PRÁCTICA 4
ESPACIOS VECTORIALES – SUBESPACIOS

Ejercicio 1.- Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios.

a) $\mathbb{W}=\left\{\left(x_1,x_2,x_3\right)\in\mathbb{R}^3 / x_1-x_2+2x_3=0\right\}$

b) $\mathbb{W}=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in\mathbb{R}^2 / x_1+x_2\leq 0\right\}$

c) $\mathbb{W}=\left\{A\in\mathbb{R}^{2\times2} / a_{11}+a_{22}=0\right\}$

d) $\mathbb{W}=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in\mathbb{R}^2 / x_1\cdot x_2=0\right\}$

e) $\mathbb{W}=\left\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3 / \mathbf{v}=\lambda(1,-2,1),\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$

f) $\mathbb{W}=\left\{X\in\mathbb{R}^{2\times1} / \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}.X=X\right\}$

g) $\mathbb{W}=\left\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n / \mathbf{w}.\mathbf{v}=0\right\}$ donde w es un vector fijo de $\mathbb{R}^n$.

h) El plano Π que contiene a los puntos $(2,-4,-1)$, $(6,4,5)$ y $(5,2,3)$.

Ejercicio 2.- Decidir cuáles de los vectores dados pertenecen al subespacio $\mathbb{S}$.

a) $\mathbb{S}=\left\langle(1,-2,4)\right\rangle$ $\quad\mathbf{u}=(\frac{1}{4},-\frac{1}{2},1)$; $\mathbf{v}=(2,-4,4)$; $\mathbf{w}=(0,0,0)$

b) $\mathbb{S}=\left\langle(1,-1,3),(2,1,-1)\right\rangle$ $\quad\mathbf{v}=(0,-3,2)$; $\mathbf{w}=(-1,-5,11)$

c) $\mathbb{S}=\left\langle(1,-1,2,4),(2,1,3,-1),(0,-2,1,0)\right\rangle$ $\quad\mathbf{v}=(3,2,4,3)$; $\mathbf{w}=(0,-1,0,1)$

Ejercicio 3.- Hallar $a\in\mathbb{R}$ para que el vector **w** pertenezca al subespacio $\mathbb{S}$.

a) $\mathbb{S}=\left\langle(1,2,1),(-1,3,2)\right\rangle$ $\quad\mathbf{w}=(2,a,0)$

b) $\mathbb{S}=\left\langle(1,0,0,1),(0,2,1,-1),(1,a,-1,0)\right\rangle$ $\quad\mathbf{w}=(1,-1,2,3)$

Ejercicio 4.- Decidir si el conjunto de vectores dado genera $\mathbb{V}$.

a) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$ $\quad \{(1,1,1),(3,2,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$

b) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3$ $\quad \{(1,2,-1),(0,1,-1),(2,5,-3)\}$

c) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^4$ $\quad \{(1,-1,0,1),(1,-1,-1,2),(0,1,2,1),(1,3,1,3)\}$

d) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^{2\times 2}$ $\quad \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$

Ejercicio 5.- Hallar un conjunto de generadores del subespacio $\mathbb{S}$.

a) $\mathbb{S}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - x_2 + 4x_3 = 0\}$

b) $\mathbb{S}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5 \,/\, x_1 + x_2 - 4x_5 = x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\}$

c) $\mathbb{S}=\left\{X\in\mathbb{R}^{2\times 2} \,/\, X.\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}.X\right\}$

d) $\mathbb{S}=\left\{X\in\mathbb{R}^{2\times 2} \,/\, A.X = 0, \text{ con } A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}\right\}$

Ejercicio 6.- Encontrar un sistema de ecuaciones cuyo conjunto de soluciones sea $\mathbb{S}$.

a) $\mathbb{S}=\langle(1,0,1)\rangle$

b) $\mathbb{S}=\langle(0,1,2,-1),(1,0,1,0)\rangle$

c) $\mathbb{S}=\langle(1,1,1,1),(2,1,0,-1),(1,0,1,1)\rangle$

d) $\mathbb{S}=\left\langle\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\rangle$

Ejercicio 7.- Estudiar la dependencia o independencia lineal del conjunto de vectores.

