Estudio de funciones

Estudio de funciones y gráficos aproximados

El objetivo de esta sección es mostrar cómo podemos construir el gráfico aproximado de una función f a partir del estudio de su dominio, asíntotas, crecimiento y decrecimiento y extremos locales.

Comenzaremos con la función $f(x) = -3x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 3$ de la cual ya analizamos en una explicación anterior crecimiento, decrecimiento y extremos relativos.

Ejemplo 1. Sea $f(x) = -3x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 3$. Hacer un gráfico aproximado de f.

Tenemos que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f son $I^{\uparrow} = (-\infty; 0)$ y $I_{\downarrow} = (0; +\infty)$, respectivamente, y f tiene un único extremo relativo, que es un máximo, en $x = 0$.
Un punto destacado del gráfico de f es aquél donde se encuentra el máximo local. Para determinarlo, calculamos el valor de f en $x = 0$:

$$f(0) = 3$$

Graficaremos también el punto del gráfico correspondiente al punto crítico de f en el que no tiene un extremo local, para lo cual calculamos

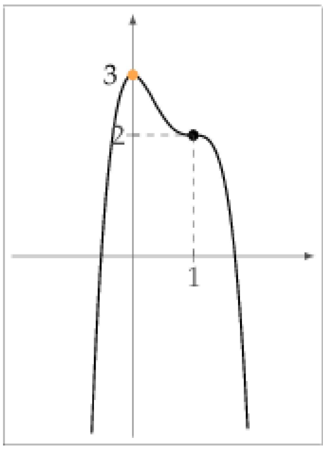
$$f(1) = 2$$

Otra información que nos será de utilidad para la construcción del gráfico de f es su comportamiento en $+\infty$ y $-\infty$. Para conocerlo, calculamos los límites correspondientes:

$$\lim_{x \to +\infty} -3x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 3 = \lim_{x \to +\infty} x^4(-3 + \frac{8}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{3}{x^4}) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} -3x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 3 = \lim_{x \to -\infty} x^4(-3 + \frac{8}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{3}{x^4}) = -\infty$$

Con toda esta información podemos construir un gráfico aproximado de f.



Observemos que, si bien f no tiene un máximo o mínimo local en $x = 1$ (dado que f es decreciente tanto a la izquierda como a la derecha de $x = 1$), la recta tangente al gráfico de f en el punto $(1, f(1))$ es horizontal (su pendiente es $f'(1) = 0$). Como consecuencia, cerca del punto $(1, f(1))$, el gráfico debe ser necesariamente como lo hemos dibujado arriba (comparar con el gráfico de la función $f(x) = x^3$ que hemos visto en la explicación anterior).

Ejemplo 2. Sea $f(x) = \dfrac{4x+1}{-x^2+2x}$. Hallar el dominio de f, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los máximos y mínimos relativos y las asíntotas. Hacer un gráfico aproximado de f.

Como f es una función racional, su dominio es el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ que no anulan al denominador. Ahora, los valores de x tales que $-x^2 + 2x = 0$ son $x = 0$ y $x = 2$; luego,

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0, 2\}}$$

Para estudiar el crecimiento y los extremos relativos de f calculamos su derivada. Usando la regla del cociente, obtenemos:

$$f'(x) = \frac{4.(-x^2+2x)-(4x+1)(-2x+2)}{(-x^2+2x)^2} = \frac{-4x^2+8x-(-8x^2+6x+2)}{(-x^2+2x)^2} = \frac{4x^2+2x-2}{(-x^2+2x)^2}$$

A continuación, buscamos los puntos críticos de f, hallando los ceros de f'. Estos son los $x \in \mathbb{R}-\{0,2\}$ tales que se anula el numerador de f', es decir, tales que

$$4x^2+2x-2=0 \iff x=-1 \text{ o } x=\frac{1}{2}$$

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, buscamos los conjuntos de positividad y negatividad de f', aplicando el corolario del teorema de Bolzano. Los extremos de los intervalos a considerar son los x *que no pertenecen al dominio de* f (y que, por lo tanto, tampoco están en el dominio de f') y los *puntos críticos de* f. Resumimos nuestro análisis en la siguiente tabla:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2};2)$	2	$(2;+\infty)$
	$f'(-2)>0$		$f'(-\frac{1}{2})<0$		$f'(\frac{1}{4})<0$		$f'(1)>0$		$f'(3)>0$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-1)=1$ max	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$f(1/2)=4$ min	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$

A partir de esta tabla, obtenemos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f:

$$\boxed{I^{\uparrow}:(-\infty;-1),\ (\frac{1}{2};2),\ (2,+\infty),\quad I_{\downarrow}:(-1;0),\ (0;\frac{1}{2})}$$

y sus extremos locales (recordar que éstos sólo pueden hallarse en puntos críticos de f):

$$\boxed{f \text{ tiene un máximo local en } x=-1 \text{ y un mínimo local en} x=\frac{1}{2}}$$

Calculemos ahora las asíntotas de f. Para determinar las asíntotas verticales, hallamos el límite de f en los puntos que no pertenecen a su dominio:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{4x+1}{-x^2+2x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{4x+1}{x(-x+2)} = -\infty,\ \lim_{x\to 0^+}\frac{4x+1}{-x^2+2x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{4x+1}{x(-x+2)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{4x+1}{-x^2+2x} = \lim_{x\to 2^-}\frac{4x+1}{x(-x+2)} = +\infty,\ \lim_{x\to 2^+}\frac{4x+1}{-x^2+2x} = \lim_{x\to 2^+}\frac{4x+1}{x(-x+2)} = -\infty$$

y para determinar, si tiene, asíntotas horizontales, calculamos los límites en infinito:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{4x+1}{-x^2+2x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{x(4+\frac{1}{x})}{x^2(-1+\frac{2}{x})} = 0,\ \lim_{x\to +\infty}\frac{4x+1}{-x^2+2x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x(4+\frac{1}{x})}{x^2(-1+\frac{2}{x})} = 0$$

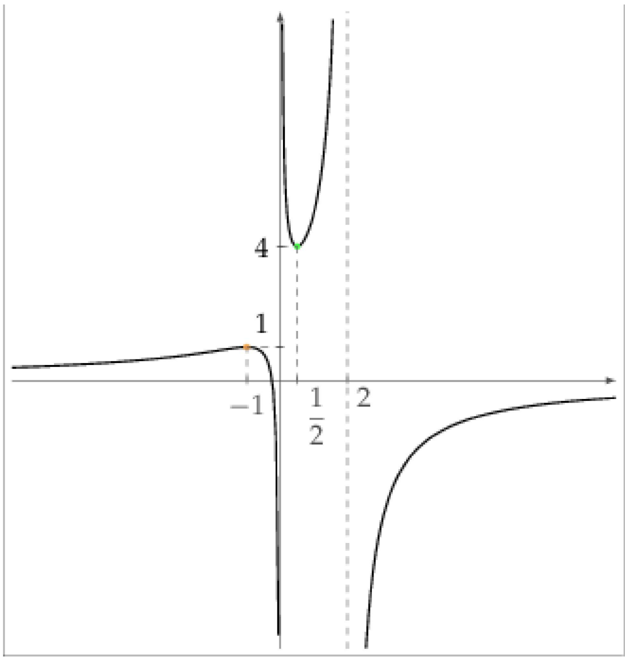
Concluimos entonces que las asíntotas de f son:

$$\boxed{\text{Asíntotas verticales: } x=0 \text{ y } x=2,\quad \text{Asíntota horizontal: } y=0}$$

Con toda la información anterior, podemos construir un gráfico aproximado de f:

Construcción del gráfico de una función

De esta forma, hemos obtenido:



Ejemplo 3. Sea $f(x) = e^{-x^2+4x-3}$. Hallar el dominio de f, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los máximos y mínimos relativos y las asíntotas. Hacer un gráfico aproximado de f.

Observamos que f es una composición de una función polinomial con una exponencial, que tienen ambas a $\mathbb{R}$ como dominio; luego,

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}}$$

Para continuar con el estudio de f, calculamos su derivada. Aplicando la regla de la cadena, obtenemos:

$$f'(x) = e^{-x^2+4x-3}.(-2x+4)$$

Los puntos críticos de f son los ceros de f'. Como $e^{-x^2+4x-3} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, resulta que

$$f'(x) = 0 \iff -2x+4 = 0 \iff x = 2$$

Efectuamos ahora el estudio de los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y de sus extremos locales. Por el criterio de la primera derivada y el corolario del teorema de Bolzano, como f' es continua en todo $\mathbb{R}$, basta analizar los dos intervalos determinados por el punto crítico $x = 2$ (ya que en cada uno de ellos f' no se anula):

x	$(-\infty;2)$	2	$(2;+\infty)$
	$f'(0) > 0$		$f'(3) < 0$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(2) = e$ max	$\searrow$

En consecuencia, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f son:

$$\boxed{I^{\uparrow} : (-\infty;2), \quad I_{\downarrow} : (2,+\infty)}$$

y tiene un único extremo local:

$$\boxed{f \text{ tiene un máximo local en } x = 2}$$

Dado que f es continua en todo $\mathbb{R}$,

$$\boxed{f \text{ no tiene asíntotas verticales}}$$

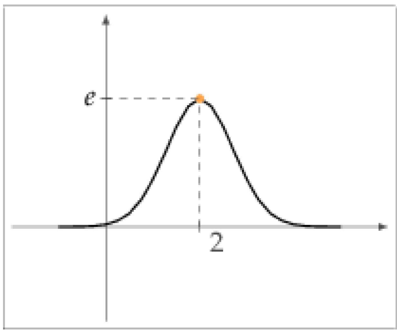
Finalmente, estudiemos las asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\overbrace{-x^2+4x-3}^{\to-\infty}} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} e^{\overbrace{-x^2+4x-3}^{\to-\infty}} = 0$$

(recordar que la función exponencial tiene asíntota horizontal $y = 0$ en $-\infty$). Por lo tanto:

$$\boxed{\text{Asíntota horizontal: } y = 0}$$

Para terminar, realizamos un gráfico aproximado de f teniendo en cuenta la información obtenida:



Ejemplo 4. Sea $f(x) = \text{sen}^2(x) + \cos(x)$ en $[0; 2\pi]$. Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de f. Hacer un gráfico aproximado.

Como el dominio de f es un intervalo cerrado, para hacer el estudio de la función trabajaremos por un lado en el intervalo abierto $(0; 2\pi)$ asociado y, por otro lado, analizaremos los extremos 0 y 2π del intervalo para ver si dan lugar a máximos o mínimos.

Comenzamos hallando la derivada de f y sus ceros en $(0; 2\pi)$, para obtener los puntos críticos:

$$f'(x) = 2\,\text{sen}(x)\cos(x) - \text{sen}(x) = \text{sen}(x)(2\cos(x) - 1)$$

A partir de la factorización de f', vemos que

$$f'(x) = 0 \iff \text{sen}(x) = 0 \quad \text{o} \quad 2\cos(x) - 1 = 0$$

Resolvemos entonces estas dos ecuaciones en el intervalo $(0; 2\pi)$:

- $\text{sen}(x) = 0$ tiene una única solución en $(0; 2\pi)$, que es $x = \pi$.
- $2\cos(x) - 1 = 0 \iff \cos(x) = \dfrac{1}{2}$. Observando la circunferencia trigonométrica o bien el gráfico de la función coseno, vemos que hay dos valores de x en $(0; 2\pi)$ tales que $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$, uno en el primer cuadrante y otro en el cuarto. Ahora, de la tabla de valores de funciones trigonométricas, obtenemos que $x = \dfrac{\pi}{3}$ es la primera de las soluciones. A partir de esta solución, obtenemos la que pertenece al cuarto cuadrante: $2\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$.

Así, los puntos críticos de f en el intervalo $(0; 2\pi)$ son $\dfrac{\pi}{3}$, π y $\dfrac{5\pi}{3}$. Consideramos también los extremos $x = 0$ y $x = 2\pi$ de $\text{Dom}(f)$. En la siguiente tabla, resumimos el estudio de crecimiento y decrecimiento de f:

x	0	$(0; \frac{\pi}{3})$	$\frac{\pi}{3}$	$(\frac{\pi}{3}; \pi)$	π	$(\pi; \frac{5\pi}{3})$	$\frac{5\pi}{3}$	$(\frac{5\pi}{3}; 2\pi)$	2π
		$f'(\frac{\pi}{6}) > 0$		$f'(\frac{\pi}{2}) < 0$		$f'(\frac{3\pi}{2}) > 0$		$f'(\frac{11\pi}{6}) < 0$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0) = 1$	$\nearrow$	$f(\frac{\pi}{3}) = \frac{5}{4}$ max	$\searrow$	$f(\pi) = -1$ min	$\nearrow$	$f(\frac{5\pi}{3}) = 1$ max	$\searrow$	$f(2\pi) = 1$

Deducimos entonces que los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f son:

$$\boxed{I^{\uparrow} : (0; \frac{\pi}{3}),\ (\pi; \frac{5\pi}{3}), \quad I_{\downarrow} : (\frac{\pi}{3}; \pi),\ (\frac{5\pi}{3}; 2\pi)}$$

Al observar el comportamiento de f en los extremos de su dominio $[0;2\pi]$, vemos que f es creciente a la derecha de $x=0$ y que es decreciente a la izquierda de $x=2\pi$. Así, el valor que toma f en $x=0$ es menor que el que toma en los x que están ``cerca", y lo mismo ocurre en $x=2\pi$. Por este motivo incluimos a los extremos del intervalo entre los mínimos locales de f.

$$\boxed{f \text{ tiene máximos locales en } x=\frac{\pi}{3} \text{ y } x=\frac{5\pi}{3} \text{ y mínimos locales en } x=0, x=\pi \text{ y } x=2\pi.}$$

Para terminar, hacemos un gráfico aproximado de f: