Comentarios sobre funciones cuadráticas

Una función cuadrática, como aparece expresado en la teórica de funciones cuadráticas que figura en el site recorridos matemáticos de la cátedra de Matemática del CBC,

http://www.recorridos.mate.cbc.uba.ar/mod/wiki/view.php?pageid=48

y que les subí al grupo de wapp Mate 51 Sede Pilar,

se puede escribir como $f(x) = ax^2 + bx + c$ **a, b, c números reales**

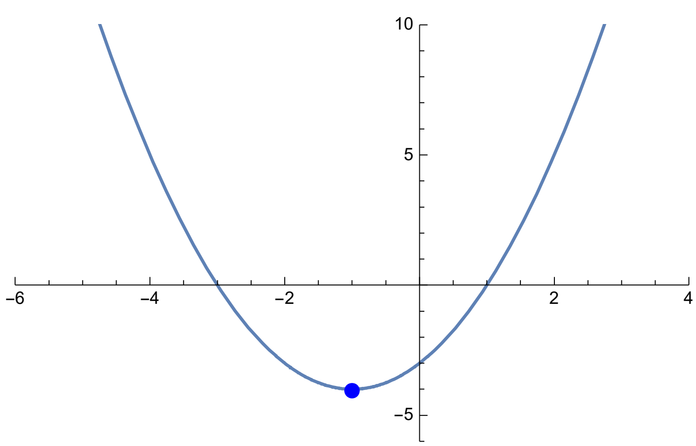
Tienen como Dominio de f $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ **y Codominio de f** $\mathrm{Cod}(f) = \mathbb{R}$
y si a>0, la Imagen de f es $\mathrm{Im}(f) = [y_v, +\infty)$ **, pero si a<0 es** $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, y_v]$
con y_v **ordenada del vértice**

Una función cuadrática es una función polinómica de grado 2 y tiene como gráfico lo que da en llamarse una parábola

Por ejemplo, sirven para modelar la evolución de la posición como función del tiempo del movimiento de los cuerpos bajo la acción de la gravedad terrestre y bajo las hipótesis newtonianas

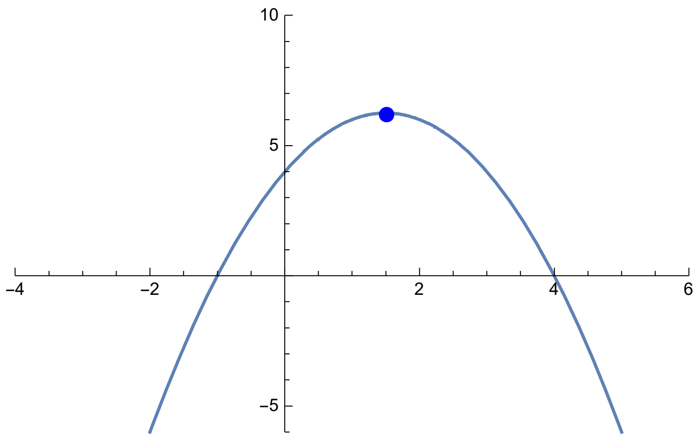
Diferentes gráficos de parábolas

In[26]:=
```
grafA = Plot[x^2 + 2 x - 3, {x, -6, 4}, PlotRange → {{-6, 4}, {-6, 10}}]
```
representación gráfica — rango de representación



In[27]:=
```
grafB = Plot[-x^2 + 3 x + 4, {x, -4, 6}, PlotRange → {{-4, 6}, {-6, 10}}]
```
representación gráfica — rango de representación

