizontal y = 0 es AH de f (x) cuando $x \longrightarrow -\infty$

AO : asíntota oblicua y = mx + b en el ∞

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f\ (x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{16}{x^2\ (x-4)}}{x} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{16}{x \cdot x^2\ (x-4)} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{16}{x^3\ (x-4)} = 0$$

Entonces f (x) no tiene AO para $x \longrightarrow \infty$

Resumiendo asíntotas :

x = 0 es AV de f (x) cuando $x \longrightarrow (0)^+$ por derecha y su límite da $-\infty$

x = 0 es AV de f (x) cuando $x \longrightarrow (0)^-$ por izquierda y su límite da $-\infty$

x = 4 es AV de f (x) cuando $x \longrightarrow (4)^+$ por derecha y su límite da $+\infty$

x = 4 es AV de f (x) cuando $x \longrightarrow (4)^-$ por izquierda y su límite da $-\infty$

la recta horizontal y = 0 es AH de f (x) cuando $x \longrightarrow +\infty$

la recta horizontal y = 0 es AH de f (x) cuando $x \longrightarrow -\infty$

f (x) no tiene AO para $x \longrightarrow +\infty$

Gráfico1 : color azul : $f(x) = \dfrac{16}{x^2\,(x-4)}$;

Gráfico2 : color azul : $f'(x) = \dfrac{-16\,(3x-8)}{x^3\,(x-4)^2}$;

x = 0 es una discontinuidad de f (x)

$x = \dfrac{8}{3}$ es Máximo local o relativo y el valor máximo es $-\dfrac{27}{16}$

x = 4 es una discontinuidad de f (x)

x = 0 es AV de f (x) cuando $x \longrightarrow (0)^+$ por derecha y su límite da $-\infty$

x = 0 es AV de f (x) cuando $x \longrightarrow (0)^-$ por izquierda y su límite da $-\infty$

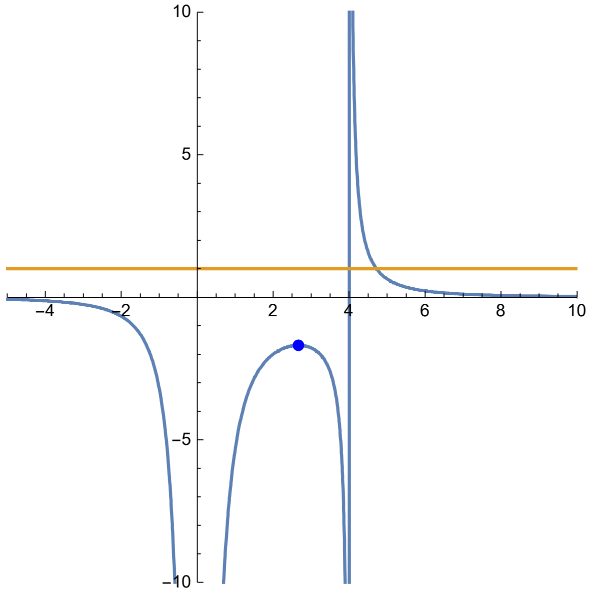
x = 4 es AV de f (x) cuando $x \longrightarrow (4)^+$ por derecha y su límite da $+\infty$

x = 4 es AV de f (x) cuando $x \longrightarrow (4)^-$ por izquierda y su límite da $-\infty$

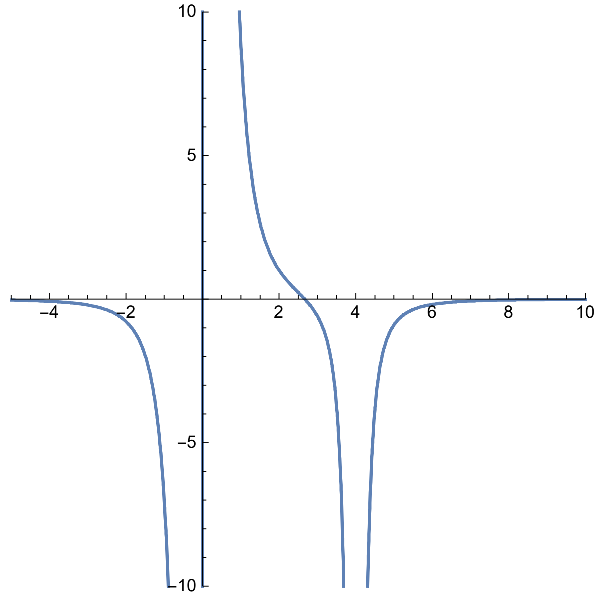
la recta horizontal y = 0 es AH de f (x) cuando $x \longrightarrow +\infty$

la recta horizontal y = 0 es AH de f (x) cuando $x \longrightarrow -\infty$

f (x) no tiene AO para $x \longrightarrow +\infty$



10
5
-5
-10
-4
-2
2
4
6
8
10



10
5
-5
-10
-4
-2
2
4
6
8
10

+-++-+-+-+-++-+-+-+