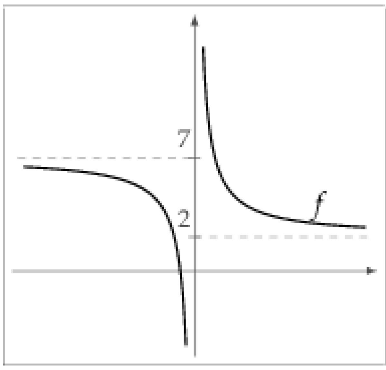
Límites en infinito

Límites de funciones dado su gráfico

Consideremos la función f cuyo gráfico es el siguiente:



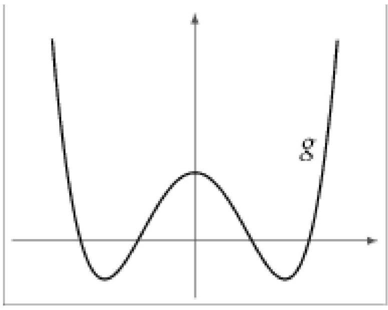
Cuando x toma valores positivos muy grandes, $f(x)$ toma valores cercanos a 2. Se dice entonces que f *tiende a* 2 *cuando* x *tiende a más infinito* o que *el límite cuando* x *tiende a más infinito de* $f(x)$ *es* $2'$, y se nota

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2\,.$$

Además, cuando x toma valores negativos muy grandes en valor absoluto, f toma valores cercanos a 7. Es decir, f tiende a 7 cuando x tiende a menos infinito. Esto se nota

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 7\,.$$

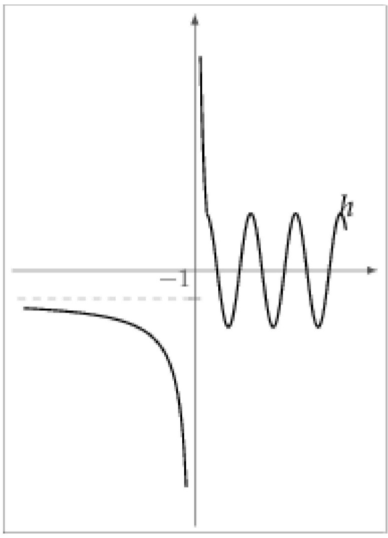
Para la función g, cuyo gráfico es



tenemos que, cuando x tiende a más infinito y a menos infinito, $g(x)$ toma valores tan grandes como uno quiera, es decir

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty\,.$$

Consideremos ahora la función h cuyo gráfico es



Aunque tenemos

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -1\ ,$$

cuando analizamos el límite cuando x tiende a más infinito, no ocurre ninguna de las situaciones que hemos visto: $h(x)$ no se acerca a ningún número particular ni se va a más o menos infinito. Por lo tanto, este límite no existe.

Límites de funciones dadas por su fórmula

Calcularemos límites de funciones dadas por su fórmula a partir de los siguientes límites básicos:

$$\begin{array}{lcllcl}
\lim\limits_{x\to+\infty} x & = & +\infty & \lim\limits_{x\to-\infty} x & = & -\infty \\
\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} & = & 0 & \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} & = & 0 \\
\lim\limits_{x\to+\infty} a & = & a & \lim\limits_{x\to-\infty} a & = & a\ ,\ \text{para cualquier } a\in\mathbb{R}
\end{array}$$

Ejemplos

Las siguientes funciones son cocientes de polinomios. En este tipo de funciones, tanto el numerador como el denominador por separado, suelen tender a infinito cuando x tiende a infinito. Cuando estamos frente a esta situación, decimos que tenemos una indeterminación del tipo "infinito sobre infinito", y ésta nos puede llevar a distintos resultados que hay que calcular. Para ver cómo podemos calcular el límite de este tipo de funciones, a pesar de la indeterminación, veamos algunos ejemplos.

a) Calculemos $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x+1}{x^2-4}$.

Observemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x+1=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-4=+\infty$. Es decir, estamos frente a una indeterminación de tipo ``infinito sobre infinito''. Para salvarla, vamos a sacar factor común en el numerador la mayor potencia de x que aparece en el numerador, y en el denominador, la mayor potencia de x que aparece en el denominador.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+1}{x^2-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(5+\frac{1}{x}\right)}{x^{\cancel{2}}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}\cdot\frac{\overbrace{\left(5+\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}\right)}^{\to 5}}{\underbrace{\left(1-\underbrace{\frac{4}{x^2}}_{\to 0}\right)}_{\to 1}}=0.$$

Concluimos que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+1}{x^2-4}=0.}$$

En general, cuando f es de la forma $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ con p y q polinomios, si el grado de q es mayor que el grado de p, el límite cuando x tiende a más (o menos) infinito de $f(x)$ es cero.

b) Calculemos ahora $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-6x}{x-7}$.

Nuevamente, sacaremos factor común en el numerador la mayor potencia de x que aparece en el numerador, y en el denominador, la mayor potencia de x que aparece en el denominador.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-6x}{x-7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{6x}{x^3}\right)}{x\left(1-\frac{7}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{\cancel{3}2}\left(1-\frac{6\cancel{x}}{x^{\cancel{3}2}}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{7}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\overbrace{x^2}^{\to+\infty}\cdot\frac{\overbrace{\left(1-\overbrace{\frac{6}{x^2}}^{\to0}\right)}^{\to1}}{\underbrace{\left(1-\underbrace{\frac{7}{x}}_{\to0}\right)}_{\to1}}=+\infty.$$

En consecuencia:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-6x}{x-7}=-\infty\ .}$$

En general, cuando f es de la forma $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ con p y q polinomios, si el grado de p es mayor que el grado de q, el límite cuando x tiende a más o menos infinito de $f(x)$ es infinito, y el signo dependerá de la función f.

c) Calculemos $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-4}{9x+8}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-4}{9x+8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\frac{4}{x}\right)}{x\left(9+\frac{8}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(2-\frac{4}{x}\right)}{\cancel{x}\left(9+\frac{8}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\left(2-\overbrace{\frac{4}{x}}^{\to0}\right)}^{\to2}}{\underbrace{\left(9+\underbrace{\frac{8}{x}}_{\to0}\right)}_{\to9}}=\frac{2}{9}.$$

Concluimos que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-4}{9x+8}=\frac{2}{9}\ .}$$

Cuando f es de la forma $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ con p y q polinomios, y el grado de p es igual al grado de q, el límite cuando x tiende a más (o menos) infinito de $f(x)$ es el cociente de los coeficientes principales de los polinomios.