Reglas de derivación

Cómo calcular derivadas

A continuación veremos algunas propiedades que nos permitirán calcular derivadas.

En la siguiente tabla, figuran las derivadas de las funciones básicas que vamos a usar:

$f(x)$	$f'(x)$
k constante	0
x^a con $a \in \mathbb{R}$ constante	$a.x^{a-1}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$

Ejemplo. Calcular la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$.

Veamos si ésta es una de las funciones que aparecen en la tabla anterior. Si consideramos que $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, ésta es una función del tipo x^a con a constante. Entonces, usando la tabla, la derivada de $f(x)$ será $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Es decir

$$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Algunas propiedades útiles para calcular derivadas

- Si k es una constante y f es una función derivable,

  $$(k.f(x))' = k.f'(x).$$

  Es decir, las constantes multiplicando "salen afuera" de la derivada.

  Por ejemplo,

  $$(3.\ln(x))' \underset{\substack{\downarrow \\ \text{3 es una constante} \\ \text{multiplicando}}}{=} 3.(\ln(x))' \underset{\substack{\downarrow \\ \text{la derivada de ln} \\ \text{está en la tabla}}}{=} 3.\frac{1}{x}$$

- **Derivada de la suma o resta:** Si f y g son funciones derivables,

  $$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$
  $$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x).$$

  Es decir, la derivada de la suma (o de la resta) es la suma (o la resta) de las derivadas.

  Por ejemplo,

  $$(e^x + \operatorname{sen}(x))' \underset{\substack{\downarrow \\ \text{derivada de} \\ \text{la suma}}}{=} (e^x)' + (\operatorname{sen}(x))' \underset{\substack{\downarrow \\ \text{derivadas} \\ \text{por tabla}}}{=} e^x + \cos(x)$$

- **Derivada del producto:** Si f y g son funciones derivables,

$$(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x).$$

Es decir, la derivada del producto de dos funciones es la derivada de la primera por la segunda sin derivar más la primera sin derivar por la derivada de la segunda.

Por ejemplo,

$$(x^3.\cos(x))' \underset{\substack{\downarrow \\ \text{derivada del} \\ \text{producto}}}{=} (x^3)'.\cos(x) + x^3.(\cos(x))' \underset{\substack{\downarrow \\ \text{derivadas} \\ \text{por tabla}}}{=} 3x^2.\cos(x) + x^3.(-\operatorname{sen}(x)) =$$

$$= 3x^2.\cos(x) - x^3.\operatorname{sen}(x)$$

- **Derivada de la división:** Si f y g son funciones derivables y $g(x) \neq 0$,

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Es decir, la derivada de la división de dos funciones es la derivada de la primera por la segunda sin derivar menos la primera sin derivar por la derivada de la segunda, todo dividido por la segunda función al cuadrado.

Por ejemplo,

$$\left(\frac{x}{e^x}\right)' \underset{\substack{\downarrow \\ \text{derivada de} \\ \text{la división}}}{=} \frac{(x)'.e^x - x(e^x)'}{(e^x)^2} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{derivadas} \\ \text{por tabla}}}{=} \frac{1.e^x - x.e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x - x.e^x}{e^{2x}}$$

Ejemplo. Calcular la derivada de $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{5x^4 - 2}$.

Nos piden calcular la función $f'(x) = \left(\dfrac{\cos(x)}{5x^4 - 2}\right)'$.

Para ver cómo proceder, debemos tener en cuenta el orden de las operaciones que aparecen en la expresión que tenemos que derivar. La última operación que haríamos para evaluar la función en x es la división entre $\cos(x)$ y $5x^4 - 2$, así que comenzaremos derivando la división:

$$f'(x) = \left(\frac{\cos(x)}{5x^4 - 2}\right)' = \frac{(\cos(x))'.(5x^4 - 2) - \cos(x)(5x^4 - 2)'}{(5x^4 - 2)^2}.$$

Como todavía aparecen en la expresión de la derecha funciones a las que hay que derivar, debemos seguir aplicando las propiedades para seguir derivando. Para calcular $(5x^4 - 2)'$ aplicamos la fórmula de la derivada de la resta y tenemos que

$$f'(x) = \frac{(\cos(x))'.(5x^4 - 2) - \cos(x)\left[(5x^4)' - (2)'\right]}{(5x^4 - 2)^2}.$$

Si notamos que $(5x^4)' = 5(x^4)'$ (por ser 5 una constante multiplicando), resulta que todas las derivadas que aparecen en la expresión pueden calcularse por tabla:

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen}(x).(5x^4 - 2) - \cos(x).[5.4x^3 - 0]}{(5x^4 - 2)^2} = \frac{-\operatorname{sen}(x).(5x^4 - 2) - \cos(x).20x^3}{(5x^4 - 2)^2}.$$

Notar que ya no quedan derivadas por calcular en el miembro derecho (no aparecen más $'$), así que ésta es la expresión de la función derivada:

$$\boxed{f'(x) = \frac{-\operatorname{sen}(x).(5x^4-2) - \cos(x).20x^3}{(5x^4-2)^2}.}$$

Ejemplo. Calcular la derivada de $f(x) = (3+\ln(x))(e^x + 7x^2 - x)$.

Como la última operación que efectuaríamos para evaluar la función es la multiplicación, comenzamos derivándola:

$$f'(x) = \left((3+\ln(x))(e^x+7x^2-x)\right)' =$$
$$= (3+\ln(x))'(e^x+7x^2-x) + +(3+\ln(x))(e^x+7x^2-x)'$$

En ambas derivadas, aplicamos la fórmula de la derivada de la suma y en $(7x^2)'$ sacamos el 7 multiplicando afuera, así que queda

$$f'(x) = [(3)' + (\ln(x))'](e^x+7x^2-x) + (3+\ln(x))\left[(e^x)' + 7(x^2)' - (x)'\right].$$

Ahora sí todas las derivadas que aparecen en la expresión pueden calcularse por tabla:

$$f'(x) = \left(0+\tfrac{1}{x}\right)(e^x+7x^2-x) + (3+\ln(x))(e^x+7.2x-1).$$

Notar que ya no quedan derivadas por calcular en el miembro derecho (no aparecen más $'$), así que tenemos

$$\boxed{f'(x) = \frac{e^x+7x^2-x}{x} + (3+\ln(x))(e^x+14x-1).}$$

La última propiedad que nos falta ver para calcular derivadas es cómo derivar una composición de funciones.