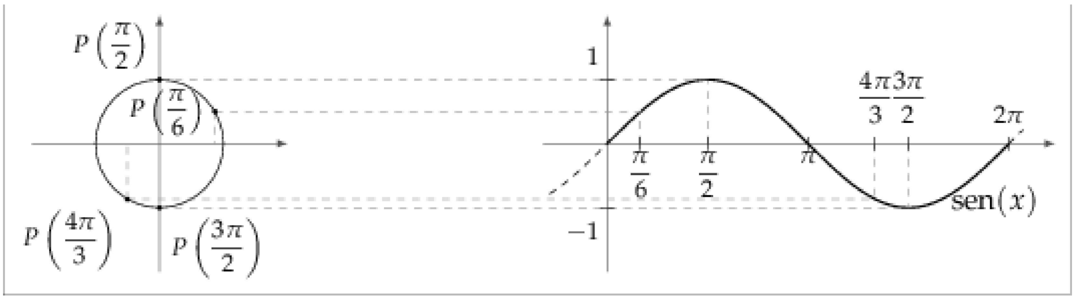
Estudio de las funciones seno y coseno

Estudio de la función seno

Empecemos a armar el gráfico de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$:

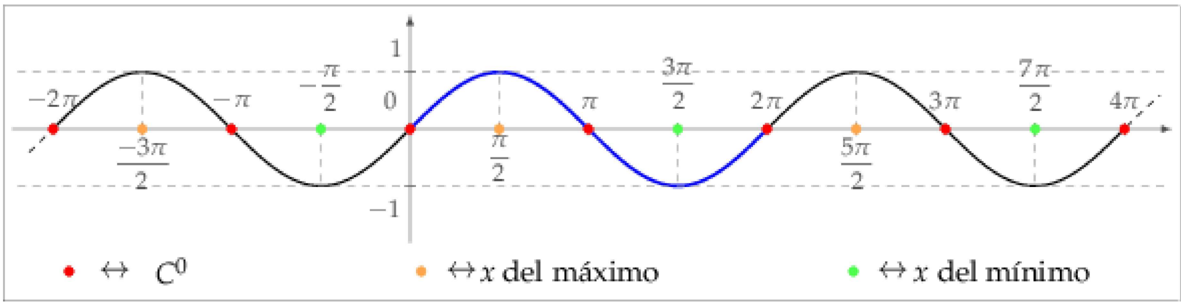


Aquí podemos ver que $\operatorname{sen}(x)$ siempre estará entre -1 y 1 pues las ordenadas de los puntos de la circunferencia se encuentran entre estos valores. Luego, la imagen de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ es $\operatorname{Im} f = [-1;1]$.

Esta función presenta las siguientes propiedades:

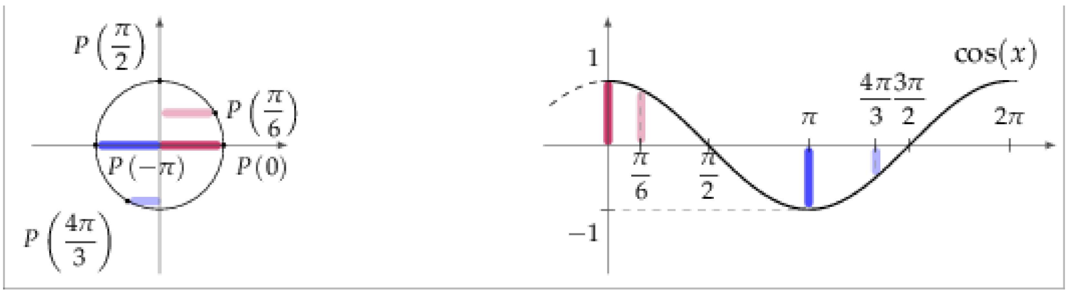
- El dominio es $\mathbb{R}$ y su imagen es el intervalo $[-1;1]$.
- Es continua.
- Su conjunto de ceros es $C^0 = \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
- Es periódica, de período 2π.
- Su valor máximo es 1 y lo alcanza para todo x de la forma $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
- Su valor mínimo es -1 y lo alcanza para todo x de la forma $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Resumiendo en un gráfico:



Estudio de la función coseno

Armemos el gráfico de la función $f(x) = \cos(x)$:

