Método de integración por partes

Recordemos cómo se calcula la derivada del producto de dos funciones:
Si f y g son funciones derivables,

$$(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x).$$

Integremos ambos miembros:

$$\int (f(x).g(x))' dx = \int [f'(x).g(x) + f(x).g'(x)] dx.$$

El miembro izquierdo nos da (por definición de integral indefinida), $f(x).g(x) + C$; y en el miembro derecho podemos escribir la integral de la suma como la suma de las integrales:

$$f(x).g(x) + C = \int f'(x).g(x)dx + \int f(x).g'(x)dx.$$

Si pasamos restando uno de los términos, obtenemos la siguiente expresión:

$$f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx + C = \int f(x).g'(x)dx.$$

De estas cuentas que acabamos de hacer surge el método de integración por partes que nos indica que

$$\boxed{\int f(x).g'(x)dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx}$$

Veamos en un ejemplo cómo nos es útil este método:

Ejemplo 1. Calcular $\int x\cos(x)dx$.

Esta integral no está en tabla, no tiene ninguna suma (o resta), no tiene ningún número que pueda "sacarse afuera", ni tiene ninguna composición evidente. Intentamos entonces calcularla utilizando el método de integración por partes. Entre los factores, x y $\cos(x)$, elegimos uno que llamaremos $f(x)$ y otro que jugará el rol de $g'(x)$. Tomemos $f(x) = x$ y $g'(x) = \cos(x)$. Para aplicar el método, tenemos que obtener $f'(x)$, que en este caso es $f'(x) = 1$; y $g(x)$, que es una primitiva de $g'(x)$, y en este caso vemos en la tabla que puede ser $g(x) = \text{sen}(x)$. Entonces nos queda:

$$\begin{array}{lcl}
\int x\cos(x)dx & \underset{\substack{f(x)=x \to f'(x)=1 \\ g'(x)=\cos(x) \to g(x)=\text{sen}(x)}}{\overset{}{=}\atop\downarrow} & x\,\text{sen}(x) - \int 1.\,\text{sen}(x)dx = x\,\text{sen}(x) - \int \text{sen}(x)dx \\
& \underset{\text{integral por tabla}}{=\atop\downarrow} & x\,\text{sen}(x) - (-\cos(x)) + C = \boxed{x\,\text{sen}(x) + \cos(x) + C}
\end{array}$$

Algunas observaciones:

- Este método nos reduce el cálculo de una integral al de otra más sencilla. En este ejemplo, pasamos de integrar $x\cos(x)$ a integrar $\text{sen}(x)$, que está en tabla.
- La constante de integración C la sumamos una vez que no tenemos que calcular más integrales. Hay otras formas correctas de tratar la suma de estas constantes, pero sumarla en esta instancia es una de las formas más convenientes.
- La función g puede ser \textbf{cualquier} primitiva de la función que llamamos g'. En general, conviene elegir aquella cuya constante de integración es cero.
- No hay una forma clásica de elegir qué función jugará el papel de f y cuál el de g'. A pesar de que existen algunas reglas prácticas que indican qué elección conviene hacer, la mejor manera de aprender a elegir es a través de la práctica, calculando muchas integrales. En este ejemplo, si hubiéramos elegido $f(x) = \cos(x)$ y $g'(x) = x$ habríamos llegado a una integral que tampoco sabemos resolver con los métodos anteriores:

$$\int x\cos(x)dx \underset{\substack{f(x)=\cos(x)\to f'(x)=-\operatorname{sen}(x)\\ g'(x)=x\to g(x)=\frac{x^2}{2}}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{x^2}{2}(-\operatorname{sen}(x))-\int(-\operatorname{sen}(x))\frac{x^2}{2}dx$$

$$= -\frac{x^2}{2}\operatorname{sen}(x)+\frac{1}{2}\int x^2\operatorname{sen}(x)dx$$

Ejemplo 2. Calcular $\int x^2\operatorname{sen}(x)dx$.

Esta integral tampoco está en tabla, no tiene ninguna suma (o resta), no tiene ningún número que pueda "sacarse afuera", ni tiene ninguna composición evidente. Intentamos, nuevamente, resolverla utilizando el método de integración por partes. Entre los factores, x^2 y $\operatorname{sen}(x)$, elegimos uno que llamaremos $f(x)$ y otro que jugará el rol de $g'(x)$. Tomemos $f(x)=x^2$ y $g'(x)=\operatorname{sen}(x)$ (¿qué pasaba si lo tomábamos al revés?).

$$\int x^2\operatorname{sen}(x)dx \underset{\substack{f(x)=x^2\to f'(x)=2x\\ g'(x)=\operatorname{sen}(x)\to g(x)=-\cos(x)}}{\overset{\downarrow}{=}} x^2(-\cos(x))-\int 2x(-\cos(x))dx = -x^2\cos(x)+2\int x\cos(x)dx$$

Esta última integral que nos aparece no está en tabla, pero la calculamos en el ejemplo anterior (también utilizando el método de integración por partes). Así, utilizando el método de integración por parte dos veces, resolvemos nuestra integral original:

$$\int x^2\operatorname{sen}(x)dx \underset{\substack{f(x)=x^2\to f'(x)=2x\\ g'(x)=\operatorname{sen}(x)\to g(x)=-\cos(x)}}{\overset{\downarrow}{=}} -x^2\cos(x)+2\int x\cos(x)dx$$

$$\underset{\substack{f(x)=x\to f'(x)=1\\ g'(x)=\cos(x)\to g(x)=\operatorname{sen}(x)}}{\overset{\downarrow}{=}} -x^2\cos(x)+2\left(x\operatorname{sen}(x)-\int\operatorname{sen}(x)dx\right)$$

$$= \boxed{-x^2\cos(x)+2(x\operatorname{sen}(x)+\cos(x))+C}$$

Ejemplo 3. Calcular $\int e^{3x}(5x+1)dx$.

La función adentro de esta integral no está en tabla pero, si distribuimos, es la integral de una suma. Sin embargo, separar esta suma no necesariamente nos va a simplificar las cuentas (esto se aprende después de mucha ejercitación).

Aunque vemos la composición de la función e^x con $h(x)=3x$, no encontramos relación entre $5x+1$ y $(3x)'=3$. Luego, podemos ver si se resuelve con el método de integración por partes. Vamos a tomar $f(x)=5x+1$ y por lo tanto será $f'(x)=5$. Y si tomamos $g'(x)=e^{3x}$ (que no está en la tabla), para hallar g tenemos que aplicar el método de sustitución, por la composición que acabamos de mencionar.

$$\int e^{3x}dx \underset{\substack{u=3x\\ du=3dx}}{\overset{\downarrow}{=}} \int\frac{3}{3}.e^{3x}dx=\frac{1}{3}\int e^u du=\frac{1}{3}e^u+C=\frac{1}{3}e^{3x}+C$$

Entonces, para resolver nuestra integral procedemos de la siguiente manera:

$$\int e^{3x}(5x+1)dx \underset{\substack{f(x)=(5x+1)\to f'(x)=5\\ g'(x)=e^{3x}\to g(x)=\frac{1}{3}e^{3x}}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{1}{3}(5x+1)e^{3x}-\int 5.\frac{1}{3}.e^{3x}dx=\frac{1}{3}(5x+1)e^{3x}-\frac{5}{3}\int e^{3x}dx=$$

$$\underset{\text{como arriba}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{1}{3}(5x+1)e^{3x}-\frac{5}{3}.\frac{1}{3}e^{3x}+C=\boxed{\frac{1}{3}(5x+1)e^{3x}-\frac{5}{9}e^{3x}+C}$$