
Comentarios teóricos y ejemplos

Funciones Trigonométricas

Resolución de ejercicios de la Práctica 4

Ejercicios 12 a 21

En esta primera parte sugiero que estudien la teórica de funciones trigonométricas

desde la página 89 a 110

Y los archivosPDF que están subidos al Campus en la Actividad 10, llamados :

Funciones trigonométricas

Estudio de las funciones seno y coseno

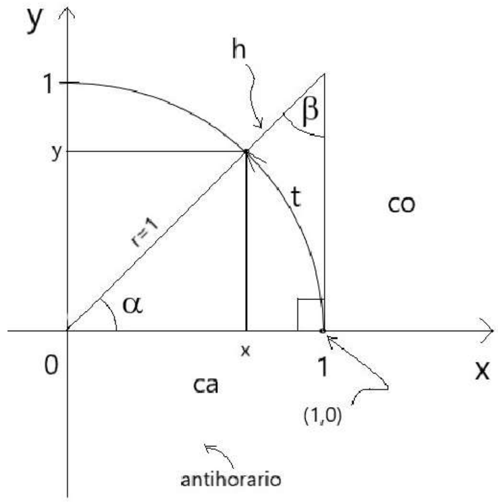
Imagen, amplitud y período

Comentarios teóricos sobre funciones trigonométricas

Todos recordarán el concepto de ángulos en triángulos y la introducción de una unidad de medida de ángulos los grados sexagesimales

Por ejemplo, en el triángulo rectángulo isósceles de base 1 y altura 1 de la siguiente figura :

Por teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo de base 1 y altura 1, su hipotenusa es igual a: $h=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$



como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°grados sexagesimales

es claro que: $\alpha=45°$ $\beta=45°$

$$\text{sen}(\alpha)=\frac{\text{medida del cateto opuesto a }\alpha}{\text{medida de la hipotenusa}}=\frac{co}{h}$$

$$\cos(\alpha)=\frac{\text{medida del cateto adyacente a }\alpha}{\text{medida de la hipotenusa}}=\frac{ca}{h}$$

$$\text{tg}(\alpha)=\frac{\text{medida del cateto opuesto a }\alpha}{\text{medida del cateto adyacente a }\alpha}=\frac{co}{ca}=\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

La relación entre grados sexagesimales y radianes viene dada por la siguiente definición

si t es la longitud de arco de circunferencia de radio 1 que se extiende en sentido antihorario desde el punto (1,0) y hasta un punto sobre la circunferencia digamos (x,y), se define:

$$\text{sen}(t)=y \quad , \quad \cos(t)=x$$

Como la longitud de la circunferencia es $2\pi r$ y como r=1, la longitud es 2π
Si extendemos un "hilo" sobre la circunferencia de radio1, la longitud del "hilo" es 2π

π es el número irracional con desarrollo decimal infinito no periódico, cuyas primeras cifras son:
$\pi \cong 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494$

Las longitudes de arco se miden en radianes

Si la longitud del arco sobre la circunferencia es $t = 2\pi$ radianes corresponde al ángulo sexagesimal de 360°

Si la longitud del arco sobre la circunferencia es $t = \pi$ radianes corresponde al ángulo sexagesimal de 180°

Si $t = \frac{\pi}{2}$ radianes corresponde al ángulo sexagesimal de 90°

Si $t = \frac{\pi}{4}$ radianes corresponde al ángulo sexagesimal de 45°

Si $t = \frac{\pi}{3}$ radianes corresponde al ángulo sexagesimal de 60°

Si $t = \frac{\pi}{6}$ radianes corresponde al ángulo sexagesimal de 30°

Usualmente las unidades en radianes no se escriben y cuando se dic e $t = \pi$ se sobreentiende que son π radianes

La siguiente fórmula es la que usamos para pasar de radianes a grados sexagesimales :

En general dado un arco de circunferencia de longitud t radianes el ángulo sexagesimal α que se obtiene es :

$$\alpha = t\,\frac{180}{\pi}$$

las unidades de α son en grados sexagesimales y las de t y π en radianes

Recíprocamente, para pasar de grados sexagesimales α a t radianes usamos esta otra :

$$t = \alpha\,\frac{\pi}{180}$$

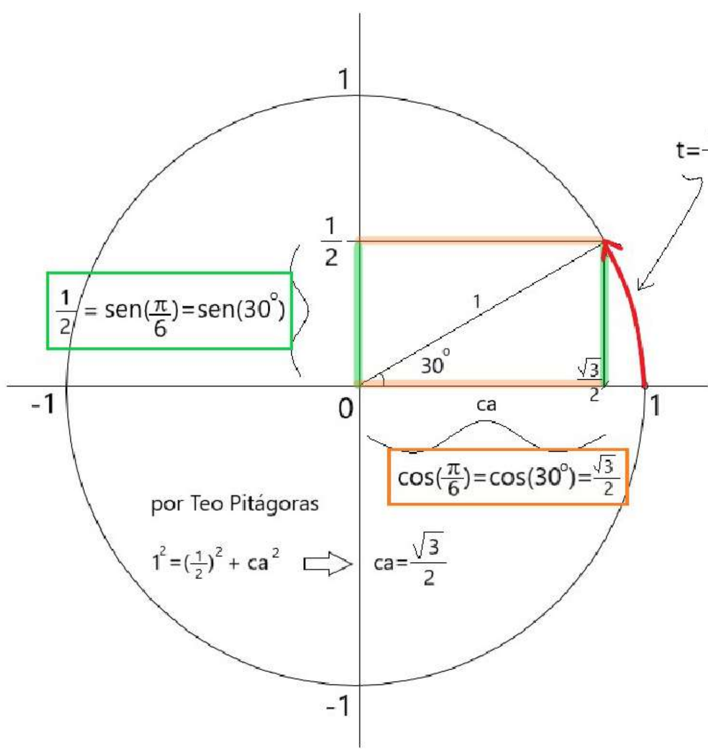
Veamos en particular, cuáles son los valores de seno y coseno para

$t = \frac{\pi}{6} \equiv \alpha = 30°$; $t = \frac{\pi}{3} \equiv \alpha = 60°$;

$t = \frac{\pi}{4} \equiv \alpha = 45°$;

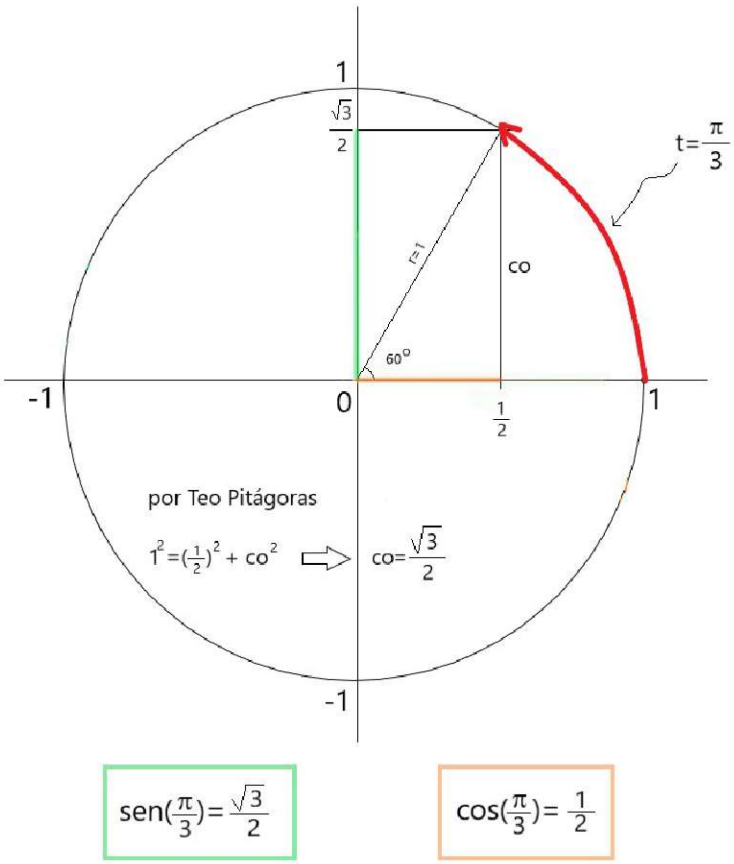
$t = 0\,\pi \equiv \alpha = 0°$; $t = \frac{\pi}{2} \equiv \alpha = 90°$

Si $t = \frac{\pi}{6} \equiv \alpha = 30°$

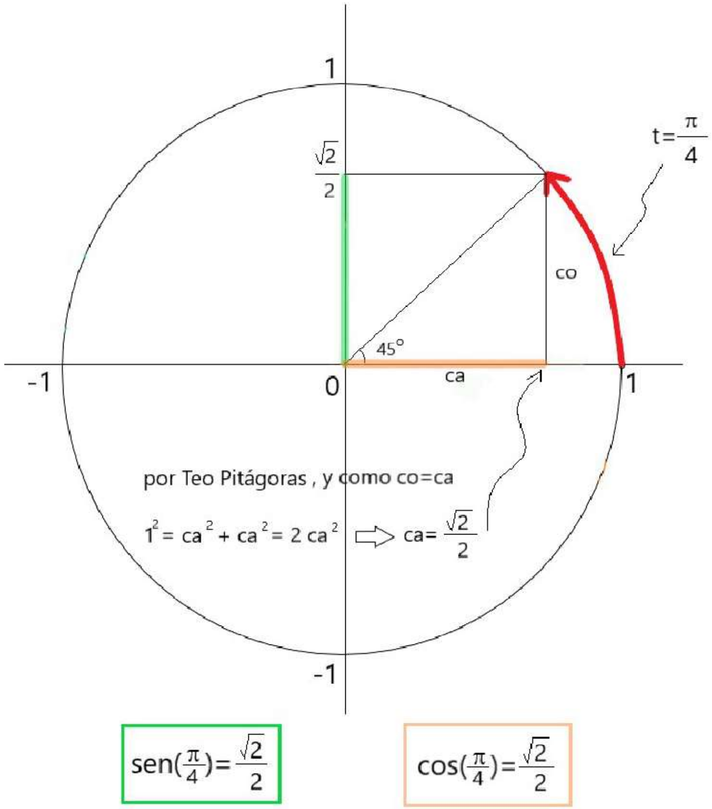


$$\boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}} \qquad \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

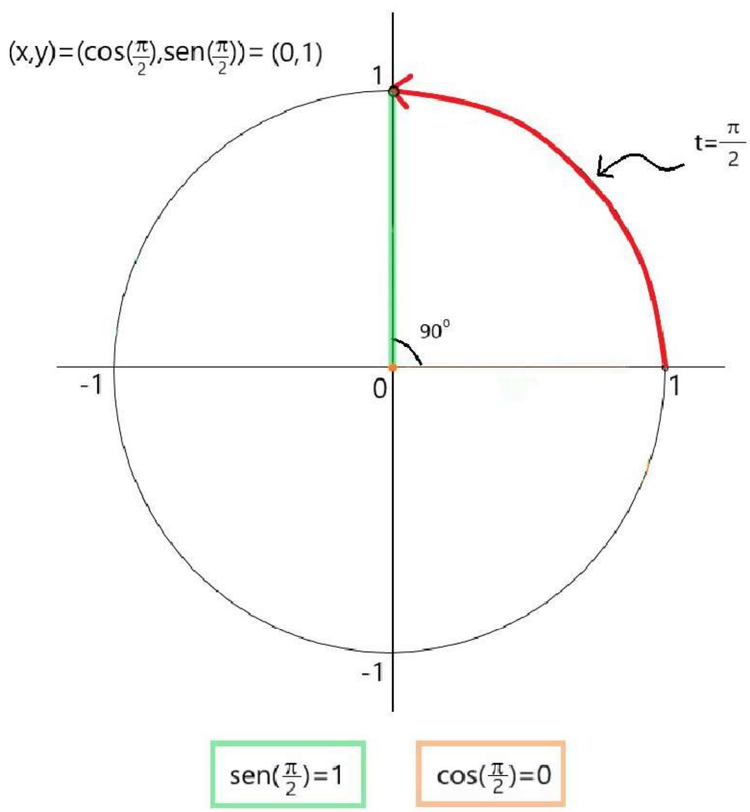
Si $t = \frac{\pi}{3} \equiv \alpha = 60°$



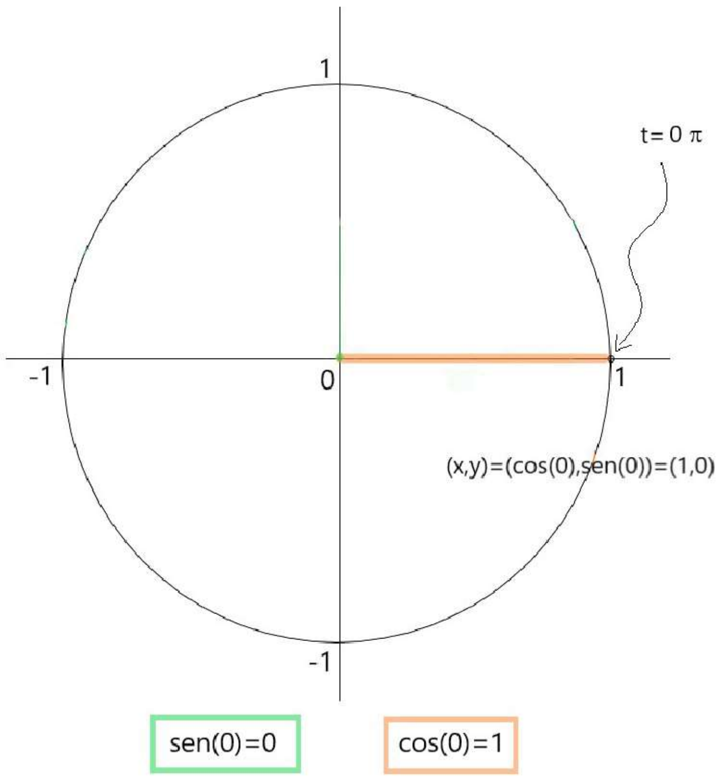
Si $t = \frac{\pi}{4} \equiv \alpha = 45°$



Si t = $\frac{\pi}{2} \equiv \alpha = 90°$



Si t = 0 π ≡ α = 0°



Resumiendo :

Si $t = 0\pi \equiv \alpha = 0°$ $\Longrightarrow$ $(x, y) = (\cos(0), \text{sen}(0)) = (1, 0)$

Si $t = \frac{\pi}{6} \equiv \alpha = 30°$ $\Longrightarrow$ $(x, y) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right), \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Si $t = \frac{\pi}{4} \equiv \alpha = 45°$ $\Longrightarrow$ $(x, y) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Si $t = \frac{\pi}{3} \equiv \alpha = 60°$ $\Longrightarrow$ $(x, y) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Si $t = \frac{\pi}{2} \equiv \alpha = 90°$ $\Longrightarrow$ $(x, y) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (0, 1)$

----

1 er Resultado :

El seno de un ángulo es igual al coseno del ángulo complementario

dos ángulos son complemnetarios si la suma de ellos es 90°

$$\text{sen}(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

Ejemplo : $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{3\pi - \pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

es decir

$$\text{sen}\left(30°\right) = \cos\left(60°\right) \quad \text{ó bien} \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

de manera similar :

$$\text{sen}\left(45°\right) = \cos\left(45°\right) \quad \text{ó bien} \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{sen}\left(60°\right) = \cos\left(30°\right) \quad \text{ó bien} \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{sen}\left(0°\right) = \cos\left(90°\right) \quad \text{ó bien} \quad \text{sen}\left(0\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Estos resultados pueden organizarse en la siguiente tabla :

	0°	30°	45°	60°	90°
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen(t)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos(t)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

----

2 do Resultado :

Como (x, y) = (cos (t), sen (t))

la aplicación del Teorema de Pitágoras al triángulo
de base x = cos (t) y altura y = sen (t)

da la identidad pitagórica que vincula seno y coseno :

$$\cos^2(t) + \text{sen}^2(t) = 1$$

----

ejemplo : apliquemos este resultado a $t = \frac{\pi}{6}$

Mirando en la tabla, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Con estos valores, hagamos la cuenta $\cos^2(t) + \text{sen}^2(t) = 1$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Se cumple la igualdad.

----

3 er Resultado

Los arcos de circunferencia en radianes o los ángulos sexagesimales con valores mayores que $\frac{\pi}{2}$ o 90°, por cuestiones de simetría alcanzan los mismos valores de seno y coseno, en módulo que los arcos o ángulos entre

0 y $\frac{\pi}{2}$ (0° y 90°)

Es decir que los valores de seno y coseno de todos los arcos o ángulos sexagesimales entre 0 y 2π (0° y 360°) pueden obtenerse a partir de los valores de seno y coseno entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ (0° y 90°) considerando los signos positivo o negativo correspondiente.

