PRÁCTICA 3

DETERMINANTES

Ejercicio 1.- Calcular los siguientes determinantes, desarrollando por cofactores por las filas y columnas indicadas.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ por tercera fila
por primera columna

b) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ por segunda fila
por tercera columna

c) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ por cuarta fila
por quinta columna

Ejercicio 2.- Calcular los siguientes determinantes, desarrollando por cofactores por la fila o columna más conveniente.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & -5 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

Ejercicio 3.- Calcular los determinantes de las siguientes matrices usando propiedades.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4.- Determinar los valores de *k* para los cuales det(*A*) = 0.

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & k+4 \\ k-2 & -4 \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix} k & 2 & 1 \\ 0 & k^2-1 & 2 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ k^2 & 9 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 5.- Sea $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, tal que det(*A*) = 7.

Calcular los determinantes de las siguientes matrices.

a) $\begin{pmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} a_{11} & 2a_{12} & -a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22} & -a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+3a_{11} & a_{22}+3a_{12} & a_{23}+3a_{13} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$

Ejercicio 6.- Sean $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Calcular $\det(AB)$ $\det(A+B)$ $\det(A^{10})$ $\det(A^5B-A^5)$

Ejercicio 7.- Sin calcular la matriz inversa, decidir si son inversibles las matrices dadas.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 8.- Determinar todos los valores reales de *x* para los cuales la matriz es inversible.

a) $\begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ 2 & x-2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & x & x+1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} x+1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & x-4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 9.- Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $\det(A) = 15$, calcular

a) $\det(2A)$ b) $\det((3A)^{-1})$ c) $\det(3A^{-1})$

Ejercicio 10.- Determinar en cada caso todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema tiene solución única.

a) $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + kx_3 = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ (2k-2)x_1 + 2kx_2 + x_3 = 0 \\ (k+2)x_1 + (k-3)x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + kx_3 = 2 \\ x_1 + 3kx_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

Ejercicio 11.- Encontrar el valor de *a* para el cual el sistema tiene infinitas soluciones y resolver el sistema para el valor hallado.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ a^2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = a \end{cases}$$

Ejercicio 12.- Determinar los valores de *k* para los cuales el sistema tiene:
i) ninguna solución ii) solución única iii) infinitas soluciones

a) $\begin{cases} -x_1 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ (k^2-3)x_1 - x_3 = k^2+k-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + (k^2-8)x_3 = k+14 \end{cases}$

c) $\begin{cases} kx_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & (k^2-1)x_2 & + & (k+1)x_3 & = & 1 \\ kx_1 & + & (k^2+2)x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{cases}$

Ejercicio 13.- Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & a+1 & a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}$. Encontrar todos los valores de *a* para los cuales el sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{x}$ admite solución no trivial.

EJERCICIOS SURTIDOS

1. Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B\in\mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $\det(AB)=2$. Calcular $\det(B^{-1})$.

2. Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B\in\mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $\det(B)=-3$.

Hallar todas las soluciones del sistema $(BA)\mathbf{x} = -B\mathbf{x}$.

3. Sea $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a-2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Decidir para qué valores de *a* el sistema

$(A^2+2A)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ tiene solución no trivial.

4. Sean $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & k & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Hallar todos los $k\in\mathbb{R}$ tales que $\det(BA^{-1})=\det(\frac{1}{4}BA)$.