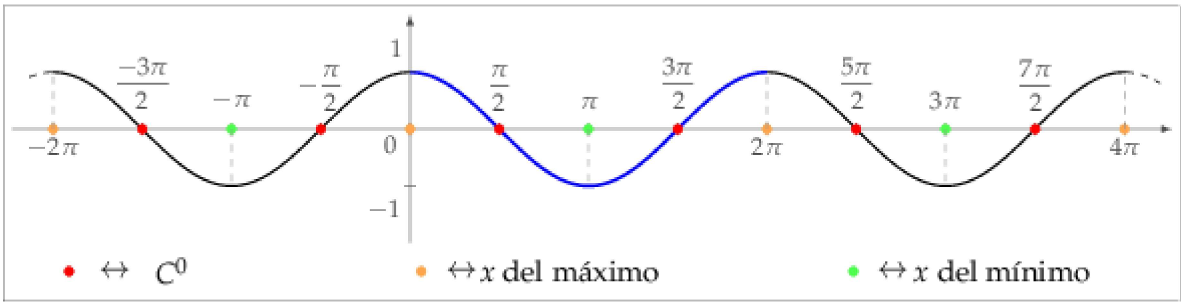


Aquí también vemos que $\cos(x)$ siempre estará entre -1 y 1 pues las abscisas de los puntos de la circunferencia se encuentran entre estos valores. Luego, la imagen de $f(x) = \cos(x)$ es $\operatorname{Im} f = [-1;1]$.

Esta función presenta las siguientes propiedades:

- El dominio es $\mathbb{R}$ y su imagen es el intervalo $[-1;1]$.
- Es continua.
- Su conjunto de ceros es $C^0 = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Es periódica, de período 2π.
- Su valor máximo es 1 y lo alcanza para todo x de la forma $x = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
- Su valor mínimo es -1 y lo alcanza para todo x de la forma $x = \pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Resumiendo en un gráfico:



Ejemplo. Hallar los ceros y los conjuntos de positividad y de negatividad de $f(x) = 1 + 2\,\mathrm{sen}(3x + \pi)$ para $x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{6}\right]$.

Empecemos buscando los ceros de f. Para esto, tenemos que resolver la ecuación

$$1 + 2\,\mathrm{sen}(3x + \pi) = 0 \quad \text{para } x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{6}\right].$$

Despejando, esto es equivalente a resolver

$$\mathrm{sen}(3x + \pi) = -\frac{1}{2} \quad \text{para } x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{6}\right].$$

Notemos que x se encuentra dentro del argumento de la función seno

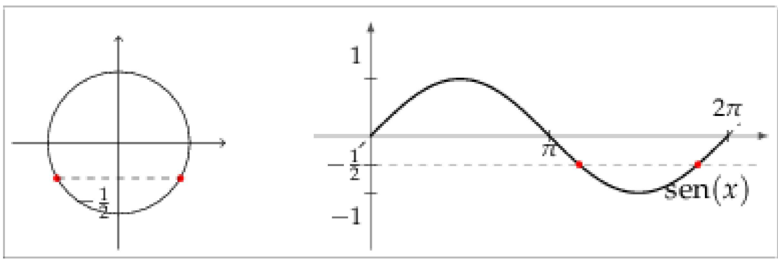
$$\mathrm{sen}(\color{red}{3x + \pi}) = -\frac{1}{2},$$

por lo que no se puede despejar directamente.

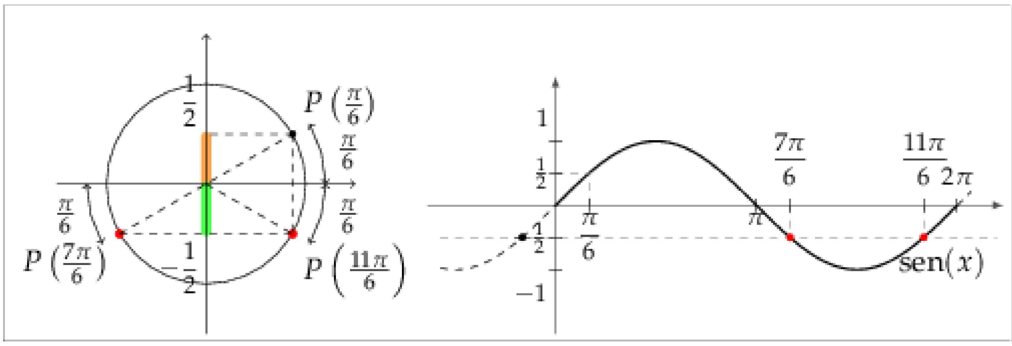
Veamos primero cómo despejar la ecuación

$$\mathrm{sen}(\color{red}{z}) = -\frac{1}{2},$$

para un argumento z.