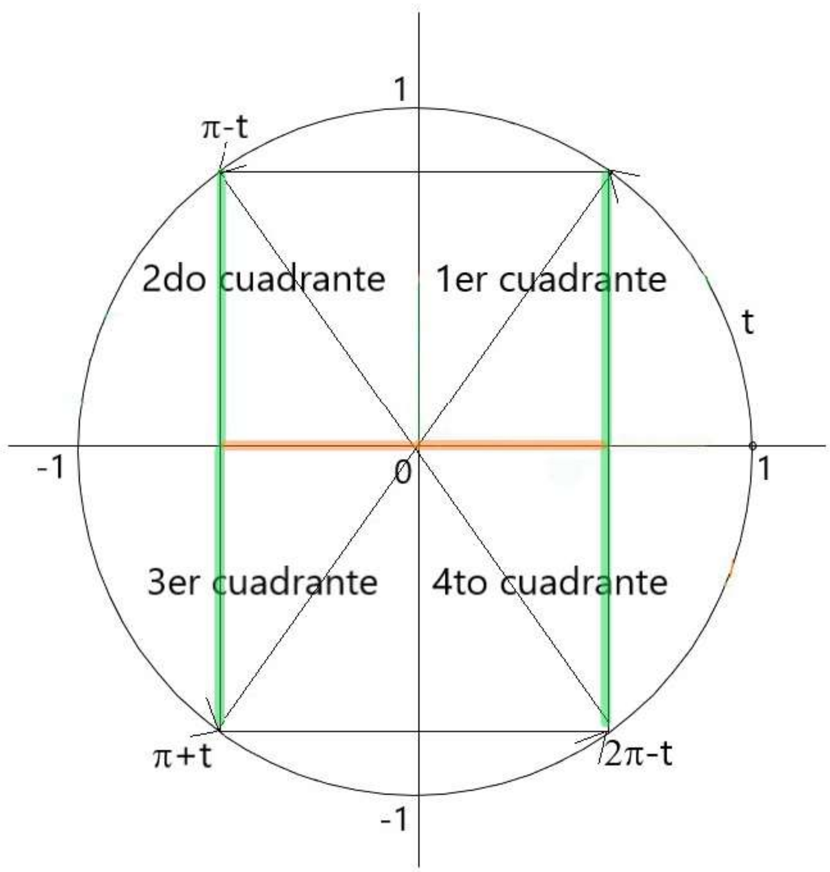
Se definen cuadrantes en sentido antihorario :

Al 1 er cuadrante pertenecen los arcos o ángulos entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ([0°, 90°])

Al 2 do cuadrante pertenecen los arcos o ángulos entre $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ([90°, 180°])

Al 3 er cuadrante pertenecen los arcos o ángulos entre $\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$ ([180°, 270°])

Al 4 to cuadrante pertenecen los arcos o ángulos entre $\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$ ([270°, 360°])



el arco t pertenece al 1 er cuadrante

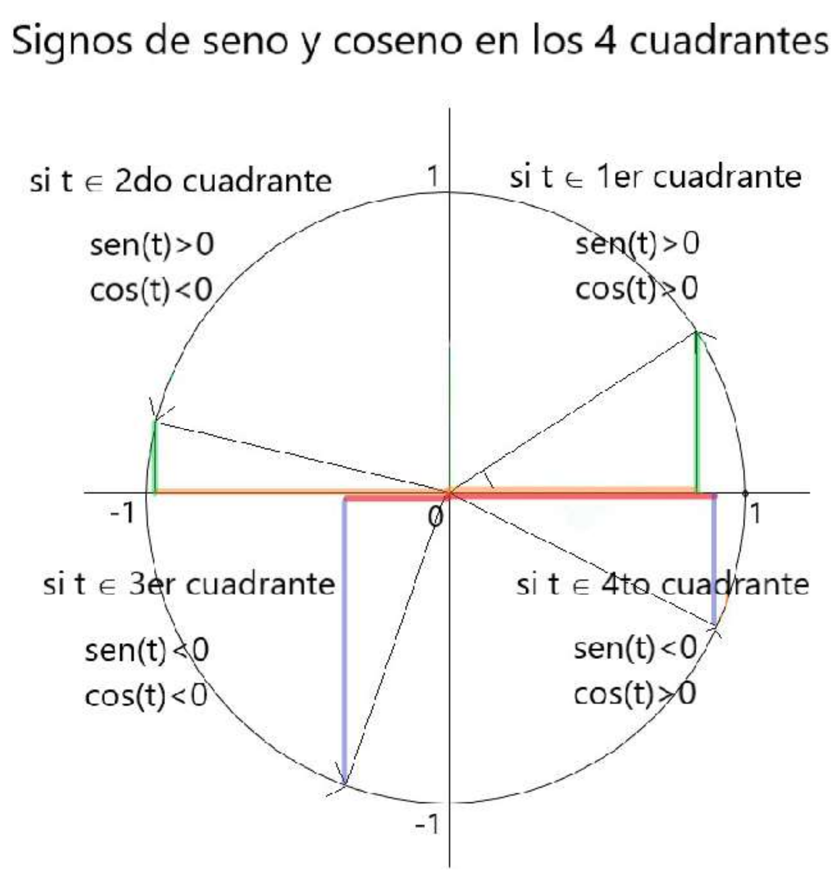
el arco $\pi - t$ pertenece al 2 do cuadrante y forma un triángulo semejante al del 1 er cuadrante

el arco $\pi + t$ pertenece al 3 er cuadrante y forma un triángulo semejante al del 1 er cuadrante

el arco $2\pi - t$ pertenece al 4 to cuadrante y forma un triángulo semejante al del 1 er cuadrante

Por lo tanto los valores de seno y coseno diferirán en algún signo negativo o positivo respecto a los valores de seno y coseno del arco t del 1 er cuadrante

Observen que :



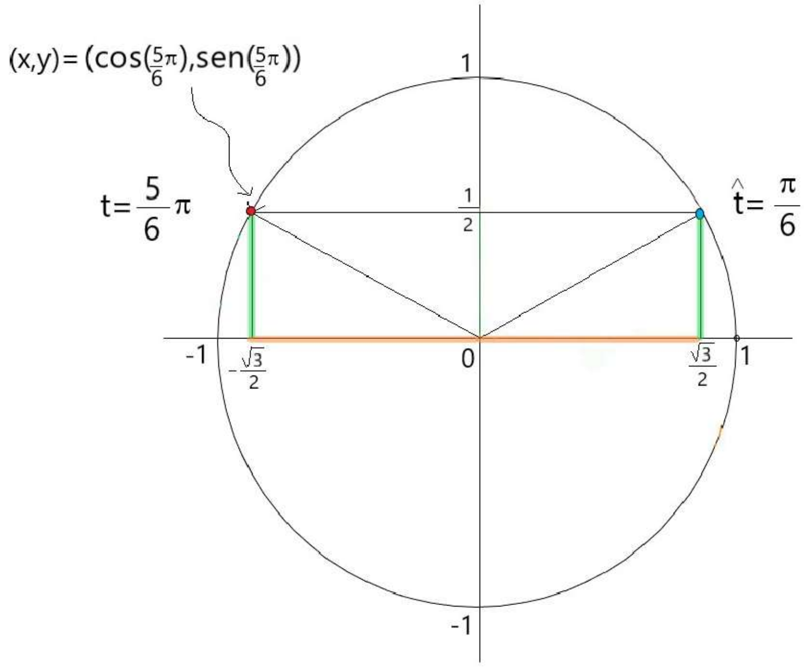
--

Un ejemplo de aplicación :

Calcular el sen $\left(\frac{5}{6}\pi\right)$ y cos $\left(\frac{5}{6}\pi\right)$

Siempre en cálculos de trigonometría tengan a mano la circunferencia de radio 1 para dibujar el arco

Como $\frac{5}{6}\pi$ pertenece al 2 do cuadrante $\left(\text{le falta } \frac{\pi}{6} \text{ para ser } \pi\right)$



si llamamos $\hat{t}$ al arco que genera un triángulo semejante en el 1er cuadrante

$$\hat{t} = \pi - t = \pi - \frac{5}{6}\pi = \frac{\pi}{6} \quad (30^0)$$

Vemos que :

$$\text{sen}\left(\tfrac{5}{6}\pi\right) = \text{sen}\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\tfrac{5}{6}\pi\right) = -\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

seno y coseno de $\frac{\pi}{6}$ se obtienen de la tabla

Para calcular el seno y coseno de un arco t cualquiera se busca el arco $\hat{t}$ que genera un triángulo semejante en el 1 er cuadrante cuyos seno y coseno de $\hat{t}$ figura en la tabla ($\hat{t}$ pertenece al 1 er cuadrante)

si t ∈ 1 er cuadrante ⟹ se usa la tabla

si t ∈ 2 do cuadrante $\Longrightarrow \hat{t} = \pi - t \Longrightarrow \begin{cases} \text{sen}(t) = \text{sen}(\hat{t}) \\ \cos(t) = -\cos(\hat{t}) \end{cases}$

si t ∈ 3 er cuadrante $\Longrightarrow \hat{t} = t - \pi \Longrightarrow \begin{cases} \text{sen}(t) = -\text{sen}(\hat{t}) \\ \cos(t) = -\cos(\hat{t}) \end{cases}$

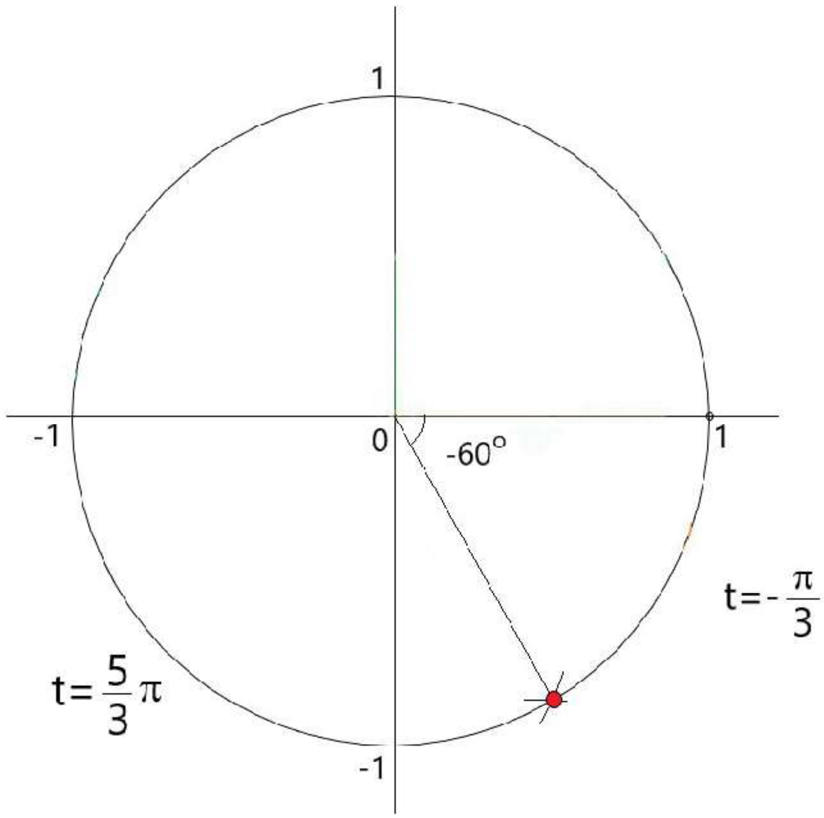
si t ∈ 4 to cuadrante $\Longrightarrow \hat{t} = 2\pi - t \Longrightarrow \begin{cases} \text{sen}(t) = -\text{sen}(\hat{t}) \\ \cos(t) = \cos(\hat{t}) \end{cases}$

Arcos positivos y negativos

Por convención los arcos positivos por ej. $t = \frac{5}{6}\pi$ representan arcos que se recorren en sentido antihorario desde el punto (1, 0)

Si la circunferencia de radio 1 se recorre desde el punto $(1, 0)$
en sentido horario se consideran arcos negativos

Por ejemplo el arco de $-\frac{\pi}{3}$ corresponde a un ángulo sexagesimal de $-60°$



si a $-\frac{\pi}{3}$ le sumamos 2π lo cual da $\frac{5}{3}\pi$
obtenemos el mismo (x,y) sobre la circunferencia de radio 1

Esto quiere decir que:

$$(x,y)=(\cos(-\tfrac{\pi}{3}),\text{sen}(-\tfrac{\pi}{3}))=(\cos(\tfrac{5}{3}\pi),\text{sen}(\tfrac{5}{3}\pi))$$

Y como $t = \frac{5}{3}\pi \in$ 4 to cuadrante, para obtener seno y coseno de $\frac{5}{3}\pi$

calculamos $\hat{t} = 2\pi - \frac{5}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$ y usamos el resultado

$$\begin{cases} \text{sen}(t) = -\text{sen}(\hat{t}) \\ \cos(t) = \cos(\hat{t}) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \text{sen}\left(\frac{5}{3}\pi\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Finalmente podemos concluir que :

$$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

----

valores aproximados de los arcos en radianes

30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
0.5236	0.7854	1.0472	1.5708	2.0944	2.3562	2.6179	3.14159
210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
3.6652	3.927	4.1888	4.7124	5.236	5.4978	5.7596	6.2832

Funciones trigonométricas del Seno y Coseno

Está claro que dado un arco de longitud $t < 2\pi$ recorrido desde el punto $P = (1, 0)$

sobre la circunferencia de radio 1, en sentido antihorario, y que termina

en el punto $(x, y) = (\cos(t), \text{sen}(t))$, si consideramos otro arco de longitud

$t + 2\pi$ terminará en el mismo punto (x, y) (dió una vuelta completa)

Como el (x, y) es el mismo, se desprende que :

$$\cos(t) = \cos(t + 2\pi) \quad \text{y} \quad \text{sen}(t) = \text{sen}(t + 2\pi) \qquad \text{(periodicidad)}$$

Lo mismo sucede si recorremos la circunferencia en sentido horario.

En este caso :

$$\cos(t) = \cos(t - 2\pi) \quad \text{y} \quad \text{sen}(t) = \text{sen}(t - 2\pi)$$

porque terminan en el mismo punto (x, y)

Esta propiedad se generaliza a cualquier cantidad de vueltas que se dé en un sentido o en el otro, escribiendo :

$$\cos(t) = \cos(t + k \cdot 2\pi) \text{ con } k \in \mathbb{Z} \text{ ,}$$

$\mathbb{Z}$ es el conjunto de números enteros $(\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots)$

De manera similar :

$$\text{sen}(t) = \text{sen}(t + k \cdot 2\pi) \text{ con } k \in \mathbb{Z} \text{ ,}$$

Si k es positivo se recorren las vueltas de 2 π en sentido antihorario

Si k es negativo se recorren las vueltas de 2 π en sentido horario

Esta propiedad de periodicidad de los valores que toman seno y coseno de arcos

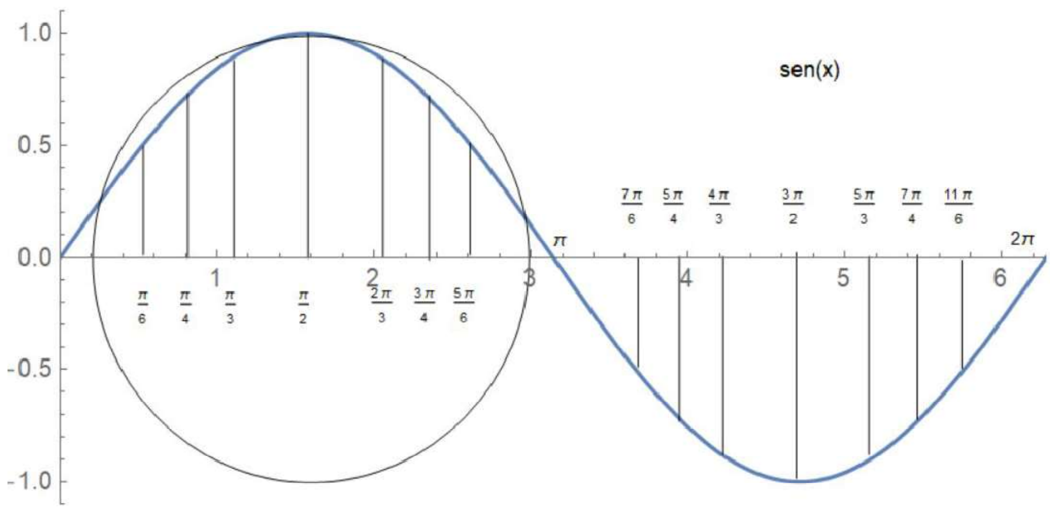
sobre la circunferencia de radio 1 nos permite definir una relación

que es una función y que a cada arco $x \in \mathbb{R}$ le asigne el sen (x)

$$f(x) = \text{sen}(x) \qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Si a medida x que vamos recorriendo la circunferencia de radio 1 anotamos los valores de sen (x) se obtiene un gráfico (entre [0, 2 π]) como el siguiente

```
Plot[Sin[x], {x, 0, 2 π}, PlotRange → {{0, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repr··· seno rango de representación cociente de aspecto



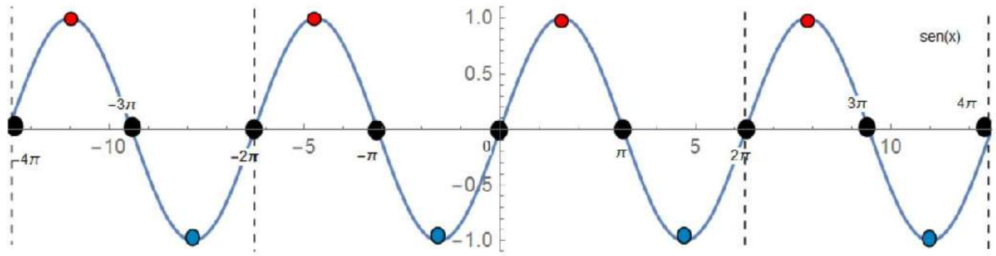
Si seguimos dando vueltas a la circunferencia de radio 1 con sentido antihorario es decir extendemos los x a $+\infty$ el gráfico se extiende periódicamente a $+\infty$

Si por otra parte damos vueltas a la circunferencia de radio 1 con sentido horario es decir extendemos los x a $-\infty$ el gráfico se extiende periódicamente a $-\infty$

Vemos que el período o sea el intervalo de x (arco) para el cual los valores de sen (x) se repiten es cada T = 2 π

Como los valores de "y" ordenadas del punto (x, y) = (cos (x), sen (x)) en la circunferencia de radio 1 alcanzan valores entre -1 y 1 se ve que el conjunto imagen del sen (x) es Imagen (f) = [-1, 1]

```
Plot[Sin[x], {x, -4 π, 4 π}, PlotRange → {{-4 π, 4 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.25]
```
repr··· seno rango de representación cociente de aspecto



C^0 Conjunto de ceros del sen (x)

Observando el gráfico del sen (x) observamos un conjunto infinito de ceros marcados con color negro que se repiten cada medio período (cada π) y éstos son :

$C^0 = \{ ..., -4\pi, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, ... \}$

El conjunto infinito de ceros se escriben utilizando los números enteros así :

$$x_0 = 0 + k\pi = k\pi\ ,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

$\left(\text{si } k = -3,\ x = -3\pi \ \text{ o } \ \text{si } k = 10\ ,\ x = 10\pi \text{ son ceros de sen } (x)\right)$

Máximos del sen (x)

Además, vemos que sen (x) alcanza el valor máximo de 1 en $x = \frac{\pi}{2}$, resultado que se repite cada un período de 2π y están marcados con color rojo

Este conjunto de máximos del sen (x) se escriben así :

$$x_M = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

$\left(\text{por ej. si } k = -1,\ x = \frac{\pi}{2} + (-1) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3}{2}\pi \text{ es un máximo de sen } (x)\right.$

$\left.\text{por ej. si } k = 3,\ x = \frac{\pi}{2} + 3 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} + 6\pi = \frac{13\pi}{2} \text{ es un máximo de sen } (x)\right)$

Mínimos del sen (x)

Además, vemos que sen (x) alcanza el valor mínimo de -1 en $x = -\frac{\pi}{2}$, resultado que se repite cada un período de 2π y están marcados con color azulino

Este conjunto de mínimos del sen (x) se escriben así :

$$x_m = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

$\left(\text{por ej. si } k = -2,\ x = -\frac{\pi}{2} + (-2) \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{5\pi}{2} \text{ es un mínimo de sen } (x)\right.$

$\left.\text{por ej. si } k = 1,\ x = -\frac{\pi}{2} + 1 \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2} \text{ es un mínimo de sen } (x)\right)$

C^+ Conjunto de Positividad del sen (x)

Asimismo, el gráfico del sen (x) nos permite escribir el conjunto de positividad como unión infinita de intervalos

$C^+ = .\ldots \cup (-4\pi, -3\pi) \cup (-2\pi, -\pi) \cup (0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup (4\pi, 5\pi) \cup \ldots.$

los extremos izquierdos de los intervalos se repiten cada 2π
Idem los extremos derechos

extremos izquierdos de los intervalos $\to k \cdot 2\pi = 2k\pi$

extremos derechos de los intervalos $\to k \cdot 2\pi + \pi = (2k+1)\pi$

$$C^+ = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$$

(por ej. si $k = -2$, el intervalo $(2\cdot(-2)\pi, (2(-2)+1)\pi) = (-4\pi, -3\pi)$

pertenece al C^+ del sen (x))

C^- Conjunto de Negatividad del sen (x)

De manera similar, el gráfico del sen (x) nos permite escribir el conjunto de negatividad como unión infinita de intervalos

$C^- = .\ldots \cup (-3\pi, -2\pi) \cup (-\pi, 0) \cup (\pi, 2\pi) \cup (3\pi, 4\pi) \cup (5\pi, 6\pi) \cup \ldots.$

los extremos izquierdos de los intervalos se repiten cada 2π
Idem los extremos derechos

extremos izquierdos de los intervalos $\to \pi + k \cdot 2\pi = (2k+1)\pi$

extremos derechos de los intervalos $\to 2\pi + k \cdot 2\pi = (2k+2)\pi$

$$C^- = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$$

(por ej. si $k = -1$, el intervalo $(2\cdot(-1)+1)\pi, (2(-1)+2)\pi) = (-\pi, 0\pi)$

y si $k = 2$, el intervalo $(2\cdot 2+1)\pi, (2\cdot 2+2)\pi) = (5\pi, 6\pi)$

pertenecen al C^- del sen (x)

$f(x) = \text{sen}(x)$, $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es continua en todo $\mathbb{R}$

++

De la misma forma que se construye el sen (x) se define la función cos (x) recorriendo la circunferencia de radio 1 en sentido antihorario (arcos x positivos) y en sentido horario (arcos x negativos) anotando para cada x el valor que va tomando el cos (x)

$$f(x) = \cos(x) \quad f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

Usaremos una propiedad que dice que :

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen}(a)\cdot\cos(b) + \text{sen}(b)\cdot\cos(a)$$

que si a = x y b = $\frac{\pi}{2}$

$$\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\,(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\,(x)$$

y como $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ **y** $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ **(ver tabla de valores de seno y coseno)**

se obtiene :

$$\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\,(x)\cdot 0 + 1\cdot\cos\,(x) = 0 + \cos\,(x)\quad,\quad \text{entonces :}$$

$$\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\,(x)$$

Por lo tanto, el gráfico de cos (x) será el que se obtenga de trasladar rígidamente $\frac{\pi}{2}$, hacia la izquierda según las x, el gráfico de sen (x)

Nota : ver Composición de funciones - Cambio de escala archivoPDF en donde se explicaron los efectos de composiciones a derecha e izquierda

Efectivamente, si componemos a derecha g (x) = sen (x) con h (x) = x + $\frac{\pi}{2}$

$$g\circ h\,(x) = g\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

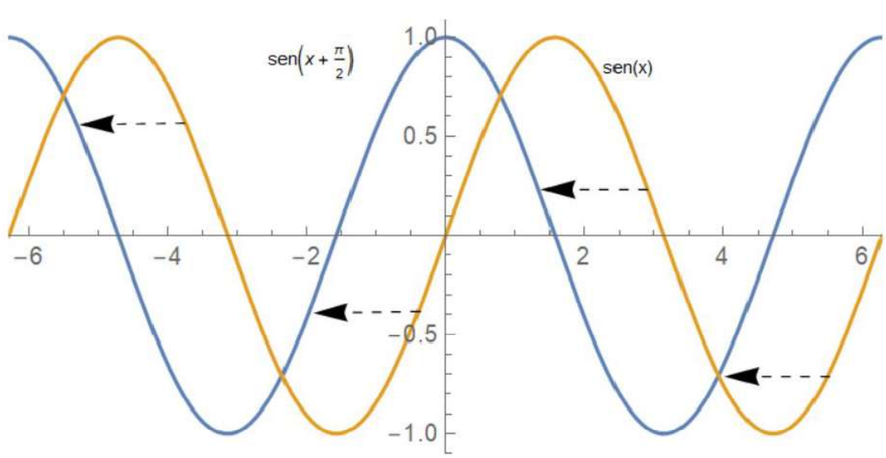
Esta composición a derecha produce una traslación según las x y hacia la izquierda en $\frac{\pi}{2}$

En el siguiente gráfico se grafican sen (x) y sen $\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ **en donde se observa el desplazamiento referido**

Por lo tanto, el gráfico del cos (x) es igual al gráfico de sen $\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

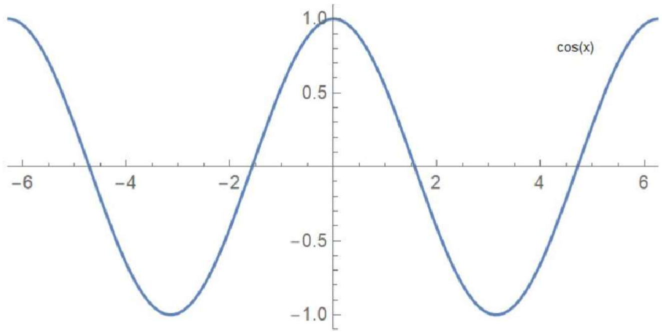
```
Plot[{Sin[x + π/2], Sin[x]}, {x, -2 π, 2 π},
 PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

repre··· seno seno rango de representación cociente de aspecto




```
Plot[Cos[x], {x, -2 π, 2 π}, PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

repr··· coseno rango de representación cociente de aspecto



Nota : para practicar rotaciones y traslaciones con composición de funciones :

Usando la relación de complementariedad entre coseno y seno que dice que :

$$\cos(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

("coseno de un ángulo es igual al seno del ángulo complementario y viceversa: seno de un ángulo es igual al coseno del ángulo complementario - ángulos complementarios suman 90°")

hubiéramos arribado también al gráfico de cos (x)

el gráfico del coseno será semejante al del seno x con alguna traslación y rotación

si escribimos el argumento del sen $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ **como sen** $\left(-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$

el gráfico de cos (x) se obtendrá a partir del gráfico del sen (x)

si primero rotamos rígidamente el gráfico del sen (x) alrededor del eje x y luego a este último lo trasladamos $\frac{\pi}{2}$ **a la derecha**

Nota : ver Composición de funciones - Cambio de escala archivoPDF en donde se explicaron los efectos de composiciones a derecha e izquierda)

Efectivamente, si componemos a derecha $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ **con** $h(x) = -x$

$$g_\circ h(x) = g(-x) = \operatorname{sen}(-x)$$

le produce al sen (x) una rotación rígida respecto al eje x

Si a $g_\circ h(x)$ **la llamamos** $S(x) = \operatorname{sen}(-x)$ **y si componemos a derecha con**

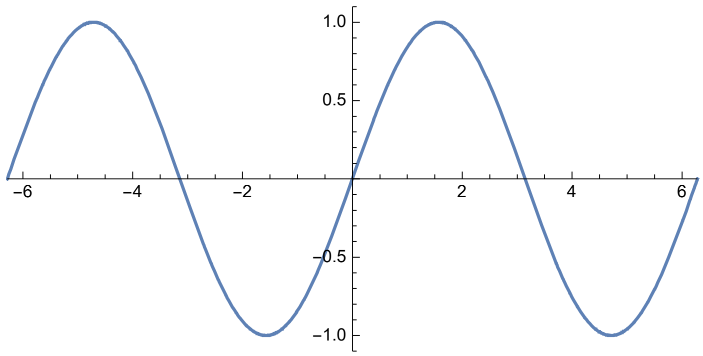
$R(x) = x - \frac{\pi}{2}$ **tendremos :**

$$S_\circ R(x) = S\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Esta última composición a derecha $S_\circ R(x)$ **le produce a** $S(x) = \operatorname{sen}(-x)$ **una traslación rígida hacia la derecha en** $\frac{\pi}{2}$ **sobre las x**

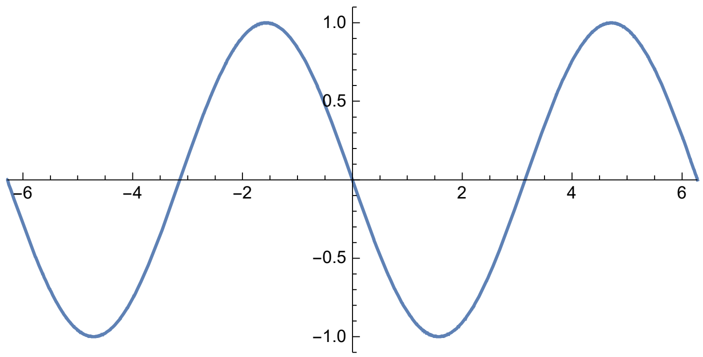
```
Plot[Sin[x], {x, -2 π, 2 π}, PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

re⋯ seno rango de representación cociente de aspecto



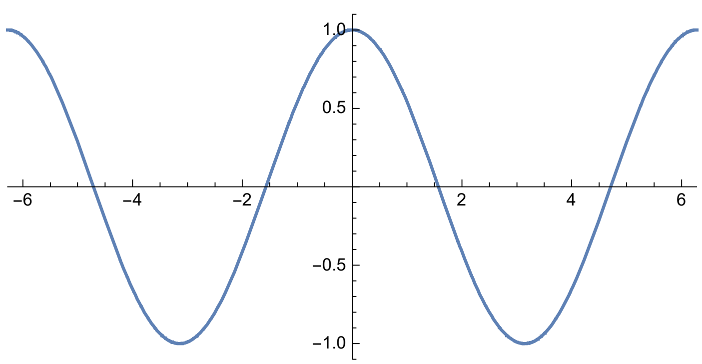

```
Plot[Sin[-x], {x, -2 π, 2 π}, PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

re⋯ seno rango de representación cociente de aspecto



Plot$\left[\text{Sin}\left[-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right], \{x, -2\pi, 2\pi\}, \text{PlotRange} \to \{\{-2\pi, 2\pi\}, \{-1.1, 1.1\}\}, \text{AspectRatio} \to 0.5\right]$

re⋯ seno rango de representación cociente de aspecto



Este último es el gráfico del cos (x) = sen $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$

Proseguimos con el análisis de la función cos (x) :

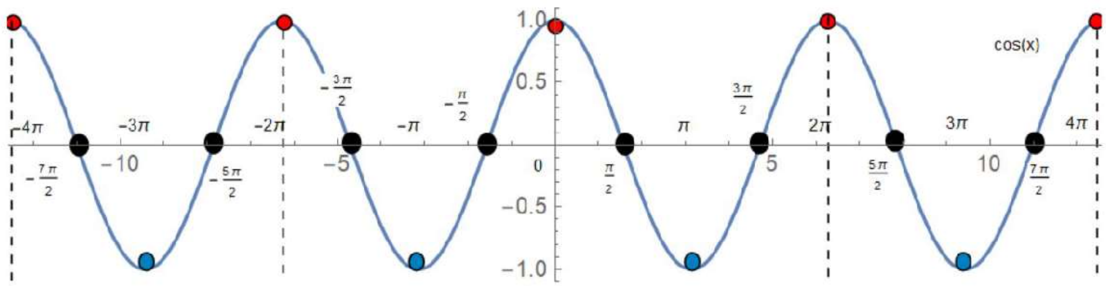
Hemos obtenido el gráfico de cos (x) a partir del gráfico del sen (x) usando la propiedad cos (x) = sen $\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

De manera similar se define

$$f(x) = \cos(x) \qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Veamos el gráfico de cos (x) para x entre $[-4\pi, 4\pi]$

