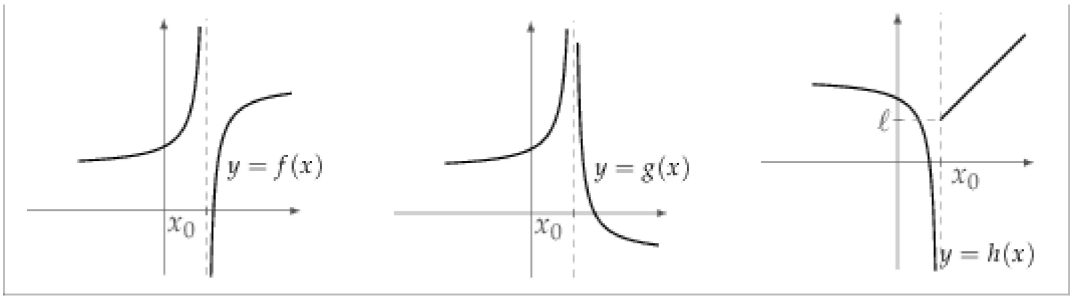
Asíntotas verticales

Si f es una función tal que

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

o si se dan ambas situaciones simultáneamente, se dice que la recta $x = x_0$ es una *asíntota vertical* para f.

Por ejemplo, las funciones f, g y h cuyos gráficos son los siguientes tienen asíntota vertical $x = x_0$:



En el caso de la función h observamos que, si bien $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \ell$ no es infinito, se tiene que $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$.

La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tiene asíntota vertical $x = 0$; en efecto, $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

En general, las funciones de la forma $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde p y q son funciones continuas (por ejemplo, polinomios), sólo pueden tener asíntotas verticales $x = x_0$ para valores de x_0 que no pertenecen al dominio, es decir, ceros de la función q. (Ojo: en estos puntos *puede* haber una asíntota vertical, pero no necesariamente la hay.)

Ejemplos

Analicemos la existencia de asíntotas verticales para cada una de las siguientes funciones.

1) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x + 3}$

El dominio de f es el conjunto de todos los números reales x tales que $x + 3 \neq 0$; luego, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$. Vemos que $x = -3$ es una asíntota vertical para f, ya que

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{\overbrace{2x^2 - 1}^{\to 17}}{\underbrace{x + 3}_{\to 0^-}} = -\infty$$

En este caso también vale que $\lim_{x\to -3^+} \dfrac{\overbrace{2x^2 - 1}^{\to 17}}{\underbrace{x + 3}_{\to 0^+}} = +\infty$.

La única asíntota vertical para f es la recta de ecuación $\boxed{x = -3}$.

2) $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x}{x^2}$

En este caso, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ y, como se vio en el ejemplo **3** de Límites puntuales,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-x^2 + 2x}{x^2} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^2 + 2x}{x^2} = -\infty.$$

Luego, la recta $\boxed{x = 0}$ es asíntota vertical para f (y es la única).

3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

Tenemos que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, pero f <u>no tiene asíntotas verticales</u>, ya que, como vimos en el ejemplo **4** de Límites puntuales,

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

4) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$

Los valores de x para los cuales se anula el denominador de f son las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - x = 0$. Resolviendo esta ecuación obtenemos $x = 0$ y $x = 1$. Entonces, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

Como se vio en el ejemplo **5** de Límites puntuales, $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = 3$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = 3$; en consecuencia, $x = 1$ no es una asíntota vertical para f. Por otro lado,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\overbrace{x^2 + x - 2}^{\to -2}}{\underbrace{\underbrace{x}_{\to 0^-} \underbrace{(x - 1)}_{\to -1}}_{\to 0^+}} = -\infty$$

lo que implica que $x = 0$ es asíntota vertical para f. El lector puede verificar también que vale $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = +\infty$

La única asíntota vertical para f es la recta de ecuación $\boxed{x = 0}$.