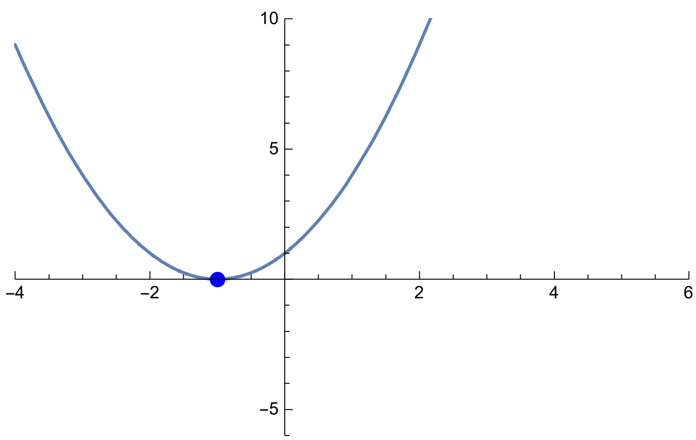
Out[27]=



In[28]:= `grafC = Plot[x^2 + 2 x + 1, {x, -4, 6}, PlotRange → {{-4, 6}, {-6, 10}}]`

representación gráfica — rango de representación

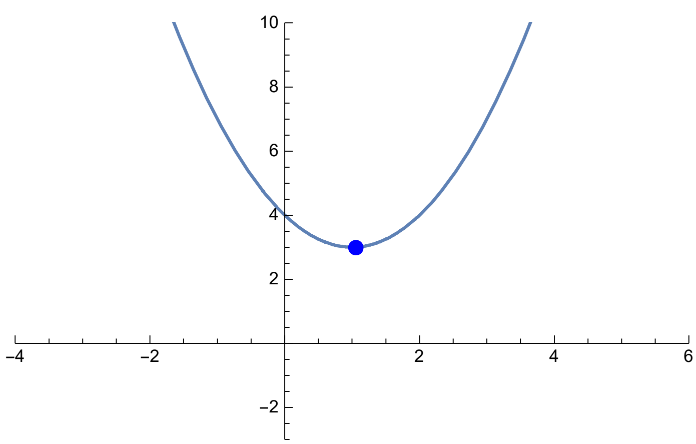
Out[28]=



In[29]:= `grafD = Plot[x^2 - 2 x + 4, {x, -4, 6}, PlotRange → {{-4, 6}, {-3, 10}}]`

representación gráfica — rango de representación

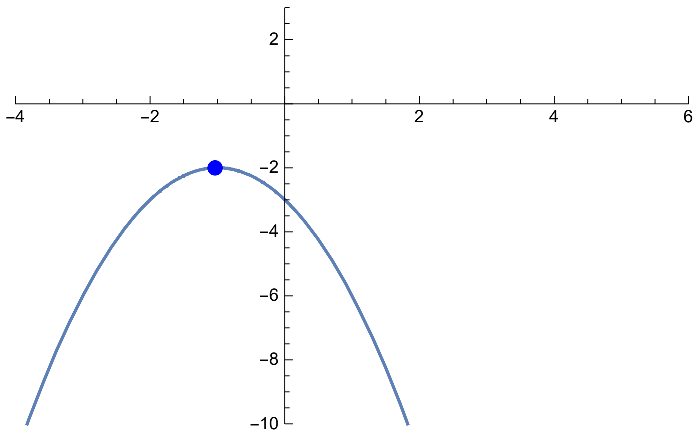
Out[29]=



In[30]:= `grafE = Plot[-x^2 - 2 x - 3, {x, -4, 6}, PlotRange → {{-4, 6}, {-10, 3}}]`

representación gráfica — rango de representación

Out[30]=



Además de la forma polinómica $f(x) = ax^2 + bx + c$, la misma función puede expresarse en lo que se da en llamar

forma canónica : $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$,

con $V = (x_v, y_v)$ la abscisa y la ordenada del Vértice *V* de la parábola

Se puede demostrar que si a, b, c son las constantes de $f(x) = ax^2 + bx + c$,

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$y_v = c - \frac{b^2}{4a}$$

Más aún, las raíces o ceros de una función cuadrática son números reales

cuando el *discriminante* $b^2 - 4ac$, es mayor o igual que 0

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

y en estos casos

la parábola corta al eje x en dos o en un punto,

si $b^2 - 4ac > 0$ en 2 puntos, (ver grafA y grafB)

y si $b^2 - 4ac = 0$ en 1 punto

(en este último caso, la parábola es tangente al eje x, ver grafC).