```
Plot[Cos[x], {x, -4 π, 4 π}, PlotRange → {{-4 π, 4 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.25]
```
repr··· coseno rango de representación cociente de aspecto



Vemos que el período o sea el intervalo de x (arco) para el cual los valores de cos (x) se repiten es cada T = 2 π

Como los valores de x,
abscisas de los puntos (x, y) = (cos (t), sen (t)) de la circunferencia de radio 1
alcanzan valores entre - 1 y 1
se ve que el conjunto imagen del cos (x) es : Imagen (f) = [-1, 1]

C^0 Conjunto de ceros del cos (x)

Observando el gráfico del cos (x) se aprecia un conjunto infinito de ceros marcados con color negro que se repiten cada medio período (cada π) y éstos son :

$$C^0 = \left\{ \ldots, -\frac{7}{2}\pi, -\frac{5}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \ldots \right\}$$

El conjunto infinito de ceros se escribe utilizando los números enteros así :

$$x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi = k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\left(\text{si } k = -3,\ x = \frac{\pi}{2} - 3\pi = -\frac{5}{2}\pi \ \text{ o } \ \text{si } k = 3,\ x = \frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7}{2}\pi \ \text{son ceros de cos (x)}\right)$$

Máximos del cos (x)

Además, vemos que cos (x) alcanza el valor máximo de 1 en x = 0, resultado que se repite cada un período de 2 π y están marcados con color rojo

Este conjunto de máximos del cos (x) se escriben así :

$$x_M = 0 + k \cdot 2\pi = k \cdot 2\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}$$

(por ej. si k = -1, x = (-1) · 2 π = -2 π es un máximo de cos (x)

por ej. si k = 2, x = 2 · 2 π = 4 π es un máximo de cos (x))

Mínimos del cos (x)

Además, vemos que cos (x) alcanza el valor mínimo de -1 en $x = \pi$, resultado que se repite cada un período de 2π y están marcados con color azulino

Este conjunto de mínimos del cos (x) se escriben así :

$$x_m = \pi + k \cdot 2\pi = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(por ej. si $k = -2$, $x = (2 \cdot (-2) + 1)\pi = -3\pi$ es un mínimo de cos (x)

por ej. si $k = 1$, $x = (2 \cdot 1 + 1)\pi = 3\pi$ es un mínimo de cos (x))

C^+ Conjunto de Positividad del cos (x)

Asimismo, el gráfico del cos (x) nos permite escribir el conjunto de positividad como unión infinita de intervalos

$$C^+ = \ldots \cup \left(-\frac{9}{2}\pi, -\frac{7}{2}\pi\right) \cup \left(-\frac{5}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi\right) \cup \ldots$$

los extremos izquierdos de los intervalos se repiten cada 2π
Idem los extremos derechos

extremos izquierdos de los intervalos $\rightarrow -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi = \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi$

extremos derechos de los intervalos $\rightarrow \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi$

$$C^+ = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi, \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$$

(por ej. si $k = -2$, el intervalo $\left(\left(2(-2) - \frac{1}{2}\right)\pi, \left(2(-2) + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = \left(-\frac{9}{2}\pi, -\frac{7}{2}\pi\right)$

pertenece al C^+ del cos (x))

C^- Conjunto de Negatividad del cos (x)

De manera similar, el gráfico del cos (x) nos permite escribir el conjunto de negatividad como unión infinita de intervalos

$$C^- = \ldots \cup \left(-\frac{7}{2}\pi, -\frac{5}{2}\pi\right) \cup \left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{9}{2}\pi, \frac{11}{2}\pi\right) \cup \ldots$$

los extremos izquierdos de los intervalos se repiten cada 2π
Idem los extremos derechos

extremos izquierdos de los intervalos $\rightarrow \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi$

extremos derechos de los intervalos $\rightarrow \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi = \left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi$

$$C^{-} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi,\ \left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi\right)$$

(**por ej. si** $k = -1$, **el intervalo** $\left(\left(2(-1) + \frac{1}{2}\right)\pi,\ \left(2(-1) + \frac{3}{2}\right)\pi\right) = \left(-\frac{7}{2}\pi, -\frac{5}{2}\pi\right)$

y si $k = 2$, **el intervalo** $\left(\left(2 \cdot 2 + \frac{1}{2}\right)\pi,\ \left(2 \cdot 2 + \frac{3}{2}\right)\pi\right) = \left(\frac{9}{2}\pi, \frac{11}{2}\pi\right)$

pertenecen al C^{-} **del** $\cos(x)$

$f(x) = \cos(x)$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **es continua en todo** $\mathbb{R}$

++

Pasemos a resolver lo primeros ejercicios de la Práctica 4 de funciones trigonométricas

----

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ejercicio 12.- Completar la tabla.

a.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\text{sen}(x)$		$1/2$			
$\cos(x)$			$\sqrt{2}/2$	$1/2$	

Ej 12 a) de acuerdo a lo que estuvimos desarrollando en este documento :

$\text{sen}(0) = 0$ $\quad$ $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos(0) = 1$ $\quad$ $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Estos resultados pueden organizarse en la siguiente tabla :

	0°	30°	45°	60°	90°
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen(t)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos(t)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Ej 12 b) completar la tabla

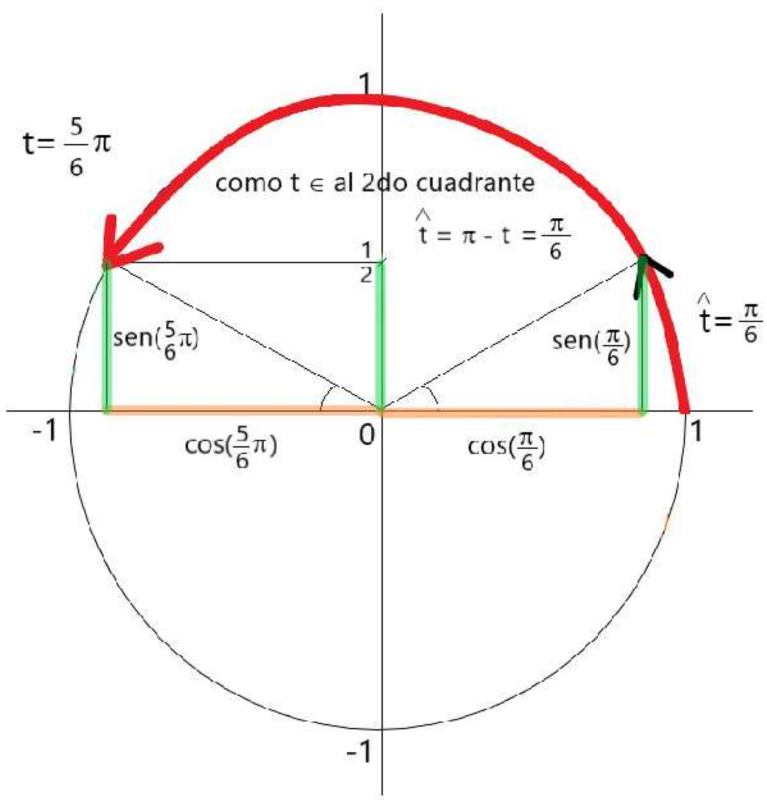
b.

x	$\frac{5}{6}\pi$	$-\pi/3$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{7}{3}\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$\pi/3$	$\frac{7}{6}\pi$	$-\pi/4$
sen(x)								
cos(x)								

----

si $t = \frac{5}{6}\pi$ (corresponde a un ángulo sexagesimal de 150°)

pertenece al 2 do cuadrante :



Del gráfico se ve que los valores de seno y coseno de $\frac{5}{6}\pi$
del

coinciden, en valor absoluto, con los valores del seno y coseno del arco reducido al 1 er cuadrante $\hat{t} = \pi - t$

es decir $\hat{t} = \pi - \frac{5}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi \quad \Longrightarrow \quad \hat{t} = \frac{\pi}{6}$

Además observando el diagrama de la circunferencia se ve que

$$\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Mirando la tabla de valores de seno y coseno para arcos en el 1 er cuadrante $\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \text{ y } \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Por lo tanto,

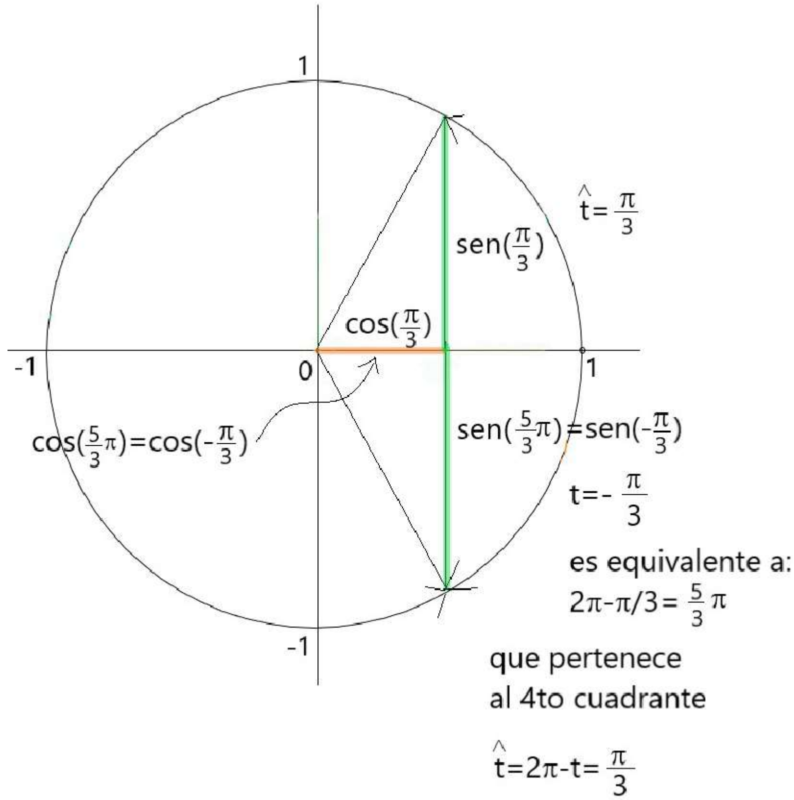
$$\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{y}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Ahora $t = -\frac{\pi}{3}$ **(corresponde a un ángulo sexagesimal de** $-60°$**)**

Hagamos el gráfico de la circunferencia de radio 1 y marquemos

$t = -\frac{\pi}{3}$ **(al ser negativo se recorre en sentido horario)**



Entonces

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{y} \quad \text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

mirando en tabla de valores de seno y coseno para arcos del 1 er cuadrante y como :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \qquad\qquad \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ahora $t = \frac{5}{4}\pi$ **(corresponde a un ángulo sexagesimal de 225°)**

Como t pertenece al 3 er cuadrante :

$$\hat{t} = t - \pi \implies \hat{t} = \frac{5}{4}\pi - \pi = \frac{1}{4}\pi = \frac{\pi}{4}$$

Si hacen el diagrama de la circunferencia de radio y marcan

$$t = \frac{5}{4}\pi \quad \text{y} \quad \hat{t} = \frac{\pi}{4}$$

podrán ver que :

$$\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ahora $t = \frac{7}{3}\pi$ (corresponde a un ángulo sexagesimal de 420°)

como $\frac{6}{3}\pi = 2\pi$ este arco $t = \frac{7}{3}\pi$ se pasó $\frac{\pi}{3}$ de 1 vuelta y termina

en el mismo (x, y) sobre la circunferencia de radio 1 que para $\frac{\pi}{3}$

Analíticamente decimos que a $t = \frac{7}{3}\pi$ le restamos 1 vuelta de 2π

para obtener $\hat{t} = \frac{7}{3}\pi - 2\pi = \frac{\pi}{3}$

Entonces

$t = \frac{7}{3}\pi$ y $\hat{t} = \frac{\pi}{3}$

Por lo tanto

$$\cos\left(\frac{7}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen}\left(\frac{7}{3}\pi\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ahora $t = -\frac{3}{4}\pi$ (corresponde a un ángulo sexagesimal de −135°)

Si hacen el gráfico de la circunferencia de radio 1 y marcan

$t = -\frac{3}{4}\pi$ (al ser negativo se recorre en sentido horario)

va a "caer" en el 3 er cuadrante

El análogo positivo de $-\frac{3}{4}\pi$ se obtiene sumando 2π

Entonces $t = -\frac{3}{4}\pi + 2\pi = \frac{5}{4}\pi$ (225°)

El correspondiente arco del 1 er cuadrante que tiene valores de

seno y coseno iguales en valor absoluto a $t = \frac{5}{4}\pi$ es $\hat{t}$

$\hat{t} = t - \pi = \frac{5}{4}\pi - \pi = \frac{1}{4}\pi = \frac{\pi}{4} \implies \hat{t} = \frac{\pi}{4}$

Si miran el diagrama que hicieron de la circunferencia de radio 1

con los arcos $t = \frac{5}{4}\pi$ y $\hat{t} = \frac{\pi}{4}$

verán que :

$\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

De la tabla obtenemos los valores de

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Por lo tanto

$$\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right) == -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ahora $t = \frac{\pi}{3}$ (corresponde a un ángulo sexagesimal de 60°)

los valores de seno y coseno ya están tabulados por ser
del 1 er cuadrante

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ahora $t = \frac{7}{6}\pi$ (corresponde a un ángulo sexagesimal de 210°)

t pertenece al 3 er cuadrante

Por lo tanto

el arco del 1 er cuadrante que genera valores de seno y coseno iguales
en valor absoluto es $\hat{t} = t - \pi$:

$$\hat{t} = \frac{7}{6}\pi - \pi = \frac{\pi}{6}$$

Si miran el diagrama que hicieron de la circunferencia de radio 1
con los arcos $t = \frac{7}{6}\pi$ y $\hat{t} = \frac{\pi}{6}$

se ve que

$\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Como por tabla $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Finalmente tenemos :

$$\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{y}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

Ahora $t = -\frac{\pi}{4}$ (corresponde a un ángulo sexagesimal de $-45°$)

Si hacen el gráfico de la circunferencia de radio 1 y marcan

$t = -\frac{\pi}{4}$ (al ser negativo se recorre en sentido horario)

va a "caer" en el 4 to cuadrante

El análogo positivo de $t = -\frac{\pi}{4}$ es , sumando 2π, y lo llamamos $\tilde{t}$

$$\tilde{t} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7}{4}\pi$$

Por lo tanto

el arco del 1 er cuadrante que genera valores de seno y coseno iguales
en valor absoluto es $\hat{t} = 2\pi - \tilde{t}$:

$$\hat{t} = 2\pi - \frac{7}{4}\pi = \frac{\pi}{4}$$

Si miran el diagrama que hicieron de la circunferencia de radio 1
con los arcos $t = -\frac{\pi}{4}$, $\tilde{t} = \frac{7}{4}\pi$ y $\hat{t} = \frac{\pi}{4}$

se ve que :

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{y}$$

$$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\left(\frac{7}{4}\pi\right) = -\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Como por tabla $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Finalmente tenemos :

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y}$$

$$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\left(\frac{7}{4}\pi\right) = -\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Resumiendo lo calculado :

$\text{sen}\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$ y $\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$\text{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{sen}\left(\frac{7}{3}\pi\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{7}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen}\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \text{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right) == -\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen}\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\left(\frac{7}{4}\pi\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Con todos estos cálculos, completemos la tabla de Ej 12 b)

b.

x	$\frac{5}{6}\pi$	$-\pi/3$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{7}{3}\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$\pi/3$	$\frac{7}{6}\pi$	$-\pi/4$
sen(x)								
cos(x)								

	150º	-60º	225º	420º	−135º	60º	210º	−45º
t	$\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{7}{3}\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{\pi}{4}$
sen(t)	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
cos(t)	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

++

Ejercicio 13.- Encontrar todos los $x \in [-\pi;\pi]$ tales que

a. $\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2}$

b. $\operatorname{sen}(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c. $\operatorname{sen}(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d. $\operatorname{sen}(x) = -1$

e. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

f. $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

g. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

h. $\cos(x) = 1$

Ej 13 a)

Para la resolución de ecuaciones con funciones trigonométricas tenemos que acudir a :

.- diagrama de la circunferencia de radio 1

.- tabla de valores de seno y coseno en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

.- gráfico de la función seno o coseno

Resolver la ecuación trigonométrica

sen (x) = $\frac{1}{2}$ **no es otra cosa que encontrar los puntos de intersección**

de la función sen (x) con una función lineal constante g (x) = $\frac{1}{2}$

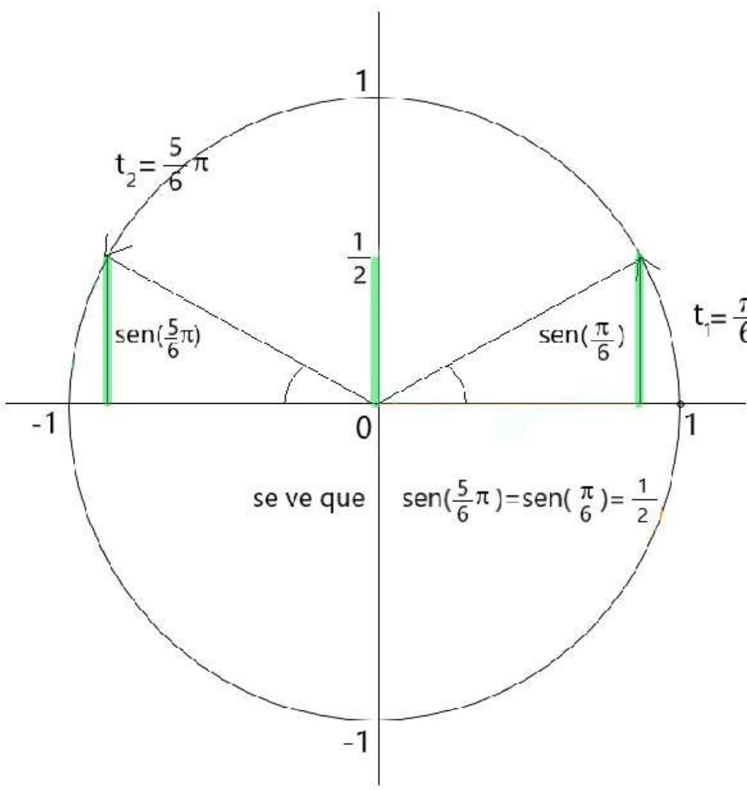
Si miramos la tabla de valores de seno y coseno para arcos entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

	0°	30°	45°	60°	90°
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen(t)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos(t)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

vemos que sen (t) = $\frac{1}{2}$ para t = $\frac{\pi}{6}$ (30° grados sexagesimales)

Pero no es la única solución

Hagamos el diagrama de la circunferencia de radio 1 para marcar los arcos cuyo seno es $\frac{1}{2}$

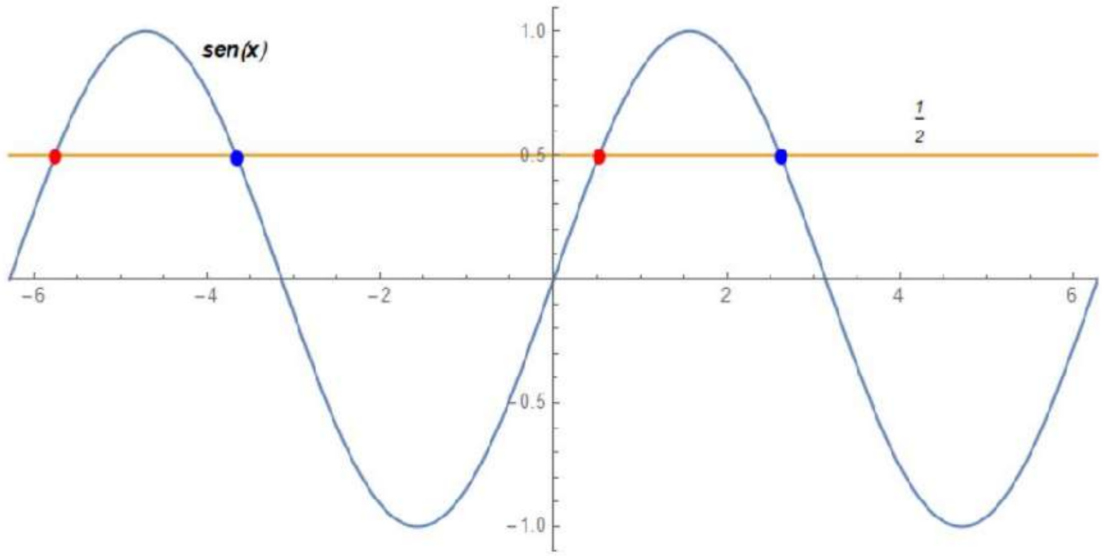


Del diagrama vemos que no solamente t = $\frac{\pi}{6}$ es solución de sen (t) = $\frac{1}{2}$
del

sino que también t = $\frac{5}{6}\pi$ verifica la ecuación

Veamos un gráfico conjunto de sen (x) y la recta horizontal $y = \frac{1}{2}$:

```
Plot[{Sin[x], 1/2}, {x, -2 π, 2 π}, PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre… seno rango de representación cociente de aspecto



En el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, el punto de color rojo es la solución $x = \frac{\pi}{6}$

y el de color azul corresponde a $x = \frac{5}{6}\pi$

Pero como el gráfico de sen (x) se extiende a + y - ∞

habrá dos conjuntos infinitos de soluciones de la ecuación sen (x) $= \frac{1}{2}$

el conjunto de los puntos rojos y el conjunto de los puntos azules

Es la característica de periodicidad y simetría de la función sen (x) la que hace que existan estos dos conjuntos infinitos de soluciones

Obsérvese que tanto los puntos rojos como los azules se repiten cada vuelta de 2 π recorridas tanto en sentido antihorario como en sentido horario

El primer conjunto, generado por la solución de color rojo, se escribe así :

$S_1 : \qquad x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z}$

El segundo conjunto, generado por la solución de color azul, se escribe así :

$S_2 : \qquad x_2 = \frac{5}{6}\pi + z \cdot 2\pi \ , \quad z \in \mathbb{Z}$

Entonces el conjunto S solución de la ecuación sen (x) $= \frac{1}{2}$ para $x \in \mathbb{R}$ es :

$$S = S_1 \bigcup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5}{6}\pi + z \cdot 2\pi \ , \quad z \in \mathbb{Z}\right\}$$

Sin embargo, como en el ejercicio 13 a) nos piden encontrar sólo las soluciones de
seno

sen (x) $= \frac{1}{2}$ **para** $x \in [-\pi, \pi]$ **, veamos cuáles soluciones están en** $[-\pi, \pi]$

Primero veamos cuáles de las soluciones "rojas" pertenecen a $[-\pi, \pi]$

tomamos valores enteros de k y vamos reemplazando en $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

si $k = 0 \implies x = \frac{\pi}{6} + 0 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}$ **es una de ellas pues** $\frac{\pi}{6} \in [-\pi, \pi]$

si $k = -1 \implies x = \frac{\pi}{6} + (-1) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11}{6}\pi$ **NO es una de ellas pues** $-\frac{11}{6}\pi < -\pi$

si $k = 1 \implies x = \frac{\pi}{6} + 1 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13}{6}\pi$ **NO es una de ellas pues** $\frac{13}{6}\pi > \pi$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{\pi}{6}$ **sólo** $\frac{\pi}{6} \in [-\pi, \pi]$

$S_1 = \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$

Veamos ahora cuáles de las soluciones "azules" pertenecen a $[-\pi, \pi]$

tomamos valores enteros de z y vamos reemplazando en $x = \frac{5}{6}\pi + z \cdot 2\pi$

si $z = 0 \implies x = \frac{5}{6}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi$ **es una de ellas pues** $\frac{5}{6}\pi \in [-\pi, \pi]$

si $z = 1 \implies x = \frac{5}{6}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi + 2\pi = \frac{17}{6}\pi$ **NO es una de ellas pues** $\frac{17}{6}\pi > \pi$

si $z = -1 \implies x = \frac{5}{6}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi - 2\pi = -\frac{7}{6}\pi$ **NO es una de ellas pues** $-\frac{7}{6}\pi < -\pi$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{5}{6}\pi$ **sólo** $\frac{5}{6}\pi \in [-\pi, \pi]$

$S_2 = \left\{\frac{5}{6}\pi\right\}$

Finalmente las soluciones de sen (x) $= \frac{1}{2}$ **para** $x \in [-\pi, \pi]$ **son**

$S = S_1 \bigcup S_2 = S_1 = \left\{\frac{\pi}{6}\right\} \bigcup \left\{\frac{5}{6}\pi\right\} \implies$

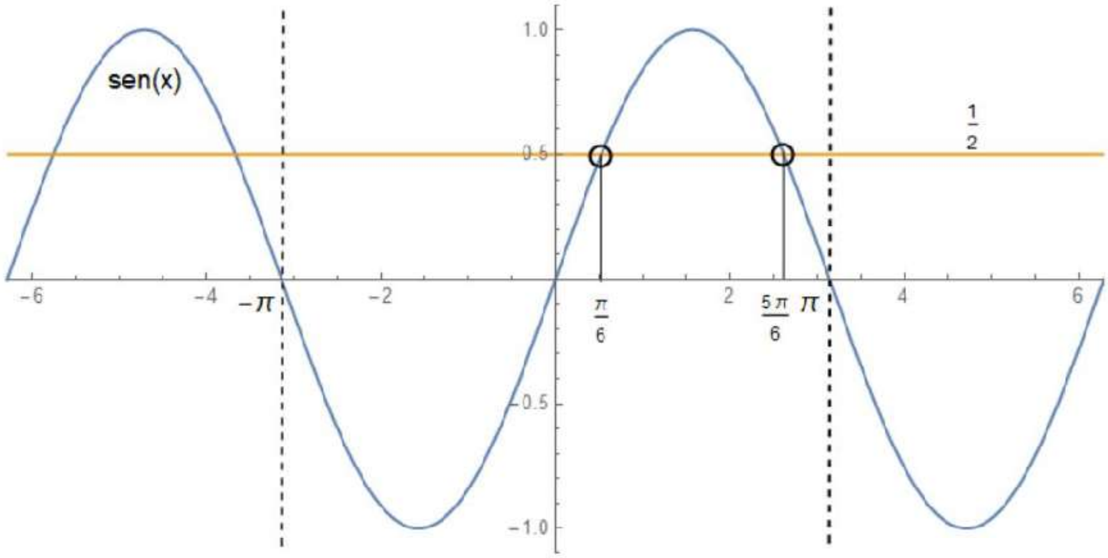
$$S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right\}$$