a) $\{(2,1,2),(1,-3,0),(5,-1,4)\}$

b) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

c) $\{(5,4,3,2,1)\}$

d) $\{(0,2,1,-1),(1,0,0,1),(1,3,-2,1),(2,1,-3,4)\}$

Ejercicio 8.- Determinar los valores reales de k para los cuales el conjuntos de vectores es linealmente independiente.

a) $\{(0,1,-2),(1,-1,k),(1,-3,0)\}$

b) $\{(1,-1,3),(k,k+1,k+4),(k+1,k+1,k)\}$

c) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & k+1 \\ 0 & -k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k-2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

Ejercicio 9.- Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes.

a) Determinar si $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ es un conjunto linealmente independiente.

i) $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3$; $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3$; $\mathbf{w}_3 = 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$

ii) $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$; $\mathbf{w}_2 = 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2$; $\mathbf{w}_3 = 5\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3$

b) ¿para qué valores de α es $\{\mathbf{v}_1 - \alpha\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2, \alpha\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3\}$ linealmente independiente?

Ejercicio 10.- Hallar base y dimensión de los siguientes subespacios.

a) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / 6x_1 - 2x_2 = 0\}$

b) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / 3x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$

c) $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / 2x_1 - x_3 = x_1 + x_2 + 2x_4 = x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0\}$

d) $\mathbb{S} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{4\times 1} / \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}\right\}$

e) $\mathbb{S}=\left\{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} / \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

f) $\mathbb{S}=\langle (1,2,3),(3,1,0)\rangle$

g) $\mathbb{S}=\left\langle (2,8,-3),(-1,-4,\frac{3}{2})\right\rangle$

h) $\mathbb{S}=\langle (1,-1,2,1),(2,1,1,1),(1,2,-1,0),(0,1,1,1)\rangle$

i) $\mathbb{S}=\left\langle \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \right\rangle$

Ejercicio 11.- Decidir si el conjunto de vectores dado es base del subespacio

$$\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 + 2x_4 = 0\right\}.$$

a) $\{(1,1,0,0),(0,2,0,1)\}$

b) $\{(1,1,0,0),(0,2,-1,1),(2,0,0,-1)\}$

c) $\{(1,1,0,0),(0,2,-1,1),(1,-1,0,1)\}$

d) $\{(1,1,0,0),(0,2,-1,1),(3,1,1,-1)\}$

Ejercicio 12.-Sea $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\right\}$. Hallar una base B de $\mathbb{S}$ tal que todos los vectores de B tienen todas sus coordenadas distintas de 0.

Ejercicio 13.- Determinar la dimensión de $\mathbb{T}_k$ para todos los valores de $k\in\mathbb{R}$.

a) $\mathbb{T}_k = \langle (0,-1,k),(1,-1,0),(-3,0,1)\rangle$

b) $\mathbb{T}_k = \langle \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3+2\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1-\mathbf{v}_3, 2\mathbf{v}_1+3\mathbf{v}_2-2\mathbf{v}_3+k\mathbf{v}_4\rangle$, donde $B=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ es una base de un espacio vectorial $\mathbb{V}$.

Ejercicio 14.- Extender, si es posible, el conjunto de vectores a una base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 15.- Hallar una base de $\mathbb{V}$ que contenga a una base de $\mathbb{S}$.

a) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^4 \qquad \mathbb{S}=\left\{ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 + x_3 = x_2 - x_4 = 0 \right\}$

b) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^{3\times 2} \qquad \mathbb{S}=\left\{ X\in\mathbb{R}^{3\times 2} \,/\, x_{11} + x_{31} = x_{12} - x_{21} + x_{22} = x_{11} - x_{22} + x_{32} = 0 \right\}$

c) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^5 \qquad \mathbb{S}=\left\langle (1,2,0,1,-1), (2,1,1,0,0), (1,-1,1,-1,1) \right\rangle$

Ejercicio 16.- Extender, si es posible, el conjunto $\left\{ (1,-1,0,1), (0,1,0,-1) \right\}$ a base de $\mathbb{R}^4$ con vectores del subespacio $\mathbb{T}$.

a) $\mathbb{T}=\left\{ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 \,/\, x_2 + x_4 = 0 \right\}$

b) $\mathbb{T}=\left\{ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_3 = 0 \right\}$

Ejercicio 17.- Extraer, si es posible, dos bases de $\mathbb{V}$, del conjunto de vectores dado.

a) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3 \qquad \left\{ (1,0,-1), (0,1,1), (1,1,0), (2,1,4) \right\}$

b) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3 \qquad \left\{ (2,0,0), (0,-1,4), (2,1,-4), (1,-1,4) \right\}$

c) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 18.- Determinar si los subespacios $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ son iguales.

a) $\mathbb{S}=\left\langle (1,0,2), (1,1,-1) \right\rangle \qquad \mathbb{T}=\left\{ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \,/\, 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \right\}$

b) $\mathbb{S}=\left\langle (0,1,0), (1,1,3) \right\rangle \qquad \mathbb{T}=\left\langle (2,2,6), (1,1,1) \right\rangle$

c) $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1+x_2-x_3-x_4=2x_1+x_4=0\right\}$

$\mathbb{T}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 \,/\, 3x_1+x_2-x_3=2x_1-x_2+x_4=x_1+2x_2-x_3-x_4=0\right\}$

d) $\mathbb{S}=\left\langle (1,-1,0,2)\right\rangle$ $\quad \mathbb{T}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1+x_2+x_3=2x_2+x_4=x_3=0\right\}$

e) $\mathbb{S}=\left\{A\in \mathbb{R}^{2\times 2} \,/\, a_{11}+a_{22}=a_{11}+2a_{12}=0\right\}$ $\quad \mathbb{T}=\left\langle \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Ejercicio 19.- Hallar base y dimensión de $\mathbb{S}\cap\mathbb{T}$.

a) $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1+2x_2-x_3+x_4=x_2+x_3-2x_4=0\right\}$ $\quad \mathbb{T}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1+2x_4=0\right\}$

b) $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1-x_2+2x_3=x_2+x_4=0\right\}$ $\quad \mathbb{T}=\left\langle (-1,0,1,1),(-2,-2,1,4)\right\rangle$

c) $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 \,/\, 2x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\right\}$ $\quad \mathbb{T}=\left\langle (1,-1,0,0),(0,1,-1,0),(0,1,0,-1)\right\rangle$

d) $\mathbb{S}=\left\langle \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\quad \mathbb{T}=\left\{A\in \mathbb{R}^{2\times 2} \,/\, a_{11}+a_{21}-a_{22}=0\right\}$

e) $\mathbb{S}=\left\langle (2,1,0),(1,1,-1)\right\rangle$ $\quad \mathbb{T}=\left\langle (0,1,2),(1,3,-1)\right\rangle$

Ejercicio 20.- Hallar base y dimensión de $\mathbb{S}+\mathbb{T}$.

a) $\mathbb{S}=\left\langle (1,-1,0,1),(2,1,1,1)\right\rangle$ $\quad \mathbb{T}=\left\langle (3,0,2,2)\right\rangle$

b) $\mathbb{S}=\left\langle (2,1,-1),(1,0,3)\right\rangle$ $\quad \mathbb{T}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1+2x_2+x_3=0\right\}$

Ejercicio 21.- Sean $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1+2x_2-x_4=2x_1-x_3+x_4=0\right\}$ y $\mathbb{T}=\left\langle (1,3,1,-1);(0,1,-2,-2)\right\rangle$.

a) Hallar una base de $\mathbb{S}+\mathbb{T}$.

b) Escribir $\mathbf{v}=(3,5,7,1)$ como $\mathbf{v}=\mathbf{s}+\mathbf{t}$, con $\mathbf{s}\in\mathbb{S}$ y $\mathbf{t}\in\mathbb{T}$, de dos maneras distintas.

Ejercicio 22.- Sean $\mathbb{S}=\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^3 / x_1+x_2+x_3=0\}$, $\mathbb{T}=\langle(0,1,2);(1,-1,1)\rangle$ y $\mathbf{v}=(3,1,2)$. Hallar $\mathbf{s}\in\mathbb{S}$ y $\mathbf{t}\in\mathbb{T}$ tales que $\mathbf{v}\in\langle\mathbf{s},\mathbf{t}\rangle$.

Ejercicio 23.- Sean $\mathbb{S}=\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 / 2x_1-x_2+x_4=x_1+x_3=0\}$ y $\mathbb{T}=\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 / x_2+2x_3=3x_1+3x_3+x_4=0\}$. Hallar una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a una base de $\mathbb{S}$ y a una base de $\mathbb{T}$.