Las raíces o ceros de la función cuadrática o parábola

se obtienen a partir de la famosa fórmulita :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

acá se ve bien que si $b^2 - 4ac < 0$

no se puede calcular la raíz cuadrada y no existen raíces reales

geométricamente quiere decir que la parábola no corta al eje x;

o está siempre por encima del eje x $(si\ a > 0)$ o

siempre por debajo del eje x $(a < 0)$ (ver grafD y grafE)

Existe otra forma de expresar una función cuadrática y que vale sólo cuando tiene raíces reales (cuando $b^2 - 4\,ac \geq 0$)

y es la que se llama forma factorizada :

$$f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2),$$

x_1 y x_2 las raíces reales de $f(x)$

- Formas de escribir las funciones cuadráticas :

Resumiendo : si la función cuadrática tiene raíces reales, se puede escribir de 3 formas :

forma *polinómica* : $f(x) = ax^2 + bx + c$

forma *canónica* : $f(x) = a\,(x - x_v)^2 + y_v$

forma factorizada : $f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$

si la función cuadrática no tiene raíces reales, se puede escribir de 2 formas :

forma *polinómica* : $f(x) = ax^2 + bx + c$

forma *canónica* : $f(x) = a\,(x - x_v)^2 + y_v$

Resultado general de las funciones polinómicas

El grado n de la función polinómica indica que a lo sumo tendrá n cantidad de ceros o raíces reales

En el caso de las funciones cuadráticas, como son de grado 2 tendrán 2, 1 , o ninguna raíz real

Cuando la función cuadrática tiene sólo 1 raíz real se dice que esa raíz es doble (las $f(x)$ son tangentes al eje x) y se escriben en forma factorizada como

$$f(x) = a\,(x - x_1)^2 = a\,(x - x_1)\,(x - x_1)$$

Simetría de la función cuadrática y relación entre las coordenadas del Vértice y las raíces reales, si tiene

Fijense que la recta vertical que pasa por el x_v, la recta $x = x_v$, es un eje de simetría de la función cuadrática (el eje de simetría "funciona" como un espejo) y por lo tanto las raíces equidistan del eje de simetría

Entonces : $x_v = \dfrac{(x_1 + x_2)}{2}$, **siendo** x_1 **y** x_2 **las raíces reales de** $f(x)$

Se puede demostrar que

$x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$ **y usando esto que**

$$y_v = a\left[x_1 \cdot x_2 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2\right]$$

Resumiendo :

$$x_v = \frac{(x_1 + x_2)}{2} = -\frac{b}{2a}$$

$$y_v = a\left[x_1 \cdot x_2 - x_v^2\right] = c - \frac{b^2}{4a} = f(x_v)$$

Observación :

Si $a > 0$, las funciones cuadráticas alcanzan un mínimo en $x = x_v$
y el valor mínimo es $y_v = f(x_v)$

Si $a < 0$, las funciones cuadráticas alcanzan un Máximo en $x = x_v$
y el valor Máximo es $y_v = f(x_v)$

Resolvamos el ejercicio 19 a, de la práctica 2

Ejercicio 19.- Hallar la función cuadrática f.

a. El gráfico de f tiene vértice $V = (4,5)$ y pasa por el punto $(3,3)$.

De acuerdo a las diferentes formas de escribir una función cuadrática
y en base a los datos, nos conviene utilizar la forma canónica :

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$$

Siendo $x_v = 4$ $y_v = 5$, **reemplazando :**

$$f(x) = a(x - 4)^2 + 5$$

Para determinar el valor de a, usamos que f (x) pasa por el punto (3, 3)

Reemplazando x = 3 e y = 3 en la expresión anterior,

$3 = f(3) = a(3-4)^2 + 5 = a(-1)^2 + 5 = a \cdot 1 + 5 = a + 5 \implies 3 = a + 5 \implies$

$-2 = a$

Con este valor de a, quedará

$f(x) = (-2)(x-4)^2 + 5 = (-2)(x^2 - 8x + 16) + 5 = -2x^2 + 16x - 32 + 5 \implies$

$f(x) = -2x^2 + 16x - 27$

In[25]:=
```
Plot[-2 x^2 + 16 x - 27, {x, -4, 6}, PlotRange → {{-4, 6}, {-1, 6}}]
```
representación gráfica · rango de representación