Si graficamos sen (x) y la recta horizontal $y = \frac{1}{2}$

se verifican estas soluciones en $[-\pi, \pi]$

```
Plot[{Sin[x], 1/2}, {x, -2 π, 2 π}, PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

repre··· seno rango de representación cociente de aspecto



Ej 13 b) encontrar las soluciones de sen (x) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ para x ∈ [$-\pi$, π]

Si miramos la tabla de valores de seno y coseno para arcos entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

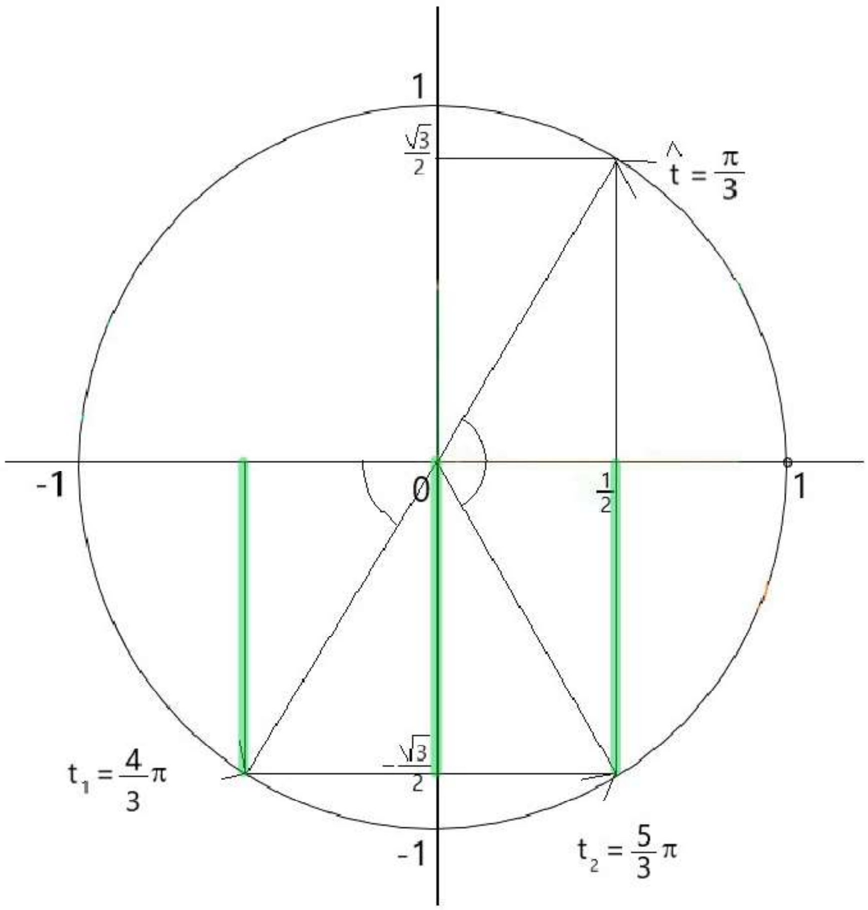
	0º	30º	45º	60º	90º
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen(t)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos(t)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

vemos que el arco t = $\frac{\pi}{3}$ tiene un valor de sen (t) similar a $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

salvo el signo

Justamente, el signo negativo nos está indicando que los x que buscamos

cuyo seno es negativo, pertenecen al 3 er y 4 to cuadrante



De manera similar al Ej 13 a) para $x \in \mathbb{R}$ tendremos dos conjuntos infinitos de soluciones de la ecuación sen (x) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

uno generado por $x = \frac{4}{3}\pi$ y otro generado por $x = \frac{5}{3}\pi$

Estos son :

El primer conjunto se escribe así :

S_1 : $x_1 = \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi \; , \; k \in \mathbb{Z}$

El segundo conjunto se escribe así :

S_2 : $x_2 = \frac{5}{3}\pi + z \cdot 2\pi \; , \; z \in \mathbb{Z}$

Entonces el conjunto S solución de la ecuación sen (x) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ para $x \in \mathbb{R}$ es :

$$S = S_1 \bigcup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi \; , \; k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5}{3}\pi + z \cdot 2\pi \; , \; z \in \mathbb{Z}\right\}$$

Sin embargo, como en el ejercio nos piden encontrar sólo las soluciones de

seno

sen (x) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ para x ∈ [$-\pi$, π] , veamos cuáles soluciones están en [$-\pi$, π]

Primero tomamos valores enteros de k y vamos reemplazando en x = $\frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

si k = 0 ⟹ x = $\frac{4}{3}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi$ NO es una de ellas pues $\frac{4}{3}\pi > \pi$ y no pertenece a [$-\pi$, π]

(Nota : si con k = 0 ya no dió en el intervalo [$-\pi$, π] tendré que tomar valores de k menores que 0)

si k = -1 ⟹ x = $\frac{4}{3}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi - 2\pi = -\frac{2}{3}\pi$ es una de ellas pues ∈ [$-\pi$, π]

si k = -2 ⟹ x = $\frac{4}{3}\pi + (-2) \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi - 4\pi = -\frac{8}{3}\pi$ NO es una de ellas pues $-\frac{8}{3}\pi < -\pi$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{4}{3}\pi$ sólo $-\frac{2}{3}\pi$ ∈ [$-\pi$, π]

$S_1 = \left\{-\frac{2}{3}\pi\right\}$

Veamos ahora cuáles de las soluciones generadas por $\frac{5}{3}\pi$ pertenecen a [$-\pi$, π]

tomamos valores enteros de z y vamos reemplazando en x = $\frac{5}{3}\pi + z \cdot 2\pi$

si z = 0 ⟹ x = $\frac{5}{3}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{5}{3}\pi$ que NO es una de ellas pues $\frac{5}{3}\pi > \pi$ y no pertenece a [$-\pi$, π]

(Nota : si con z = 0 ya no dió en el intervalo [$-\pi$, π] tendré que tomar valores de z menores que 0)

si z = -1 ⟹ x = $\frac{5}{3}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{5}{3}\pi - 2\pi = -\frac{\pi}{3}$ es una de ellas pues ∈ [$-\pi$, π]

si z = -2 ⟹ x = $\frac{5}{3}\pi + (-2) \cdot 2\pi = \frac{5}{3}\pi - 4\pi = -\frac{7}{3}\pi$ NO es una de ellas pues $-\frac{7}{3}\pi < -\pi$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{5}{3}\pi$ sólo $-\frac{\pi}{3}$ ∈ [$-\pi$, π]

$S_2 = \left\{-\frac{\pi}{3}\right\}$

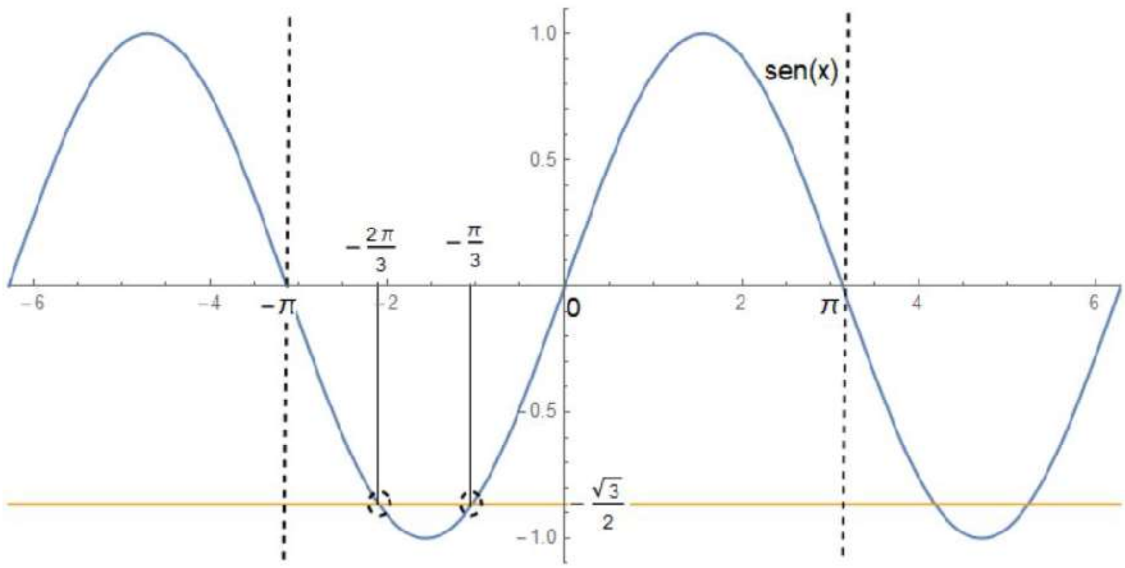
Finalmente las soluciones de sen (x) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ para x ∈ [$-\pi$, π] son

$S = S_1 \bigcup S_2 = S_1 = \left\{-\frac{2}{3}\pi\right\} \bigcup \left\{-\frac{\pi}{3}\right\}$ ⟹

$$S = \left\{-\frac{2}{3}\pi, -\frac{\pi}{3}\right\}$$

Si graficamos sen (x) y la recta horizontal y = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ se verifican estas soluciones

```
Plot[{Sin[x], -√3/2}, {x, -2 π, 2 π}, PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
repre⋯ seno                    rango de representación                cociente de aspecto
```



Ej 13 c) encontrar las soluciones de $\text{sen}(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **para** $x \in [-\pi, \pi]$

Este ejercicio es similar al anterior Ej 12 b)

Como el seno es negativo los arcos solución pertenecen al 3 er y 4 to cuadrante

Si miramos la tabla de valores de seno y coseno para arcos entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

el arco cuyo valor de seno de x en el 1 er cuadrante coincide en valor absoluto es $\frac{\pi}{4}$

Entonces los conjuntos soluciones serán :

uno generado por $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$ **y otro generado por** $x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$

Estos son :

El primer conjunto se escribe así :

S_1 : $\quad x_1 = \frac{5}{4}\pi + k \cdot 2\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z}$

El segundo conjunto se escribe así :

S_2 : $\quad x_2 = \frac{7}{4}\pi + z \cdot 2\pi \ , \quad z \in \mathbb{Z}$

Entonces el conjunto S solución de la ecuación $\text{sen}(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **para** $x \in \mathbb{R}$ **es :**

$$S = S_1 \bigcup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5}{4}\pi + k \cdot 2\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{7}{4}\pi + z \cdot 2\pi \ , \quad z \in \mathbb{Z}\right\}$$

Sin embargo, como en el ejercio nos piden encontrar sólo las soluciones de
seno

sen $(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ para $x \in [-\pi, \pi]$, veamos cuáles soluciones están en $[-\pi, \pi]$

Primero tomamos valores enteros de k y vamos reemplazando en $x = \frac{5}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

si $k = 0 \Longrightarrow x = \frac{5}{4}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{5}{4}\pi$ NO es una de ellas pues $\frac{5}{4}\pi > \pi$ y no pertenece a $[-\pi, \pi]$

(Nota : si con k = 0 ya no dió en el intervalo $[-\pi, \pi]$ tendré que tomar valores de k menores que 0)

si $k = -1 \Longrightarrow x = \frac{5}{4}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{5}{4}\pi - 2\pi = -\frac{3}{4}\pi$ es una de ellas pues $\in [-\pi, \pi]$

si $k = -2 \Longrightarrow x = \frac{5}{4}\pi + (-2) \cdot 2\pi = \frac{5}{4}\pi - 4\pi = -\frac{11}{4}\pi$ NO es una de ellas pues $-\frac{11}{4}\pi < -\pi$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{5}{4}\pi$ sólo $-\frac{3}{4}\pi \in [-\pi, \pi]$

$S_1 = \left\{-\frac{3}{4}\pi\right\}$

Veamos ahora cuáles de las soluciones generadas por $\frac{7}{4}\pi$ pertenecen a $[-\pi, \pi]$

tomamos valores enteros de z y vamos reemplazando en $x = \frac{7}{4}\pi + z \cdot 2\pi$

si $z = 0 \Longrightarrow x = \frac{7}{4}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{7}{4}\pi$ que NO es una de ellas pues $\frac{7}{4}\pi > \pi$ y no pertenece a $[-\pi, \pi]$

(Nota : si con z = 0 ya no dió en el intervalo $[-\pi, \pi]$ tendré que tomar valores de z menores que 0)

si $z = -1 \Longrightarrow x = \frac{7}{4}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{7}{4}\pi - 2\pi = -\frac{\pi}{4}$ es una de ellas pues $\in [-\pi, \pi]$

si $z = -2 \Longrightarrow x = \frac{7}{4}\pi + (-2) \cdot 2\pi = \frac{7}{4}\pi - 4\pi = -\frac{9}{4}\pi$ NO es una de ellas pues $-\frac{9}{4}\pi < -\pi$

Entonces para las soluciones generadas por $-\frac{\pi}{4}$ sólo $-\frac{\pi}{4} \in [-\pi, \pi]$

$S_2 = \left\{-\frac{\pi}{4}\right\}$

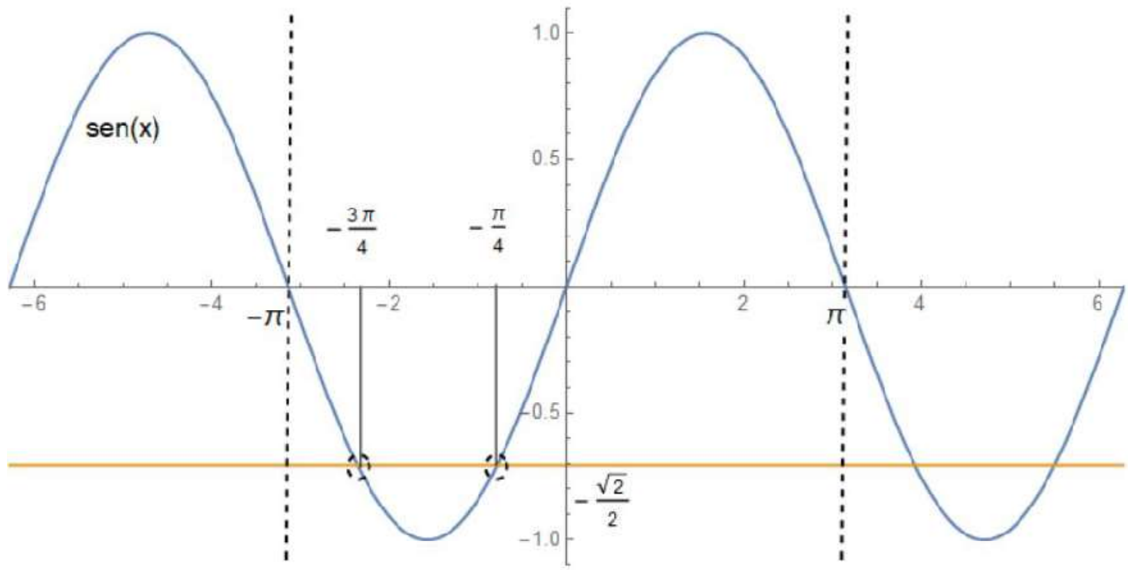
Finalmente las soluciones de sen $(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ para $x \in [-\pi, \pi]$ son

$S = S_1 \bigcup S_2 = S_1 = \left\{-\frac{3}{4}\pi\right\} \bigcup \left\{-\frac{\pi}{4}\right\} \Longrightarrow$

$$S = \left\{-\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{4}\right\}$$

Si graficamos sen (x) y la recta horizontal $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ se verifican estas soluciones

```
Plot[{Sin[x], -√2/2}, {x, -2 π, 2 π}, PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· seno rango de representación cociente de aspecto



Ej 13 d) encontrar las soluciones de sen (x) = −1 para $x \in [-\pi, \pi]$

Como el seno es negativo y alcanza el valor mínimo, el arco solución es $\frac{3}{2}\pi$

Entonces el conjunto solución será :

S : $x = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \;,\; k \in \mathbb{Z}$

tomamos valores enteros de k y vamos reemplazando en $x = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

si k = 0 $\Longrightarrow x = \frac{3}{2}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{3}{2}\pi$ **NO es una de ellas pues** $\frac{3}{2}\pi > \pi$ **y no pertenece a** $[-\pi, \pi]$

(Nota : si con k = 0 ya no dió en el intervalo $[-\pi, \pi]$ **tendré que tomar valores de k menores que 0)**

si k = −1 $\Longrightarrow x = \frac{3}{2}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{3}{2}\pi - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$ **es una de ellas pues** $-\frac{\pi}{2}\pi \in [-\pi, \pi]$

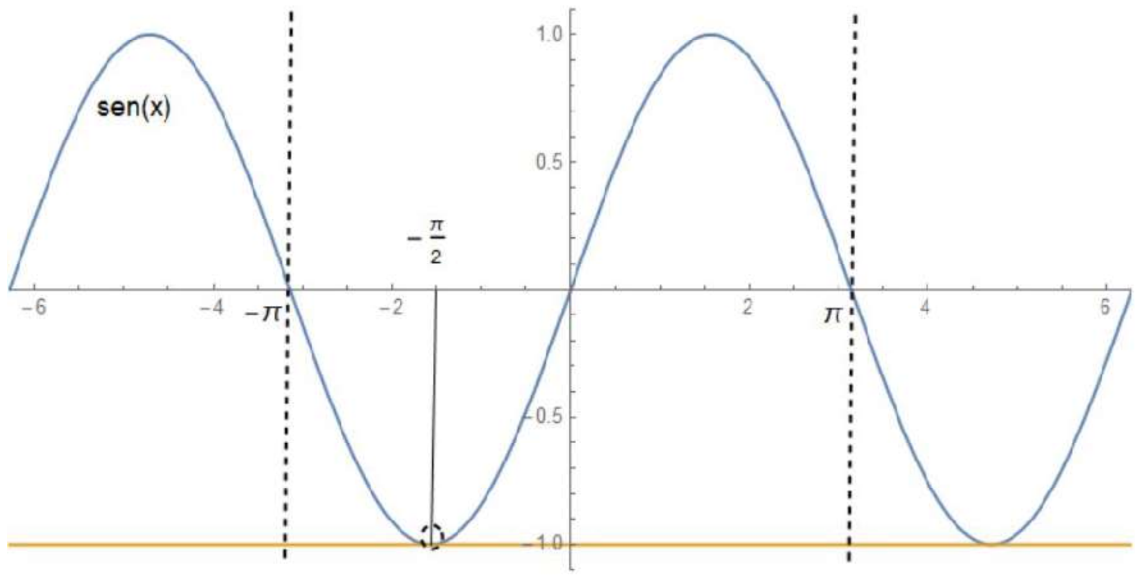
si k = −2 $\Longrightarrow x = \frac{3}{2}\pi + (-2) \cdot 2\pi = \frac{3}{2}\pi - 4\pi = -\frac{5}{2}\pi$ **NO es una de ellas pues** $-\frac{5}{2}\pi < -\pi$

Entonces

$S = \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$ **es el conjunto solución de sen (x) = −1 para $x \in [-\pi, \pi]$**

Si graficamos sen (x) y la recta horizontal y = −1 se verifica esta solución

```
Plot[{Sin[x], -1}, {x, -2 π, 2 π}, PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· seno rango de representación cociente de aspecto



Ej 13 e) encontrar las soluciones de cos (x) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **para x** $\in [-\pi, \pi]$

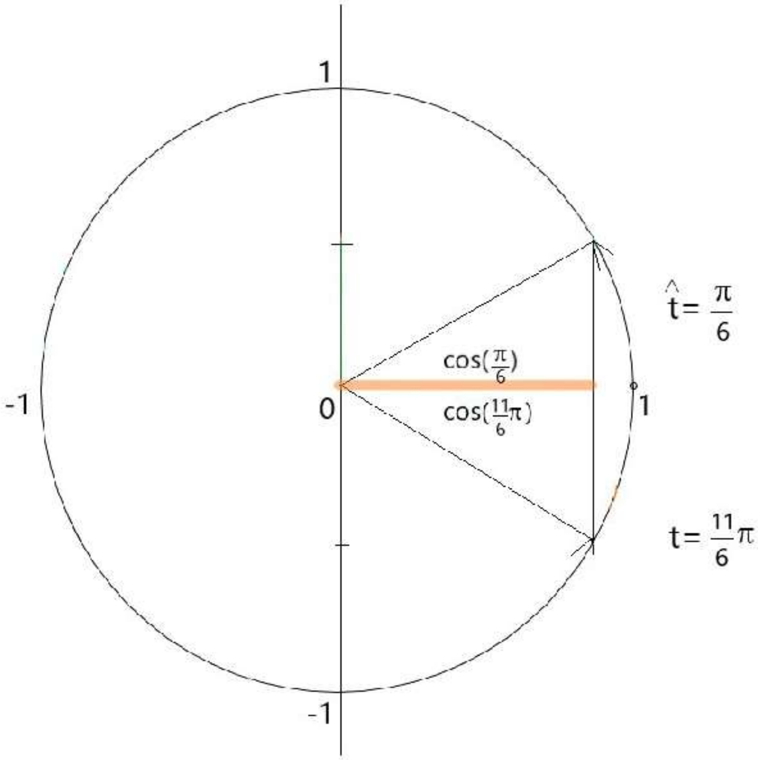
Si miramos la tabla de valores de seno y coseno para arcos entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

	0°	30°	45°	60°	90°
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen(t)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos(t)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

vemos que el arco t = $\frac{\pi}{6}$ **tiene un valor de cos (t) igual a** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Pero éste no es el único generador de soluciones

Miremos el diagrama de la circunferencia de radio 1



Es decir que para $x \in \mathbb{R}$ tendremos dos conjuntos infinitos

de soluciones de la ecuación $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

uno generado por $x = \frac{\pi}{6}$ y otro generado por $x = \frac{11}{6}\pi$

Estos son :

El primer conjunto se escribe así :

$S_1 : \quad x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \;, \quad k \in \mathbb{Z}$

El segundo conjunto se escribe así :

$S_2 : \quad x_2 = \frac{11}{6}\pi + z \cdot 2\pi \;, \quad z \in \mathbb{Z}$

Entonces el conjunto S solución de la ecuación $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ para $x \in \mathbb{R}$ es :

$$S = S_1 \bigcup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \;, \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{11}{6}\pi + z \cdot 2\pi \;, \quad z \in \mathbb{Z}\right\}$$

Sin embargo, como en el ejercio nos piden encontrar sólo las soluciones de

seno

$\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ para $x \in [-\pi, \pi]$, veamos cuáles soluciones están en $[-\pi, \pi]$

Primero tomamos valores enteros de k y vamos reemplazando en $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

si k = 0 $\Longrightarrow$ $x = \frac{\pi}{6} + 0 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}$ es una de ellas pues $\frac{\pi}{6} \in [-\pi, \pi]$

si k = 1 $\Longrightarrow$ $x = \frac{\pi}{6} + 1 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13}{6}\pi$ NO es una de ellas pues $\frac{13}{6}\pi > \pi$

si k = -1 $\Longrightarrow$ $x = \frac{\pi}{6} + (-1) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11}{6}\pi$ NO es una de ellas pues $-\frac{11}{6}\pi < -\pi$

si k = -2 $\Longrightarrow$ $x = \frac{\pi}{6} + (-2) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6} - 4\pi = -\frac{23}{6}\pi$ NO es una de ellas pues $-\frac{23}{6}\pi < -\pi$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{\pi}{6}$ tenemos $\frac{\pi}{6}$ que $\in [-\pi, \pi]$

$S_1 = \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$

Veamos ahora cuáles de las soluciones generadas por $\frac{11}{6}\pi$ pertenecen a $[-\pi, \pi]$

tomamos valores enteros de z y vamos reemplazando en $x = \frac{11}{6}\pi + z \cdot 2\pi$

si z = 0 $\Longrightarrow$ $x = \frac{11}{6}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{11}{6}\pi$ que NO es una de ellas pues $\frac{11}{6}\pi > \pi$

(Nota : si con z = 0 ya no dió en el intervalo $[-\pi, \pi]$ tendré que tomar valores de z menores que 0)

si z = -1 $\Longrightarrow$ $x = \frac{11}{6}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{11}{6}\pi - 2\pi = -\frac{\pi}{6}$ que es una de ellas pues $-\frac{\pi}{6} \in [-\pi, \pi]$

si z = -2 $\Longrightarrow$ $x = \frac{11}{6}\pi + (-2) \cdot 2\pi = \frac{11}{6}\pi - 4\pi = -\frac{13}{6}\pi$ que NO es una de ellas pues $-\frac{13}{6}\pi < -\pi$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{11}{6}\pi$ es sólo $-\frac{\pi}{6} \in [-\pi, \pi]$

$S_2 = \left\{-\frac{\pi}{6}\right\}$

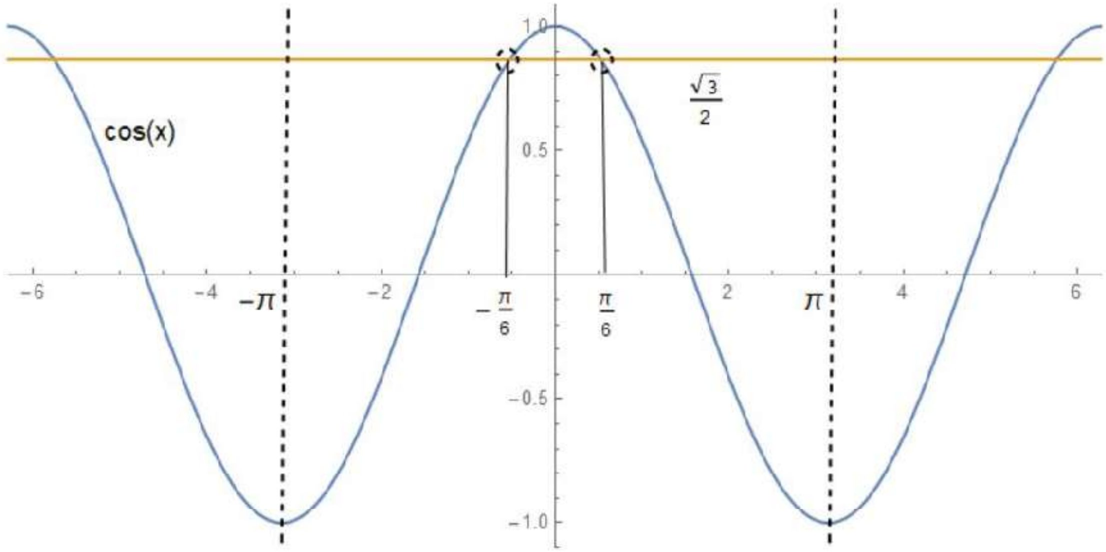
Finalmente las soluciones de $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ para $x \in [-\pi, \pi]$ son

$S = S_1 \bigcup S_2 = S_1 = \left\{\frac{\pi}{6}\right\} \bigcup \left\{\frac{5}{6}\pi\right\}$ $\Longrightarrow$

$$S = \left\{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$$

Si graficamos $\cos(x)$ y la recta horizontal $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ se verifican estas soluciones

```
Plot[{Cos[x], Sqrt[3]/2}, {x, -2 π, 2 π}, PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· coseno rango de representación cociente de aspecto



Ej 13 f) **encontrar las soluciones de** $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ **para** $x \in [-\pi, \pi]$

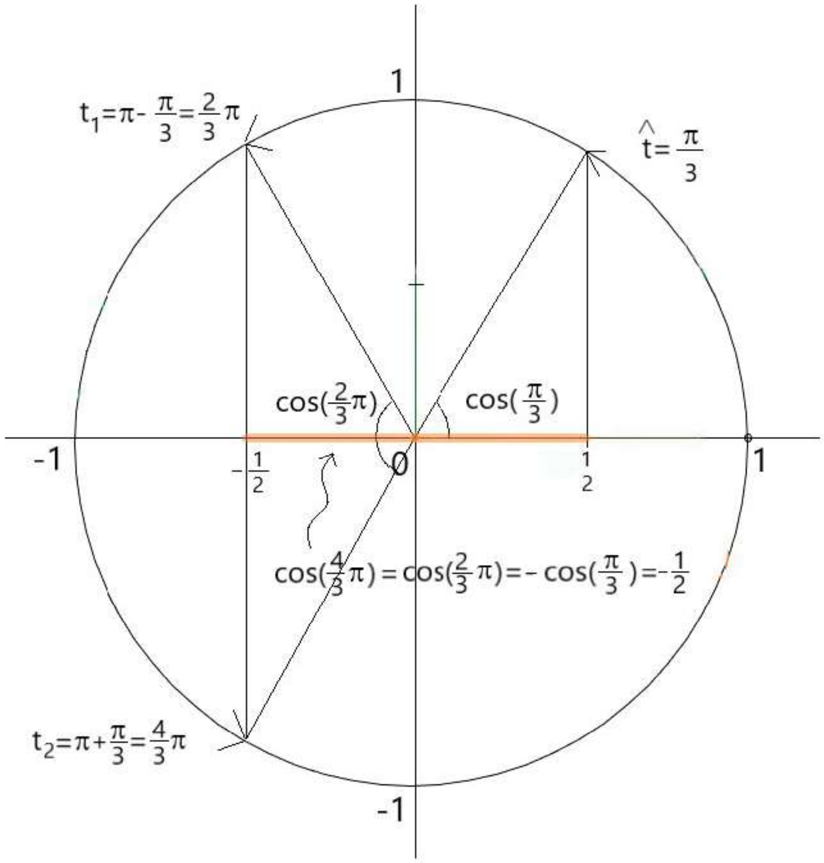
Si miramos la tabla de valores de seno y coseno para arcos entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

	0°	30°	45°	60°	90°
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen(t)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos(t)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

vemos que el arco $t = \frac{\pi}{3}$ **tiene un valor de** $\cos(t)$ $\frac{1}{2}$ **que es igual**

en valor absoluto al que buscamos

Miremos el diagrama de la circunferencia de radio 1



Es decir que para $x \in \mathbb{R}$ tendremos dos conjuntos infinitos

de soluciones de la ecuación $\cos(x) = -\frac{1}{2}$:

uno generado por $x = \frac{2}{3}\pi$ y otro generado por $x = \frac{4}{3}\pi$

Estos son :

El primer conjunto se escribe así :

$S_1 : \quad x_1 = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z}$

El segundo conjunto se escribe así :

$S_2 : \quad x_2 = \frac{4}{3}\pi + z \cdot 2\pi \ , \quad z \in \mathbb{Z}$

Entonces el conjunto S solución de la ecuación $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ para $x \in \mathbb{R}$ es :

$$S = S_1 \bigcup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{4}{3}\pi + z \cdot 2\pi \ , \quad z \in \mathbb{Z}\right\}$$

Sin embargo, como en el ejercio nos piden encontrar sólo las soluciones de

seno

$\cos(x) = -\frac{1}{2}$ para $x \in [-\pi, \pi]$, veamos cuáles soluciones están en $[-\pi, \pi]$

Primero tomamos valores enteros de k y vamos reemplazando en $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

si $k = 0 \implies x = \frac{2}{3}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi$ **es una de ellas pues** $\frac{2}{3}\pi \in [-\pi, \pi]$

si $k = 1 \implies x = \frac{2}{3}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi + 2\pi = \frac{8}{3}\pi$ **NO es una de ellas pues** $\frac{8}{3}\pi > \pi$

si $k = -1 \implies x = \frac{2}{3}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi - 2\pi = -\frac{4}{3}\pi$ **NO es una de ellas pues** $-\frac{4}{3}\pi < -\pi$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{2}{3}\pi$ **tenemos** $\frac{2}{3}\pi$ **que** $\in [-\pi, \pi]$

$S_1 = \left\{\frac{2}{3}\pi\right\}$

Veamos ahora cuáles de las soluciones generadas por $\frac{4}{3}\pi$ **pertenecen a** $[-\pi, \pi]$

tomamos valores enteros de z y vamos reemplazando en $x = \frac{4}{3}\pi + z \cdot 2\pi$

si $z = 0 \implies x = \frac{4}{3}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi$ **que NO es una de ellas pues** $\frac{4}{3}\pi > \pi$

(**Nota : si con** $z = 0$ **ya no dió en el intervalo** $[-\pi, \pi]$ **tendré que tomar valores de z menores que** 0)

si $z = -1 \implies x = \frac{4}{3}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi - 2\pi = -\frac{2}{3}\pi$ **que es una de ellas pues** $-\frac{2}{3}\pi \in [-\pi, \pi]$

si $z = -2 \implies x = \frac{4}{3}\pi + (-2) \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi - 4\pi = -\frac{8}{3}\pi$ **que NO es una de ellas pues** $-\frac{8}{3}\pi < -\pi$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{4}{3}\pi$ **es sólo** $-\frac{2}{3}\pi \in [-\pi, \pi]$

$S_2 = \left\{-\frac{2}{3}\pi\right\}$

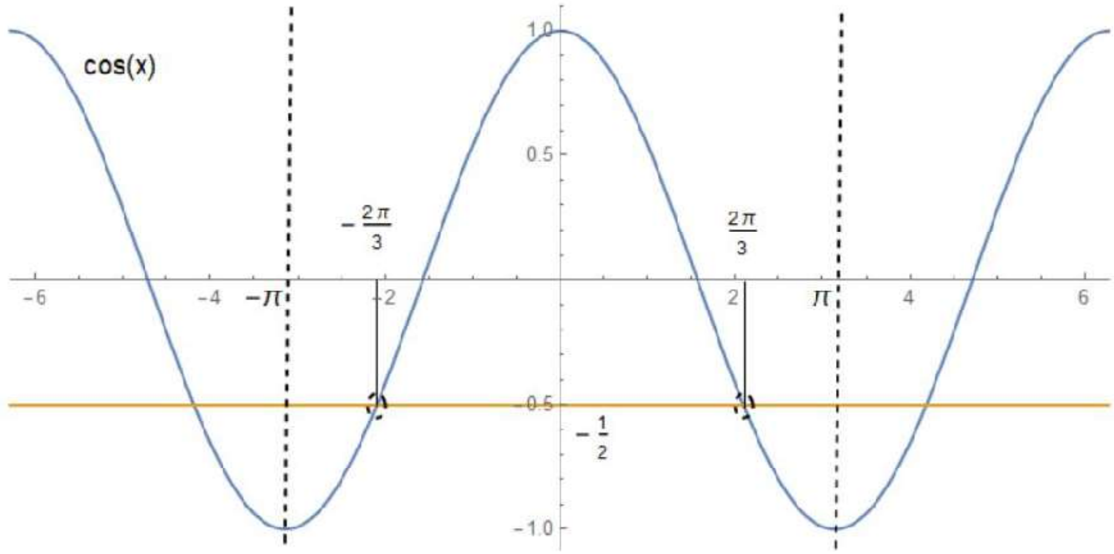
Finalmente las soluciones de $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ **para** $x \in [-\pi, \pi]$ **son**

$S = S_1 \cup S_2 = S_1 = \left\{\frac{2}{3}\pi\right\} \cup \left\{-\frac{2}{3}\pi\right\} \implies$