Ejercicio 24.- Sea $B=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ base de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ y sean $\mathbb{S}=\langle\mathbf{v}_1+2\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3\rangle$ y $\mathbb{T}=\langle\mathbf{v}_3+\mathbf{v}_4,\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_4\rangle$.

a) Hallar base y dimensión de $\mathbb{S}\cap\mathbb{T}$ y de $\mathbb{S}+\mathbb{T}$.

b) Hallar un vector $\mathbf{v}\in\mathbb{S}+\mathbb{T}$ tal que $\mathbf{v}\notin\mathbb{S}$ y $\mathbf{v}\notin\mathbb{T}$.

Ejercicio 25.- Decidir si $\mathbb{S}+\mathbb{T}=\mathbb{H}$.

a) $\mathbb{S}=\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 / x_1+2x_3=-x_2-x_3+x_4=0\}$, $\mathbb{T}=\langle(1,2,1,0);(0,0,1,-1)\rangle$, $\mathbb{H}=\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 / x_1-x_2+x_3+x_4=0\}$

b) $\mathbb{S}=\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^5 / 2x_3-x_4=x_1+x_5=x_1+x_2-2x_5=0\}$, $\mathbb{T}=\langle(1,-2,1,1,0);(0,1,2,3,1)\rangle$, $\mathbb{H}=\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^5 / 2x_1+x_2-x_5=0\}$

c) $\mathbb{S}=\langle(1,0,1,3);(2,2,2,3)\rangle$, $\mathbb{T}=\langle(3,2,3,6);(0,0,1,0)\rangle$, $\mathbb{H}=\langle(1,1,0,-1);(2,1,1,2);(0,1,1,1)\rangle$

Ejercicio 26.- Hallar dos subespacios distintos $\mathbb{T}$ y $\mathbb{T}'$ tales que $\mathbb{V}=\mathbb{S}\oplus\mathbb{T}=\mathbb{S}\oplus\mathbb{T}'$.

a) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^4$ $\quad$ $\mathbb{S}=\langle(1,2,1,0),(-1,3,1,1)\rangle$

b) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^5$ $\quad$ $\mathbb{S}=\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^5 / x_1-x_3+2x_4+x_5=3x_1-x_2=x_2+x_3+2x_4-x_5=0\}$

c) $\mathbb{V}=\{\mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 / x_1+2x_2+x_3-x_4=0\}$ $\quad$ $\mathbb{S}=\langle(1,-1,0,-1),(1,-1,1,0)\rangle$

Ejercicio 27.- Sean $\mathbb{S}=\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ y $\mathbb{T}=\left\{ A\in\mathbb{R}^{2\times 2} / a_{11}=a_{12}-a_{21}=0 \right\}$.

a) Probar que $\mathbb{R}^{2\times 2}=\mathbb{S}\oplus\mathbb{T}$.

b) Escribir $\mathbf{w}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ como $\mathbf{w}=\mathbf{s}+\mathbf{t}$ con $\mathbf{s}\in\mathbb{S}$ y $\mathbf{t}\in\mathbb{T}$.

Ejercicio 28.- Sean $\mathbb{S}=\left\{ \mathbf{x}\in \mathbb{R}^3 / x_1+2x_2+x_3=x_2-x_3=0 \right\}$ y $\mathbb{T}=\left\{ \mathbf{x}\in \mathbb{R}^3 / x_1+x_2-x_3=2x_1+x_2=0 \right\}$. Hallar un subespacio $\mathbb{W}$ tal que $\mathbb{T}\subseteq\mathbb{W}$ y $\mathbb{R}^3=\mathbb{S}\oplus\mathbb{W}$.

Ejercicio 29.- Sea $\mathbb{S}=\left\{ \mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 / x_2=x_1+x_3=0 \right\}$.

Encontrar un subespacio $\mathbb{T}\subseteq\mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente:

$$\mathbb{S}\cap\mathbb{T}=\left\langle (1,0,-1,1) \right\rangle \text{ y } \mathbb{S}+\mathbb{T}=\mathbb{R}^4.$$

Ejercicio 30.- Sean $\mathbb{S}=\left\{ \mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 / x_1+x_3-x_4=x_1+x_2+x_3+x_4=0 \right\}$ y

$$\mathbb{T}=\left\{ \mathbf{x}\in \mathbb{R}^4 / x_1+x_2+2x_3+x_4=ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0 \right\}$$

Determinar todos los valores reales de a, b, c, d para los cuales la suma $\mathbb{S}+\mathbb{T}$ no es directa.

Ejercicio 31.- Sean $\mathbb{H}=\left\{ \mathbf{x}\in \mathbb{R}^5 / x_1-x_2-x_3+2x_4-x_5=0 \right\}$, $\mathbb{H}'=\left\{ \mathbf{x}\in \mathbb{R}^5 / 2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \right\}$, $\mathbb{W}=\left\langle (1,0,0,1,0);(0,0,1,0,0);(1,-1,1,1,1) \right\rangle$, $\mathbb{S}=\left\{ \mathbf{x}\in \mathbb{R}^5 / x_1-x_2-x_3=2x_4-x_5=0 \right\}$ y $\mathbb{S}'=\left\{ \mathbf{x}\in \mathbb{R}^5 / 2x_1+x_2=x_3+x_4+x_5=0 \right\}$.

Encontrar un subespacio $\mathbb{T}\subset\mathbb{R}^5$ que verifique simultáneamente:

$$\mathbb{S}\oplus\mathbb{T}=\mathbb{H};\quad \mathbb{S}'\oplus\mathbb{T}=\mathbb{H}';\quad \mathbb{T}\cap\mathbb{W}\neq\left\{0\right\}.$$

Ejercicio 32.- Encontrar todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ que son ortogonales a todos los vectores del conjunto $\left\{ (1,0,-1);(-1,1,3) \right\}$.

Ejercicio 33.- Encontrar el complemento ortogonal del subespacio $\mathbb{S}$.

a) $\mathbb{S}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 \,/\, x_1+x_2+x_3-x_4=x_1+2x_4=0\right\}$.

b) $\mathbb{S}=\left\langle (1,1,3);(2,1,-1)\right\rangle$

c) $\mathbb{S}=\left\langle (2,1,2,0);(1,0,2,1);(3,1,4,1)\right\rangle$

Ejercicio 34.- En $\mathbb{R}^3$, encontrar el complemento ortogonal de:

a) el eje *x*;

b) el plano coordenado *yz*;

c) el plano de ecuación $x_1+3x_2-2x_3=0$;

d) la recta de ecuación $X=\lambda(-1,2,5)$.

Ejercicio 35.- Sea $\mathbb{S}=\left\langle (2,0,0,3,1);(0,1,1,-1,0)\right\rangle$. Hallar una base de $\mathbb{S}^{\perp}$, y dar un sistema de ecuaciones cuyo conjunto de soluciones sea el subespacio $\mathbb{S}$.

Ejercicio 36.- a) Sean $\Pi : 6x_1+4x_2-x_3=0$ y P = (7,5,9). Hallar el punto $Q\in\Pi$ que está más próximo al punto P. Calcular la distancia del punto P al plano Π.

b) Sean $\mathbb{L} : \lambda(-2,4,1)$ y P = (4,1,–8). Hallar el punto $Q\in\mathbb{L}$ que está más próximo al punto P. Calcular la distancia del punto P a la recta $\mathbb{L}$.

Ejercicio 37.- Sean en $\mathbb{R}^3$ las bases B=$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

B´=$\{(0,0,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ y B´´=$\{(3,1,-2),(0,1,-1),(2,0,0)\}$

Hallar las coordenadas con respecto a las bases B, B´ y B´´ de:

a) (4,1,–3)

b) $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$

Ejercicio 38.- Hallar las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ en la base

$$B=\left\{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right\}$$

Ejercicio 39.- Sea B=$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Determinar si $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ es linealmente independiente, si $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ son los vectores de $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas respecto de B son:

a) (2,3,–1), (0,–2,1) y (0,0,3) respectivamente.

b) (3,1,–1), (1,0,2) y (5,1,3) respectivamente.

Ejercicio 40.- Sea B=$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$ y sea
$\mathbb{T}_k = \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + k\mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4 \rangle$.
Determinar todos los valores de *k* en $\mathbb{R}$ para los cuales $\dim \mathbb{T}_k = 3$.

Ejercicio 41.- Se sabe que B=$\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y que las coordenadas de los vectores (0,−1,1), (1,0,1) y (1,1,−1) en la base B son, respectivamente, (1,2,2), (1,1,−1) y (−1,−1,0). Hallar la base B.

Ejercicio 42.- Sea $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$. Hallar una base B de $\mathbb{R}^3$ que contenga a una base de $\mathbb{S}$ y a una base de $\mathbb{S}^\perp$, y tal que que vector (0,5,2) tenga coordenadas (0,1,4) en la base B.

EJERCICIOS SURTIDOS

1. Sea $B=\{\mathbf{v}_1;\mathbf{v}_2;\mathbf{v}_3;\mathbf{v}_4\}$ una base de un espacio vectorial $\mathbb{V}$. Sean $\mathbb{S}=\langle \mathbf{v}_1-\mathbf{v}_3-2\mathbf{v}_4;\mathbf{v}_2\rangle$ y $\mathbb{T}=\langle -\mathbf{v}_1+k\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3+k\mathbf{v}_4;\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2+2\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_4;\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2+k\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_4\rangle$.

Hallar todos los valores de $k\in\mathbb{R}$ para los cuales $\mathbb{S}\oplus\mathbb{T}=\mathbb{V}$.

2. Sean $\mathbb{S}=\langle(1,2,0,1);(0,-1,1,0)\rangle$ y $\mathbb{T}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 / x_1-x_2+x_3-x_4=2x_1-x_3-x_4=0\}$.

Hallar, si existe, un subespacio $\mathbb{W}$ de modo que se verifique simultáneamente:

$\dim(\mathbb{S}\cap\mathbb{W})=1$; $\dim(\mathbb{T}\cap\mathbb{W})=1$; $\dim((\mathbb{S}+\mathbb{T})\cap\mathbb{W})=1$; $\dim\mathbb{W}=2$

3. Sean en $\mathbb{R}^4$ los subespacios $\mathbb{S}=\langle(2,1,0,1)\rangle$, $\mathbb{H}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 / x_1-x_2+2x_3-x_4=0\}$ y $\mathbb{W}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 / x_1+x_2+x_4=x_2-x_3+2x_4=0\}$.

Hallar, si es posible, un subespacio $\mathbb{T}$ que verifique simultáneamente:

$\mathbb{S}\oplus\mathbb{T}=\mathbb{H}$ y $\mathbb{T}\cap\mathbb{W}\neq\{0\}$.

4. Sean $\mathbb{S}=\langle(1,2,1,0);(0,3,0,2)\rangle$ y $\mathbb{T}=\langle(1,1,1,1);(3,-1,3,4)\rangle$. Hallar una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a una base de $\mathbb{S}^\perp$ y a una base de $\mathbb{T}$.

5. Sean en $\mathbb{R}^4$ los subespacios $\mathbb{W}=\langle(1,0,1,2);(1,1,0,-1)\rangle$,

$\mathbb{H}_1=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 / x_1-2x_2+x_3-x_4=0\}$ y $\mathbb{H}_2=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 / x_1+ax_2-x_3+bx_4=0\}$.

Hallar $a,b\in\mathbb{R}$ y un subespacio $\mathbb{S}$ tales que se verifique simultáneamente:

$\mathbb{W}\oplus\mathbb{S}=\mathbb{H}_1$ y $\mathbb{W}^\perp\oplus\mathbb{S}=\mathbb{H}_2$.

6. Sean $\mathbb{S}_1=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5 / x_1+2x_2+x_3=0;4x_1+x_5=0\}$ y

$\mathbb{S}_2=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5 / x_1+x_2-3x_3+x_4-k^2x_5=0;x_1+2x_2-5x_3+3x_4-k^2x_5=0;x_2-2x_3+kx_4=0\}$.

Hallar todos los $k\in\mathbb{R}$ para los cuales $\mathbb{S}_1=\mathbb{S}_2^\perp$.

7. Sean $B=\{\mathbf{v}_1;\mathbf{v}_2;\mathbf{v}_3\}$, $B'=\{\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3;\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_3;-\mathbf{v}_2\}$ y $B''=\{-\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3;\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_3;-\mathbf{v}_1\}$ bases de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ y sean $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tales que $\mathbf{v}_B=(1,-1,1)$ y $\mathbf{w}_{B'}=(2,0,-1)$.
Hallar $(2\mathbf{v}+\mathbf{w})_{B''}$.

8. Sean en $\mathbb{R}^4$ el subespacio $\mathbb{S}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 \,/\, x_2+x_3-x_4=x_1+x_2+2x_3+x_4=0\}$ y la base $B=\{(1,1,1,1);(1,1,2,0);(1,2,0,0);(2,0,0,0)\}$.
Hallar todos los vectores **v** que pertenecen a $\mathbb{S}$ y cuyas coordenadas en la base B son de la forma (a,b,a,b).

9. Sean en $\mathbb{R}^4$ los subespacios $\mathbb{S}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 \,/\, x_1+x_2+x_4=x_2+2x_3=0\}$ y $\mathbb{T}=\langle(5,5,-1,-1);(3,1,0,-1)\rangle$. Hallar un subespacio $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{W}\neq\mathbb{T}$ de manera que se verifique simultáneamente: $\mathbb{S}\cap\mathbb{W}=\mathbb{S}\cap\mathbb{T}$ y $\mathbb{S}+\mathbb{W}=\mathbb{S}+\mathbb{T}$.

10. Sea $B=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ base de un espacio vectorial $\mathbb{V}$.
Sean $\mathbb{S}=\langle\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2-2\mathbf{v}_3+2\mathbf{v}_4,\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3+\mathbf{v}_4\rangle$ y $\mathbb{T}=\langle\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+2\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_3\rangle$.
Hallar un subespacio $\mathbb{W}\subset\mathbb{V}$ tal que $\mathbb{W}\oplus(\mathbb{S}\cap\mathbb{T})=\mathbb{V}$.

11. Sea $\mathbb{S}=\langle(1,1,0,2);(0,a,1,-1);(1,0,-1,b);(0,-1,-1,b-2)\rangle$.
Hallar todos los valores de a y b tales que $\mathbb{S}^\perp=\langle(1,-1,1,0)\rangle$.

12. Sean $\mathbb{S}=\langle(1,2,1,1)\rangle$, $\mathbb{H}_1=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 \,/\, x_1-x_2-x_3+2x_4=0\}$ y $\mathbb{H}_2=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4 \,/\, -2x_1+x_2-x_3+x_4=0\}$.
Hallar, si es posible, una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a una base de $\mathbb{S}$, a una base de $\mathbb{H}_1$ y a una base de $\mathbb{H}_2$ simultáneamente.

13. Sean $\mathbb{W}=\langle(1,-1,0,0);(0,0,0,1);(a,0,1,-1)\rangle$ y $\mathbb{S}=\langle(1,1,1,0);(2,0,1,1)\rangle$.

Determinar $a \in \mathbb{R}$ y un subespacio $\mathbb{H}$ de dimensión 2, tal que $\mathbb{S} + \mathbb{H}^{\perp} = \mathbb{W}$.

14. Sean $\mathbb{S} = \langle (1,-1,1,0);(0,2,-1,-2) \rangle$, $\mathbb{H} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_4 = 0 \}$ y la base

B={(1,0,1,0); (0,1,0,1); (0,2,0,0); (1,0,–1,0)}.

Hallar un subespacio $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{T} \oplus \mathbb{S} = \mathbb{H}$, y para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{T}$, las coordenadas de **v** en la base B son de la forma (a,b,a,b).

15. Sean $\mathbb{T} = \{ A \in \mathbb{R}^{3\times 3} / a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \}$, $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^{3\times 3}$, $\mathbb{S} = \langle I \rangle$ donde I es la matriz identidad. Calcular $\dim(\mathbb{S} + \mathbb{T})$.

Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, hallar $S \in \mathbb{S}$ y $T \in \mathbb{T}$ tales que $B = S + T$.

16. La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ tiene coordenadas (1,2,0,3) en la base

$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Calcular las coordenadas de $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ en la base B

17. Sean B={(1,–1,0,2);(0,1,2,0);(–2,1,–1,0);(0,0,0,1)} y

$\mathbb{S} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 + x_4 = 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \}$. Hallar todos los $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ tales que $\mathbf{v} \in \mathbb{S}$ y las coordenadas de **v** en la base B son de la forma $(a,0,b,0)$.