La tabla de valores nos muestra que $\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. A partir de este valor, y con ayuda de la circunferencia, podemos encontrar los valores de z en $[0;2\pi]$ tales que $\mathrm{sen}(z) = -\frac{1}{2}$:



Podemos ver tanto en el gráfico de la función seno como en la circunferencia que los únicos dos valores de z en $[0;2\pi]$ que satisfacen la ecuación son $z=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$ y $z=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$. Y como la función seno es periódica, **todo** valor de z que satisface la ecuación es de la forma

$$z=-\frac{7\pi}{6}+2k\pi \quad \text{o} \quad z=\frac{11\pi}{6}+2k\pi \quad \text{con}\, k\in\mathbb{Z}.$$

(Al dar vueltas enteras en la circunferencia, caemos en los mismos puntos.)

Pero recordemos que, en realidad buscamos $x\in\left[-\pi;\frac{\pi}{6}\right]$ que verifique

$$\text{sen}(3x+\pi)=-\frac{1}{2}.$$

Luego,

$$3x+\pi=\frac{7\pi}{6}+2k\pi \quad \text{o} \quad 3x+\pi=\frac{11\pi}{6}+2k\pi,$$

con $k\in\mathbb{Z}$ tal que $x\in\left[-\pi;\frac{\pi}{6}\right]$.

Despejando:

$$3x=-\pi+\frac{7\pi}{6}+2k\pi \quad \text{o} \quad 3x=-\pi+\frac{11\pi}{6}+2k\pi,$$

$$3x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \text{o} \quad 3x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,$$

$$x=\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3} \quad \text{o} \quad x=\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3},$$

con $k\in\mathbb{Z}$ tal que $x\in\left[-\pi;\frac{\pi}{6}\right]$.

Veamos entonces para qué valores de $k\in\mathbb{Z}$ estas últimas expresiones de x están en el intervalo $\left[-\pi;\frac{\pi}{6}\right]$.

k	$\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}$	
-2	$\frac{\pi}{18}+\frac{2(-2)\pi}{3}=-\frac{23\pi}{18}<-\pi$	×
-1	$\frac{\pi}{18}+\frac{2(-1)\pi}{3}=-\frac{11\pi}{18}$	✓
0	$\frac{\pi}{18}+\frac{2.0.\pi}{3}=\frac{\pi}{18}$	✓
1	$\frac{\pi}{18}+\frac{2.1.\pi}{3}=\frac{13\pi}{18}>\frac{\pi}{6}$	×

k	$\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}$	
-2	$\frac{5\pi}{18}+\frac{2(-2)\pi}{3}=-\frac{19\pi}{18}<-\pi$	×
-1	$\frac{5\pi}{18}+\frac{2(-1)\pi}{3}=-\frac{7\pi}{18}$	✓
0	$\frac{5\pi}{18}+\frac{2.0.\pi}{3}=\frac{5\pi}{18}>\frac{\pi}{6}$	×

De aquí deducimos:

$$C^0 = \{-\frac{11\pi}{18}, -\frac{7\pi}{18}, \frac{\pi}{18}\}.$$

A partir de los ceros, como f es continua, podemos aplicar el Corolario del Teorema de Bolzano para determinar sus conjuntos de positividad y de negatividad. Recordemos que solo nos interesan los valores de x en el intervalo $\left[-\pi; \frac{\pi}{6}\right]$

x	$\left[-\pi; -\frac{11\pi}{18}\right)$	$-\frac{11\pi}{18}$	$\left(-\frac{11\pi}{18}; -\frac{7\pi}{18}\right)$	$-\frac{7\pi}{18}$	$\left(-\frac{7\pi}{18}; \frac{\pi}{18}\right)$	$\frac{\pi}{18}$	$\left(\frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{6}\right]$
f	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
pues	$f(-\pi) = 1 > 0$		$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$		$f(0) = 1 > 0$		$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1 < 0$

De esta tabla podemos deducir

$$C^+ = \left[-\pi; -\frac{11\pi}{18}\right) \cup \left(-\frac{7\pi}{18}; \frac{\pi}{18}\right) \quad \text{y} \quad C^- = \left(-\frac{11\pi}{18}; -\frac{7\pi}{18}\right) \cup \left(\frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{6}\right].$$

Y así resolvimos todo el ejercicio.

Veámoslo ahora gráficamente: