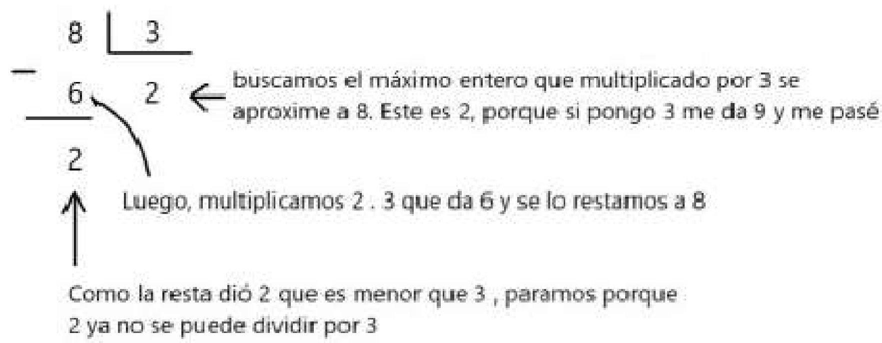
Algoritmo de división de polinomios,
Ruffini y Teorema del Resto y sus resultados

Vamos a explicar en este punto lo que se conoce como "Algoritmo de la división de polinomios" para el ejercicio tipo 24 de la Práctica 2

Recordemos como dividimos dos números enteros (Z : conjunto de los números enteros : positivos, negativos y el cero)

Por ejemplo : 8 dividido 3



El 8 se llama Dividendo, el 3 se llama Divisor, el 2 debajo del 3 se llama Cociente y el 2 que no se puede dividir más se llama Resto

El algoritmo de la división de números enteros dice entonces que un P dividido Q es igual a un C cociente más un Resto R, R debe ser mayor que 0, es decir:

P = Q . C + R, en nuestro ejemplo: 8 = 3 . 2 + 2

Cuánto dará la división de 5 con -2 ? por el algoritmo será: **5 = (-2) . 3 + 1**
Y la división de -11 con 3 ? será: **-11 = 3 . (-4) + 1**

Otro resultado importante :

Se dice que un número entero P es divisible por Q,
cuando el resto de la division entera R es 0

Ejemplo : 8 es divisible por 4 porque 8 = 4.2 + 0
12 es divisible por 2, por 3, por 4 y por 6, porque 12 = 2.6 + 0 como también 12 = 3.4 + 0
como también 12 = 4.3 + 0 o como también 12 = 6.2 + 0
- 6 es divisible por 3 porque - 6 = 3. (-2) + 0
10 es divisible por (-5) porque 10 = (-5) (-2) + 0

Asimismo, cuando un número como el 8 es divisible por 4 (porque el resto es 0)
se dice que 8 es múltiplo de 4

Ok, esto lo saben de hace rato
(aunque lo de dividir por un numero < 0 no, ahora ya lo saben !)

Extensión a los polinomios

Lo interesante es que este algoritmo de la división de números enteros en Z
puede extenderse a Polinomios P (x)

Así como tenemos un conjunto de números en Z enteros, también existe
el conjunto de todos los polinomios de grado n
$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots + a_n x^n$
$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \quad n \in \mathbb{N}$
valor numérico

No es la intención dar una clase de Álgebra,
para lo cual debería estar mucho más preparado,
sino utilizar el resultado del Algoritmo de división de Polinomios, que dice :

Sean P (x) y Q (x) dos polinomios con el grado de P (x) mayor que el grado de Q (x)

Entonces existen C (x) y R (x),
constante
denominados C (X) polinomio Cociente y R (x) polinomio Resto
constante
con grado de C (x) menor que el de P (x) y el de Q (x), y R (x) con grado menor que el de Q (x)
constante
tal que

$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$
constante

Ejemplo de división de polinomios :

Sea $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 2x - 4$ y sea $Q(x) = x^2 - 2x - 1$

encontremos el polinomio Cociente C (x) y

constante

el polinomio Resto R (x) de la división de polinomios

Se ordenan los polinomios poniendo los términos de mayor grado a la izquierda y descendiendo de grado

Se toma el coeficiente de mayor grado de P (x) (el 3) y se lo divide por el coeficiente de mayor grado de Q (x) (el 1) lo cual da $\frac{3}{1} = 3$

Se divide x^3 con x^2 lo cual da x elevado a la resta de los exponentes, es decir $x^{(3-2)} = x$ como cociente va quedando 3 x

Ahora se multiplica 3 x con el término del divisor de menor grado (grado , el - 1) y el resultado - 3 x , se lo escribe debajo del término de P (x) correspondiente a ese grado, (grado 1)

Lo mismo se hace con los demás términos, coeficiente a coeficiente y grado con grado, aplicando la regla de los signos para cada término

Si el grado del polinomio que queda de restar todavía es mayor que el grado del divisor Q (x) , se baja el término que no se consideró (el - 4) y se procede de la misma forma hasta que el polinomio que queda de restar, tenga grado menor que el grado del divisor Q (x)

Ahi se para el procedimiento y el que quedó de restar será el polinomio resto R (x)

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & C(x) \end{array} \Longrightarrow P(x) = Q(x)\,.\,C(x) + R(x)$$

$$\begin{array}{rl|l}
 & 3x^3 + 2x^2 - 2x - 4 & 1x^2 - 2x - 1 \\ \cline{3-3}
- & (3x^3 - 6x^2 - 3x) & 3x + 8 \\ \cline{2-2}
 & \cancel{0x^3} + 8x^2 + 1x &
\end{array}$$

como el grado de este polinomio todavia es mayor o igual que el grado del divisor Q, bajo el - 4 y sigo un paso más

$$\begin{array}{rl}
 & +8x^2 + 1x - 4 \\
- & (+8x^2 - 16x - 8) \\ \hline
 & 0x + \underbrace{17x + 4}_{R(x)}
\end{array}$$

$3x^3+2x^2-2x-4$

8 dividido 1 es 8 y x^2 dividido x^2 es x^0 que es 1 luego multiplico 8 con -1 que da -8 y lo ubico debajo del -4

acá paro porque el grado del resto es menor que el grado del divisor Q(x)

Como $P(x) = Q(x)\,.\,C(x) + R(x)$

$$3x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = (x^2 - 2x - 1)\,.\,(3x+8) + (17x+4)$$

si distribuyen del lado derecho verán que se obtiene P(x)

Se obtiene : C (x) = 3 x + 8 y R (x) = 17 x + 4

constante

si hacen la cuenta podrán verificar que

$$3x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = \left(x^2 - 2x - 1\right)\left(3x + 8\right) + 17x + 4$$

Asi como con los números enteros existe el concepto de divisible o múltiplo de un número entero cuan do el resto de la división entera es cero, también existe para polinomios que un P (x) sea divisible por Q (x) . Eso ocurre cuando R (x) = 0

Resultado importante :

Teorema del Resto

Sea r un número real . El Resto de la división de P (x) por el monomio (x - r) es P (r)

Observen que al dividir P (x) con (x - r) existe un cociente C (x) y un resto R
constante

que es 0 o una constante

es decir P (x) = (x - r) C (x) + R
constante

Si evaluamos P (x) en r

P (r) = (r - r) C (r) + R = 0 + R = R como dice el teorema
constante

Resultados que se obtienen del Teorema del Resto

1. si r es raíz de P (x) o sea P (r) = 0, P (x) es divisible por (x - r) y viceversa
(que sea divisible quiere decir que R = 0)

Este resultado es el que se usa para, dada una raíz de f (x), ir bajando uno a uno el grado de f (x), factorizándola en factores del tipo (x - raíz)

2. Si P (x) es un polinomio de grado n y se conocen q < n raíces entonces

P (x) = $(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \ldots (x - r_q)$ .C (x)
constante

3. Un polinomio de grado n tiene a lo sumo n ceros o raíces reales
(a lo sumo = tiene n o menos que n)

Regla de Ruffini

Este algoritmo sirve para dividir porlinomios por monomios del tipo (x - r)

Apliquemos Ruffini a P (x) = $3x^3 + 2x^2 - 2x - 4$ y dividamos por el monomio (x - 2)

procedimiento : ordenando P (x) de izquierda a derecha en orden descendente desde el mayor grado al menor (P (x) ya está ordenado)

Si algún grado no apareciera en P (x) se completa con el coeficiente 0 para ese grado

Se escriben los coeficientes de cada grado en orden descendente y hacia la derecha y se traza una recta horizontal debajo de ellos.

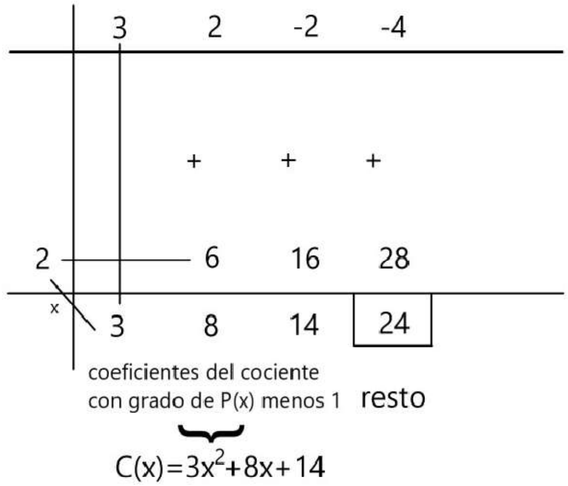
Se traza una recta vertical a la izquierda del coeficiente de mayor grado y debajo y a la izquierda se escribe el r (del monomio x - r)

Luego se traza una recta horizontal paralela a la que está más arriba.

Vean la imagen siguiente aplicando al ejemplo

$P(x)=3\,x^3+2\,x^2-2\,x-4$

$Q(x)=x-2$



por el algoritmo de división: P(x)=(x-r).C(x) + R(x)

$$3x^3+2x^2-2x-4=(x-2)\,(3x^2+8x+14)+24$$

Las cuentas se hacen asi :

se pone debajo de la recta horizontal de más abajo el coeficiente de mayor grado
(es como que se lo baja, en el ejemplo se baja el 3)
se multiplica este coeficiente que bajamos el 3 por el r = 2,
aplicando regla de los signos
se ubica el resultado a la misma altura que la fila imaginaria a la altura del r,
pero debajo de la columna del coeficiente justo siguiente a la derecha (el 6)
se suma el 2 do coeficiente de arriba con este resultado y lo que resulta se pone debajo
de la recta horizontal de abajo (el 8)
Y asi se sigue hasta llegar a la última columna de coeficientes
Finalmente se construye el polinomio cociente
con los coeficientes de abajo teniendo en cuenta
que el cociente tendra un grado menos que el P (x)

$C(x)=3\,x^2+8\,x+14$, $R(x)=24$
constante

Entonces $3\,x^3+2\,x^2-2\,x-4=(x-2)\,(3\,x^2+8\,x+14)+24$

Veamos un caso particular, que es cuando P (x) es divisible por (x - r), o sea el resto de la división es cero, aplicando Ruffini

Este caso sucede cuando r es raíz de P (x), o sea P (r) = 0

Ejemplo

sea $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 2x - 3$ y $r = 1$ que es raíz, lo cual se ve reemplazando en $P(x)$

Entonces, $P(x)$ es divisible por $(x - 1)$ ($R(x)$ va a dar cero)

Apliquemos Ruffini

$P(x)=3x^3 + 2x^2 - 2x - 3$

$r=1$ es raíz, vamos a dividir por $x-1$

	3	2	-2	-3
1		3	5	3
	3	5	3	$\boxed{0}$
				resto

Como el resto es cero $P(x)$ es divisible por $(x-1)$

Entonces $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 2x - 3 = (x - 1)(3x^2 + 5x + 3)$

+++
+++++++++++++