$$S = \left\{-\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right\}$$

Si graficamos cos (x) y la recta horizontal $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **se verifican estas soluciones**

```
Plot[{Cos[x], -1/2}, {x, -2 π, 2 π}, PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre… coseno rango de representación cociente de aspecto



Ej 13 g) encontrar las soluciones de $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ para $x \in [-\pi, \pi]$

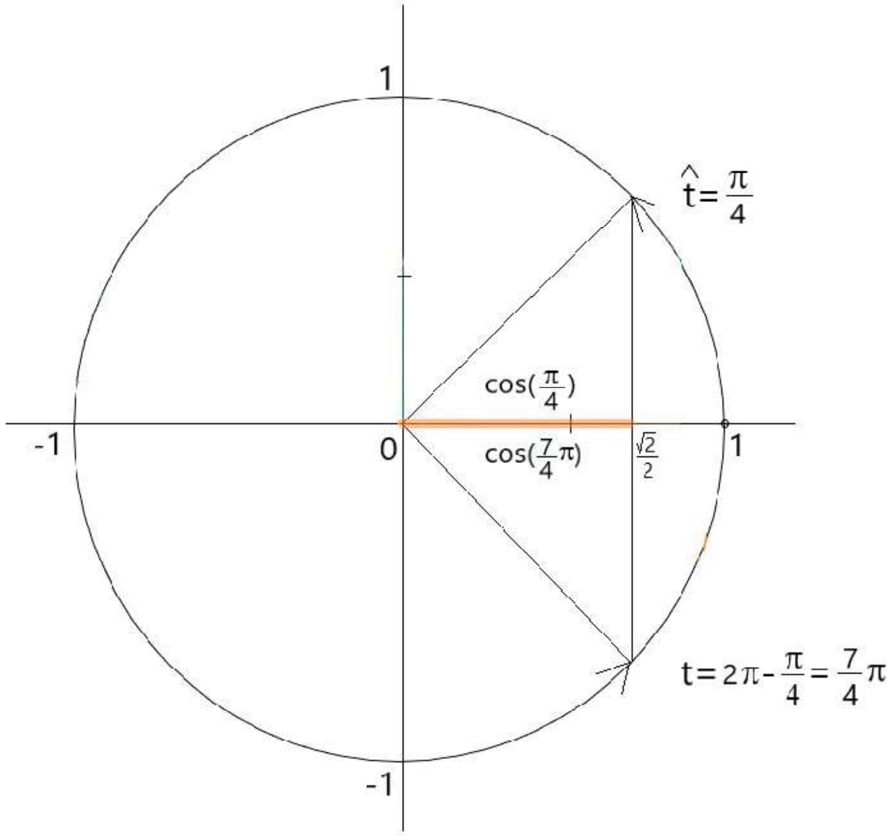
Si miramos la tabla de valores de seno y coseno para arcos entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

	0º	30º	45º	60º	90º
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen(t)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos(t)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

vemos que el arco $t = \frac{\pi}{4}$ tiene un valor de $\cos(t)$ igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Pero éste no es el único generador de soluciones

Miremos el diagrama de la circunferencia de radio 1



Es decir que para $x \in \mathbb{R}$ tendremos dos conjuntos infinitos

de soluciones de la ecuación $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

uno generado por $x = \frac{\pi}{4}$ y otro generado por $x = \frac{7}{4}\pi$

Estos son :

El primer conjunto se escribe así :

S_1 : $x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

El segundo conjunto se escribe así :

S_2 : $x_2 = \frac{7}{4}\pi + z \cdot 2\pi$, $z \in \mathbb{Z}$

Entonces el conjunto S solución de la ecuación $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ para $x \in \mathbb{R}$ es :

$$S = S_1 \bigcup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi , k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{7}{4}\pi + z \cdot 2\pi , z \in \mathbb{Z}\right\}$$

Sin embargo, como en el ejercio nos piden encontrar sólo las soluciones de

seno

$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ para $x \in [-\pi, \pi]$, veamos cuáles soluciones están en $[-\pi, \pi]$

Primero tomamos valores enteros de k y vamos reemplazando en $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

si k = 0 $\Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 0 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}$ **es una de ellas pues** $\frac{\pi}{4} \in [-\pi, \pi]$

si k = 1 $\Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 1 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9}{4}\pi$ **NO es una de ellas pues** $\frac{9}{4}\pi > \pi$

si k = -1 $\Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + (-1) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7}{4}\pi$ **NO es una de ellas pues** $-\frac{7}{4}\pi < -\pi$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{\pi}{4}$ **tenemos** $\frac{\pi}{4}$ **que** $\in [-\pi, \pi]$

$S_1 = \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

Veamos ahora cuáles de las soluciones generadas por $\frac{7}{4}\pi$ **pertenecen a** $[-\pi, \pi]$

tomamos valores enteros de z y vamos reemplazando en $x = \frac{7}{4}\pi + z \cdot 2\pi$

si z = 0 $\Longrightarrow x = \frac{7}{4}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{7}{4}\pi$ **que NO es una de ellas pues** $\frac{7}{4}\pi > \pi$

(Nota : si con z = 0 ya no dió en el intervalo $[-\pi, \pi]$ **tendré que tomar valores de z menores que 0)**

si z = -1 $\Longrightarrow x = \frac{7}{4}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{7}{4}\pi - 2\pi = -\frac{\pi}{4}$ **que es una de ellas pues** $-\frac{\pi}{4} \in [-\pi, \pi]$

si z = -2 $\Longrightarrow x = \frac{7}{4}\pi + (-2) \cdot 2\pi = \frac{7}{4}\pi - 4\pi = -\frac{9}{4}\pi$ **que NO es una de ellas pues** $-\frac{9}{4}\pi < -\pi$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{7}{4}\pi$ **es sólo** $-\frac{\pi}{4} \in [-\pi, \pi]$

$S_2 = \left\{-\frac{\pi}{4}\right\}$

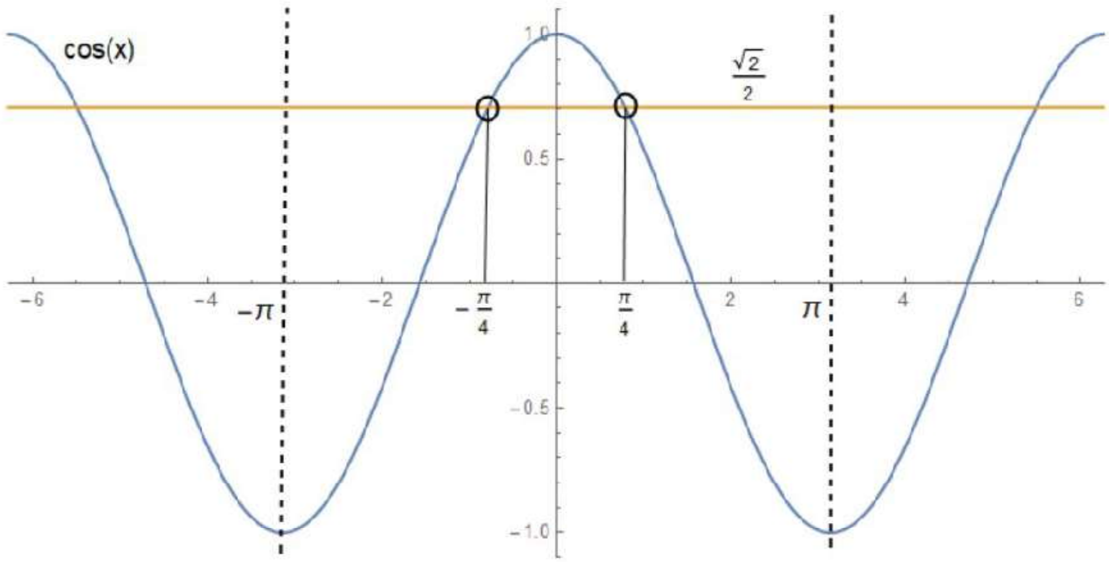
Finalmente las soluciones de $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **para** $x \in [-\pi, \pi]$ **son**

$S = S_1 \bigcup S_2 = S_1 = \left\{\frac{\pi}{4}\right\} \bigcup \left\{-\frac{\pi}{4}\right\} \Longrightarrow$

$$S = \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$$

Si graficamos cos (x) y la recta horizontal $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **se verifican estas soluciones**

```
Plot[{Cos[x], Sqrt[2]/2}, {x, -2 π, 2 π}, PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre⋯ coseno rango de representación cociente de aspecto



Ej 13 h) encontrar las soluciones de cos (x) = 1 para $x \in [-\pi, \pi]$

Si miramos la tabla de valores de seno y coseno para arcos entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

	0º	30º	45º	60º	90º
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen(t)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos(t)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

vemos que el arco t = 0 π = 0 tiene un valor de cos (t) igual a 1

Entonces el conjunto solución será :

S : $x = 0 + k \cdot 2\pi = k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

tomamos valores enteros de k y vamos reemplazando en $x = k \cdot 2\pi$

si k = 0 $\Longrightarrow$ $x = 0 \cdot 2\pi = 0\pi$ es una de ellas pues $0\pi \in [-\pi, \pi]$

si k = 1 $\Longrightarrow$ $x = 1 \cdot 2\pi = 2\pi$ NO es una de ellas pues $2\pi > \pi$

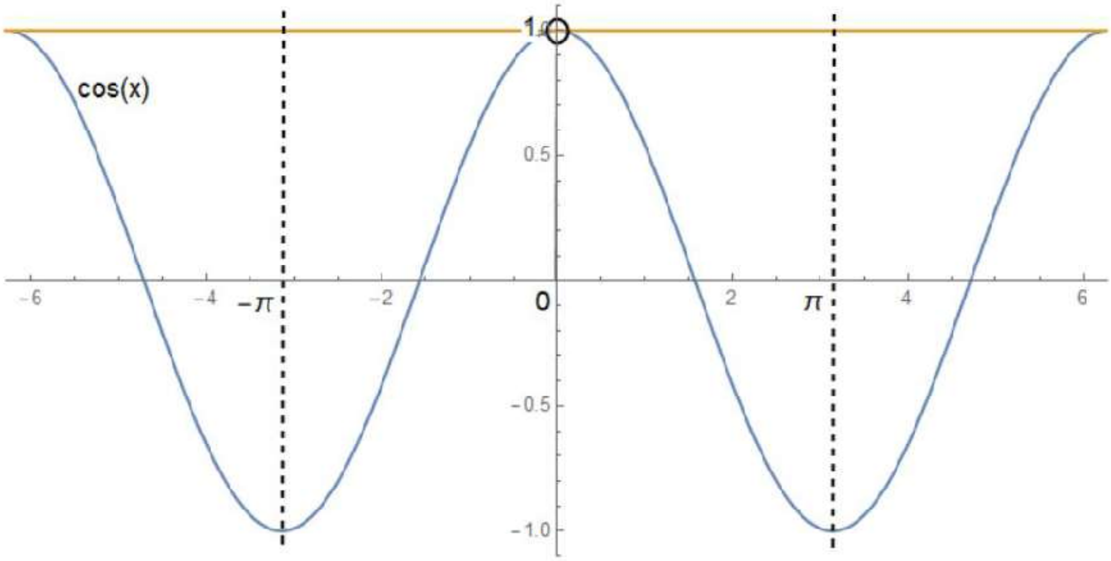
si k = -1 $\Longrightarrow$ $x = (-1) \cdot 2\pi = -2\pi$ NO es una de ellas pues $-2\pi < -\pi$

Entonces

S = {0} es el conjunto solución de cos (x) = 1 para $x \in [-\pi, \pi]$

Si graficamos sen (x) y la recta horizontal y = -1 se verifica esta solución

```
Plot[{Cos[x], 1}, {x, -2 π, 2 π}, PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
repre··· coseno                rango de representación                cociente de aspecto
```



++

Ejercicio 14.- Encontrar todos los $x \in [0; 2\pi]$ tales que

a. $\operatorname{sen}(x) = -\dfrac{1}{2}$ **b.** $\operatorname{sen}(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c. $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **d.** $\cos(x) = -1$

Ej 14 a) Ahora las soluciones deben pertenecer al intervalo $[0, 2\pi]$

$$\operatorname{sen}(x) = -\frac{1}{2}$$

Dado que seno es negativo los arcos deben pertenecer al 3 ero o 4 to cuadrante

Según la tabla de seno y coseno para arcos entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se ve que el arco cuyo seno es $\frac{1}{2}$ es $\frac{\pi}{6}$

Éste es el arco en 1 er cuadrante que llamamos $\hat{t} = \frac{\pi}{6}$

El arco del 3 er cuadrante que tiene valor de seno $-\frac{1}{2}$ es :

$$t_1 = \pi + \hat{t} = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi \implies t_1 = \frac{7}{6}\pi$$

El arco del 4 to cuadrante que tiene valor de seno $-\frac{1}{2}$ es :

$$t_2 = 2\pi - \hat{t} = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi \implies t_2 = \frac{11}{6}\pi$$

Luego, estos son los generadores de los dos conjuntos de infinitas soluciones en todos los reales

$S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ ó

$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{11}{6}\pi + z \cdot 2\pi ,\ z \in \mathbb{Z}\right\}$

$S = S_1 \bigcup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi ,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{11}{6}\pi + z \cdot 2\pi ,\ z \in \mathbb{Z}\right\}$

S es el conjunto solución de $\text{sen}(x) = -\frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Veamos cuáles de éstas pertenecen al intervalo $[0, 2\pi]$

tomamos valores enteros de k y vamos reemplazando en $x = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

si $k = 0 \implies x = \frac{7}{6}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{7}{6}\pi$ es una de ellas pues $\frac{7}{6}\pi \in [0, 2\pi]$

si $k = 1 \implies x = \frac{7}{6}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{7}{6}\pi + 2\pi = \frac{19}{6}\pi$ NO es una de ellas pues $\frac{19}{6}\pi > 2\pi$

si $k = -1 \implies x = \frac{7}{6}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{7}{6}\pi - 2\pi = -\frac{5}{6}\pi$ NO es una de ellas pues $-\frac{5}{6}\pi < 0$

Entonces

$S_1 = \left\{\frac{7}{6}\pi\right\}$

----

ahora tomemos valores de z y vamos reemplazando en $x = \frac{11}{6}\pi + z \cdot 2\pi$

si $z = 0 \implies x = \frac{11}{6}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{11}{6}\pi$ es una de ellas pues $\frac{11}{6}\pi \in [0, 2\pi]$

si $z = 1 \implies x = \frac{11}{6}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{11}{6}\pi + 2\pi = \frac{23}{6}\pi$ NO es una de ellas pues $\frac{23}{6}\pi > 2\pi$

si $z = -1 \implies x = \frac{11}{6}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{11}{6}\pi - 2\pi = -\frac{\pi}{6}$ NO es una de ellas pues $-\frac{\pi}{6} < 0$

Entonces,

$S_2 = \left\{\frac{11}{6}\pi\right\}$

Finalmente :

$S = S_1 \bigcup S_2 = \left\{\frac{7}{6}\pi\right\} \bigcup \left\{\frac{11}{6}\pi\right\}$

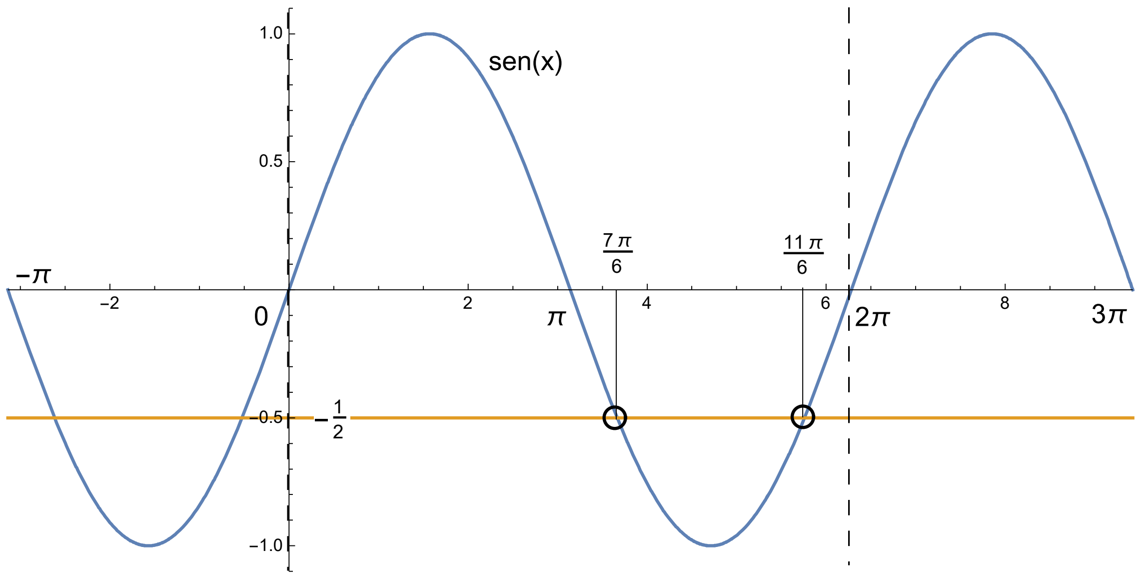
$$S = \left\{\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\right\}$$

es el conjunto solución de $\text{sen}(x) = -\frac{1}{2}$ para $x \in [0, 2\pi]$

Si graficamos sen (x) y la recta horizontal $y = -\frac{1}{2}$ se verifica esta solución

Plot$\left[\left\{\text{Sin}[x], -\frac{1}{2}\right\}, \{x, -\pi, 3\pi\}, \text{PlotRange} \to \{\{-\pi, 3\pi\}, \{-1.1, 1.1\}\}, \text{AspectRatio} \to 0.5\right]$

repre⋯ seno rango de representación cociente de aspecto



Ej 14 b) Ahora las soluciones deben pertenecer al intervalo $[0, 2\pi]$

$$\text{sen}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dado que seno es positivo los arcos deben pertenecer al 1 ero o 2 do cuadrante

Según la tabla de seno y coseno para arcos entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ **se ve que el arco cuyo**

seno es $\frac{1}{2}$ **es** $\frac{\pi}{4}$

Éste es el arco en 1 er cuadrante que llamamos $\hat{t} = \frac{\pi}{4}$

Entonces el arco del 1 er cuadrante que tiene valor de seno $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **es :**

$$\hat{t} = t_1 = \frac{\pi}{4}$$

El arco del 2 do cuadrante que tiene valor de seno $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **es :**

$$t_2 = \pi - \hat{t} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi \implies t_2 = \frac{3}{4}\pi$$

Luego, estos son los generadores de los dos conjuntos de infinitas soluciones en todos los reales

$$S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\} \quad \text{ó}$$

$$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{3}{4}\pi + z \cdot 2\pi, \ z \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$S = S_1 \bigcup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{3}{4}\pi + z \cdot 2\pi, \ z \in \mathbb{Z}\right\}$$

S es el conjunto solución de $\text{sen}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Veamos cuáles de éstas pertenecen al intervalo $[0, 2\pi]$

tomamos valores enteros de k y vamos reemplazando en $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$

si $k = 0 \implies x = \frac{\pi}{4} + 0 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}$ **es una de ellas pues** $\frac{\pi}{4} \in [0, 2\pi]$

si $k = 1 \implies x = \frac{\pi}{4} + 1 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9}{4}\pi$ **NO es una de ellas pues** $\frac{9}{4}\pi > 2\pi$

si $k = -1 \implies x = \frac{\pi}{4} + (-1) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7}{4}\pi$ **NO es una de ellas pues** $-\frac{7}{4}\pi < 0$

Entonces

$S_1 = \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

----

ahora tomemos valores de z y vamos reemplazando en $x = \frac{3}{4}\pi + z \cdot 2\pi$

si $z = 0 \implies x = \frac{3}{4}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{3}{4}\pi$ **es una de ellas pues** $\frac{3}{4}\pi \in [0, 2\pi]$

si $z = 1 \implies x = \frac{3}{4}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{3}{4}\pi + 2\pi = \frac{11}{4}\pi$ **NO es una de ellas pues** $\frac{11}{4}\pi > 2\pi$

si $z = -1 \implies x = \frac{3}{4}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{3}{4}\pi - 2\pi = -\frac{5}{4}\pi$ **NO es una de ellas pues** $-\frac{5}{4}\pi < 0$

Entonces,

$S_2 = \left\{\frac{3}{4}\pi\right\}$

Finalmente :

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{\frac{\pi}{4}\right\} \cup \left\{\frac{3}{4}\pi\right\}$

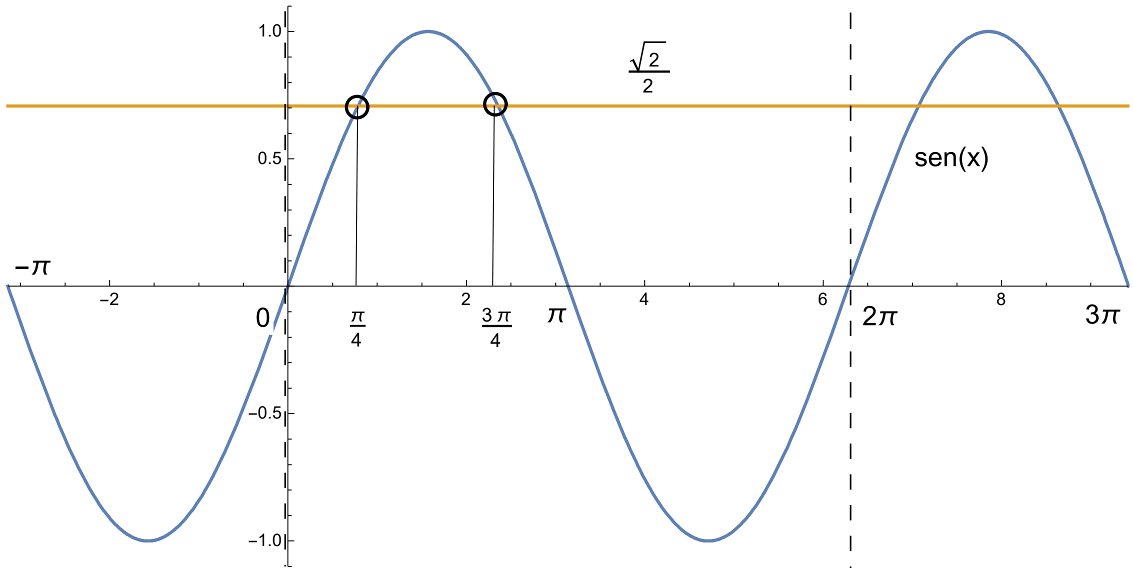
$$S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right\}$$

es el conjunto solución de $\text{sen}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **para** $x \in [0, 2\pi]$

Si graficamos sen (x) y la recta horizontal $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **se verifica esta solución**

```
Plot[{Sin[x], √2/2}, {x, -π, 3 π}, PlotRange → {{-π, 3 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

repre··· seno rango de representación cociente de aspecto



Ej 14 c) Ahora las soluciones deben pertenecer al intervalo $[0, 2\pi]$

$$\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dado que en este caso coseno es negativo, los arcos deben pertenecer al 2 do y al 3 er cuadrante

Según la tabla de seno y coseno para arcos entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se ve que el arco cuyo

coseno es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ es $\frac{\pi}{6}$

Éste es el arco en 1 er cuadrante que llamamos $\hat{t} = \frac{\pi}{6}$

El arco del 2 do cuadrante que tiene valor de coseno $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ es :

$$t_1 = \pi - \hat{t} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi \implies t_1 = \frac{5}{6}\pi$$

El arco del 3 er cuadrante que tiene valor de coseno $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ es :

$$t_2 = \pi + \hat{t} = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi \implies t_2 = \frac{7}{6}\pi$$

Luego, estos son los generadores de los dos conjuntos de infinitas soluciones en todos los reales

$$S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\} \quad \text{ó}$$

$$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{7}{6}\pi + z \cdot 2\pi, \ z \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{7}{6}\pi + z \cdot 2\pi, \ z \in \mathbb{Z}\right\}$$

S es el conjunto solución de $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Veamos cuáles de éstas pertenecen al intervalo $[0, 2\pi]$

tomamos valores enteros de k y vamos reemplazando en $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

si $k = 0 \implies x = \frac{5}{6}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi$ **es una de ellas pues** $\frac{5}{6}\pi \in [0, 2\pi]$

si $k = 1 \implies x = \frac{5}{6}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi + 2\pi = \frac{17}{6}\pi$ **NO es una de ellas pues** $\frac{17}{6}\pi > 2\pi$

si $k = -1 \implies x = \frac{5}{6}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi - 2\pi = -\frac{7}{6}\pi$ **NO es una de ellas pues** $-\frac{7}{6}\pi < 0$

Entonces

$S_1 = \left\{\frac{5}{6}\pi\right\}$

----

ahora tomemos valores de z y vamos reemplazando en $x = \frac{7}{6}\pi + z \cdot 2\pi$

si $z = 0 \implies x = \frac{7}{6}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{7}{6}\pi$ **es una de ellas pues** $\frac{7}{6}\pi \in [0, 2\pi]$

si $z = 1 \implies x = \frac{7}{6}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{7}{6}\pi + 2\pi = \frac{19}{6}\pi$ **NO es una de ellas pues** $\frac{19}{6}\pi > 2\pi$

si $z = -1 \implies x = \frac{7}{6}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{7}{6}\pi - 2\pi = -\frac{5}{6}\pi$ **NO es una de ellas pues** $-\frac{5}{6}\pi < 0$

Entonces,

$S_2 = \left\{\frac{7}{6}\pi\right\}$

Finalmente :

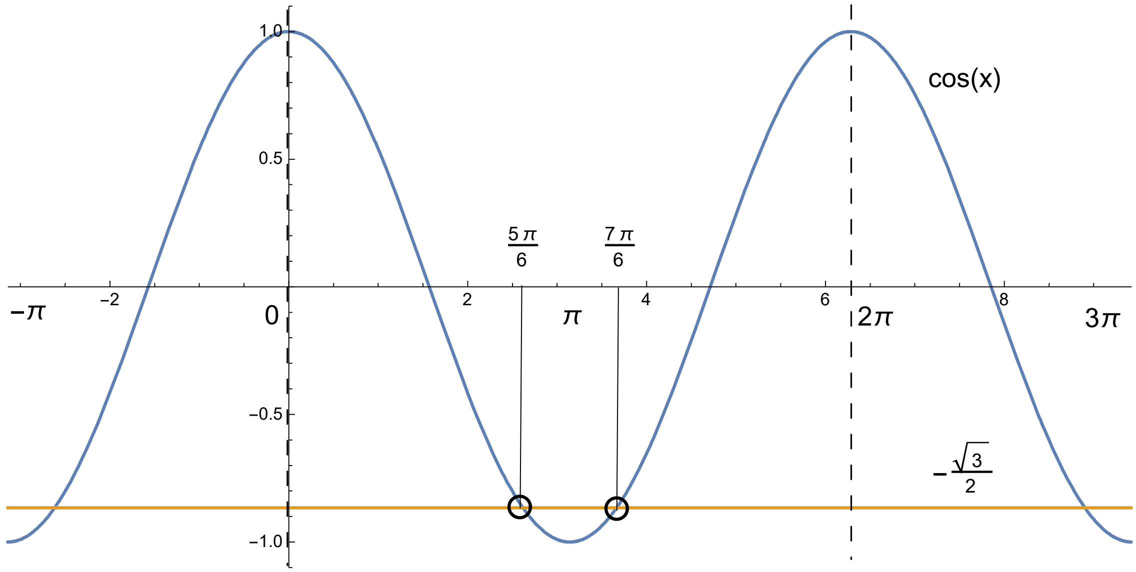
$S = S_1 \bigcup S_2 = \left\{\frac{5}{6}\pi\right\} \bigcup \left\{\frac{7}{6}\pi\right\}$

$$S = \left\{\frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi\right\}$$

es el conjunto solución de $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **para** $x \in [0, 2\pi]$

Si graficamos $\cos(x)$ **y la recta horizontal** $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **se verifica esta solución**

```
Plot[{Cos[x], -√3/2}, {x, -π, 3π}, PlotRange → {{-π, 3π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· coseno rango de representación cociente de aspecto



Ej 14 d) Ahora las soluciones deben pertenecer al intervalo $[0, 2\pi]$

$\cos(x) = -1$

Dado que en este caso coseno es negativo, el único arco solución pertenece al 2 dp cuadrante y es $t = \pi$

Existe sólo un conjunto infinito de soluciones generadas por el arco igual a π y que se escriben así :

$$x = \pi + k \cdot 2\pi = (2k+1)\pi$$

Entonces :

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x = (2k+1)\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$$

Veamos cuáles de éstas pertenecen al intervalo $[0, 2\pi]$

tomamos valores enteros de k y vamos reemplazando en $x = (2k+1)\pi$

si $k = 0 \implies x = (2 \cdot 0 + 1)\pi = \pi$ es una de ellas pues $\pi \in [0, 2\pi]$

si $k = 1 \implies x = (2 \cdot 1 + 1)\pi = 3\pi$ NO es una de ellas pues $3\pi > 2\pi$

si $k = -1 \implies x = (2 \cdot (-1) + 1)\pi = -\pi$ NO es una de ellas pues $-\pi < 0$

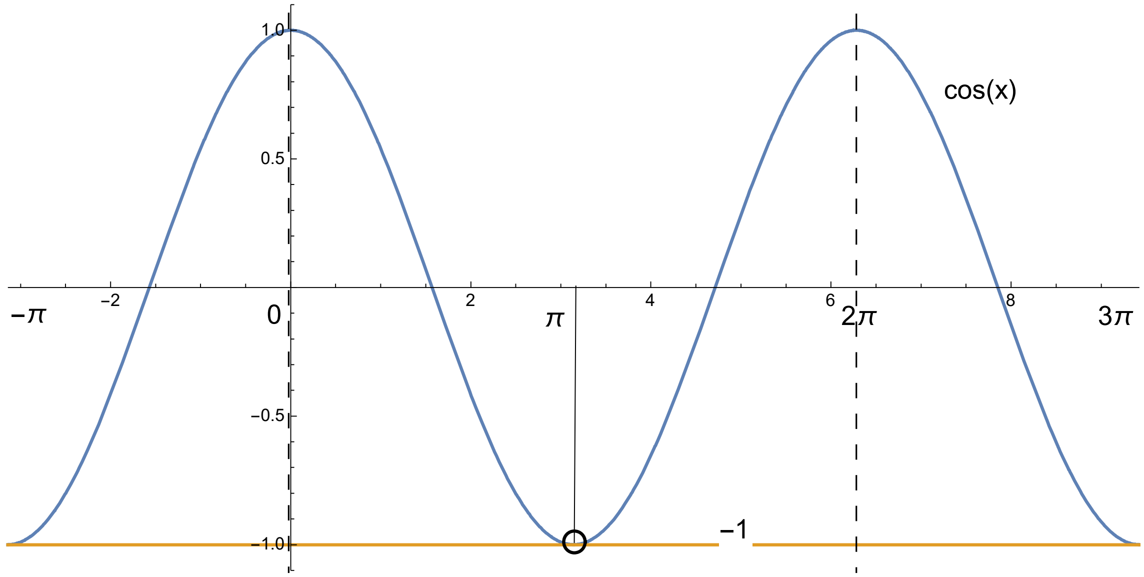
Entonces

$S = \{\pi\}$

es el conjunto solución de $\cos(x) = -1$ para $x \in [0, 2\pi]$

Si graficamos cos (x) y la recta horizontal y = -1 se verifica esta solución

```
Plot[{Cos[x], -1}, {x, -π, 3 π}, PlotRange → {{-π, 3 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· coseno rango de representación cociente de aspecto



++

Ejercicio 15.- Encontrar todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que

a. $\operatorname{sen}(x) = -\frac{1}{2}$

b. $\operatorname{sen}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d. $\cos(x) = -1$

Ej 15 a) Las soluciones de sen (x) = $-\frac{1}{2}$ pertenecen a todo $\mathbb{R}$

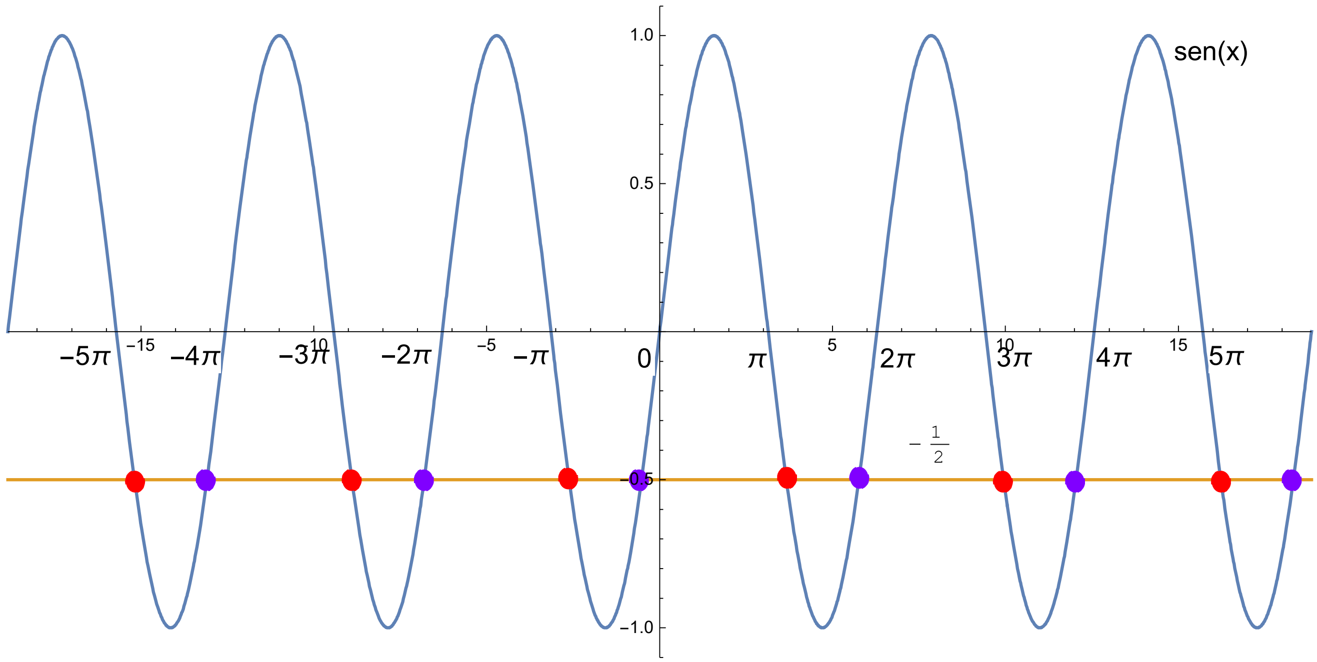
Ya resuelto en el Ej 14 a)

$$S = S_1 \bigcup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{11}{6}\pi + z \cdot 2\pi, \quad z \in \mathbb{Z}\right\}$$

S es el conjunto solución de sen (x) = $-\frac{1}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Si graficamos sen (x) y la recta horizontal y = $-\frac{1}{2}$ se ven estas soluciones

```
Plot[{Sin[x], -1/2}, {x, -6 π, 6 π}, PlotRange → {{-6 π, 6 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· seno rango de representación cociente de aspecto



Ej 15 b) Las soluciones de sen (x) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ pertenecen a todo $\mathbb{R}$

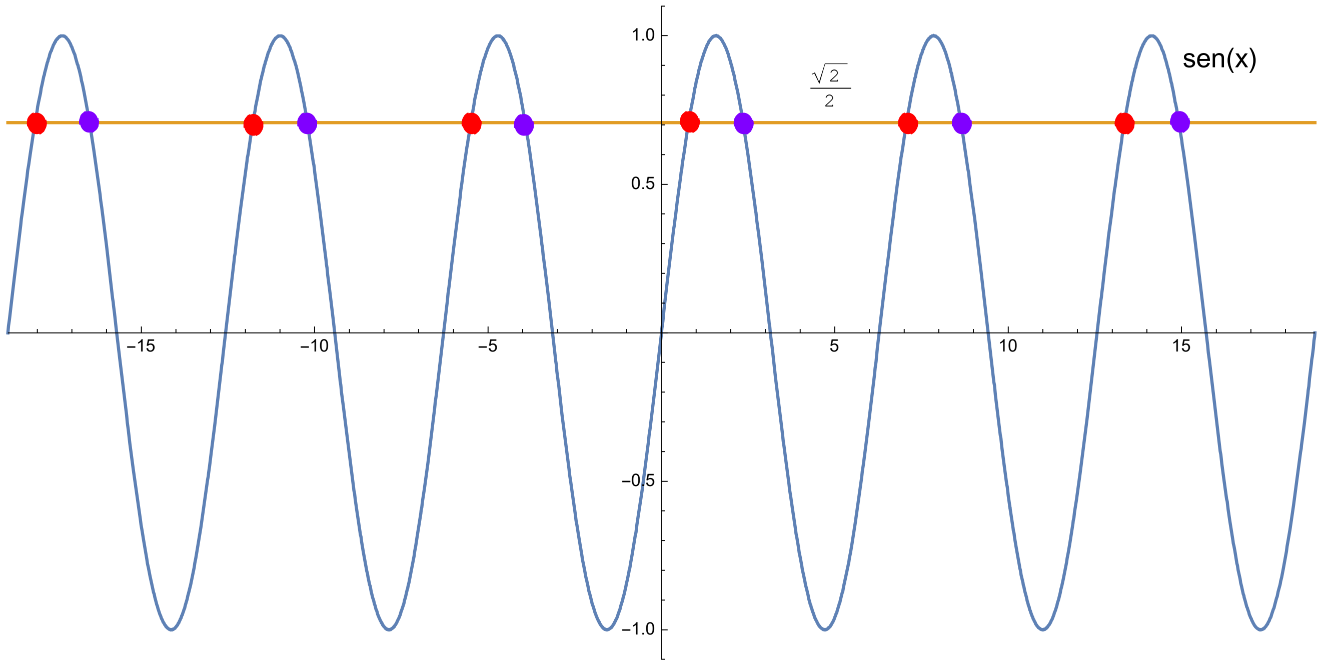
Ya resuelto en el Ej 14 b)

$$S = S_1 \bigcup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ x = \frac{3}{4}\pi + z \cdot 2\pi \ , \ z \in \mathbb{Z}\right\}$$

S es el conjunto solución de sen (x) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$

Si graficamos sen (x) y la recta horizontal y = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ se ven estas soluciones

```
Plot[{Sin[x], √2/2}, {x, -6 π, 6 π}, PlotRange → {{-6 π, 6 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· seno rango de representación cociente de aspecto



Ej 15 c) Las soluciones de $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **pertenecen a todo** $\mathbb{R}$

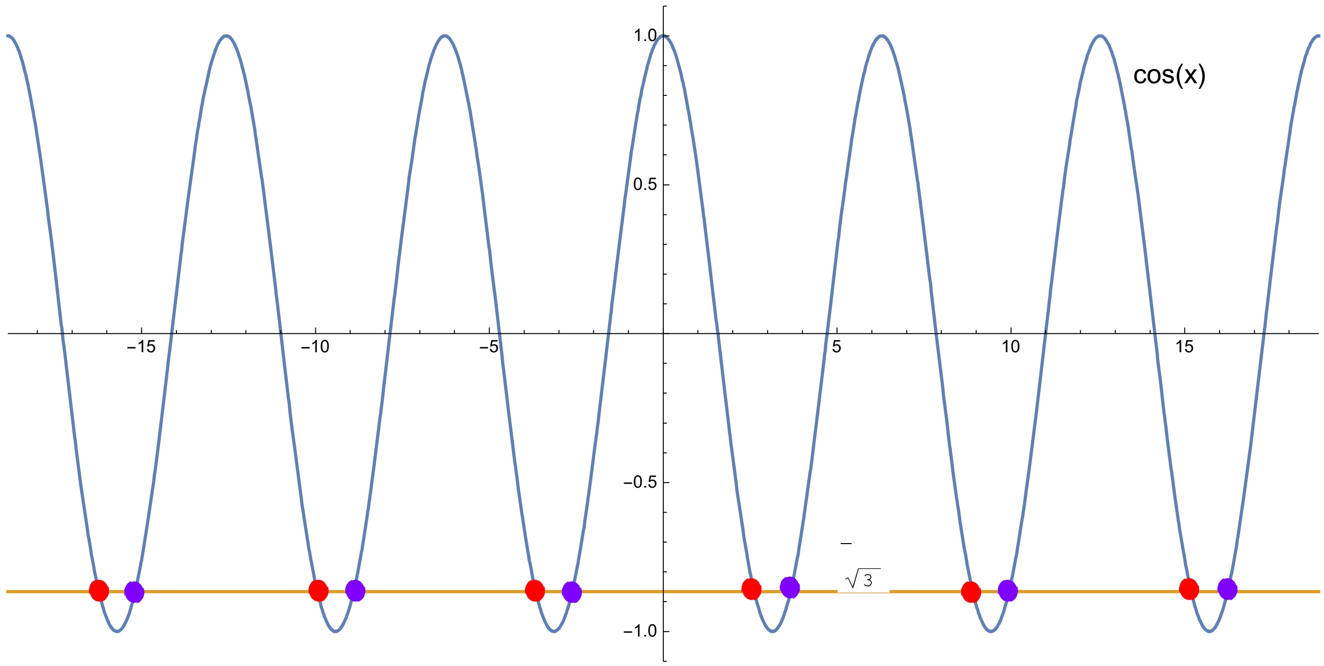
Ya resuelto en el Ej 14 c)

$$S = S_1 \bigcup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{7}{6}\pi + z \cdot 2\pi, \ z \in \mathbb{Z}\right\}$$

S es el conjunto solución de $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Si graficamos cos (x) y la recta horizontal $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **se ven estas soluciones**

```
Plot[{Cos[x], -√3/2}, {x, -6 π, 6 π}, PlotRange → {{-6 π, 6 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· coseno rango de representación cociente de aspecto



Ej 15 d) Las soluciones de cos (x) = -1 pertenecen a todo ℝ

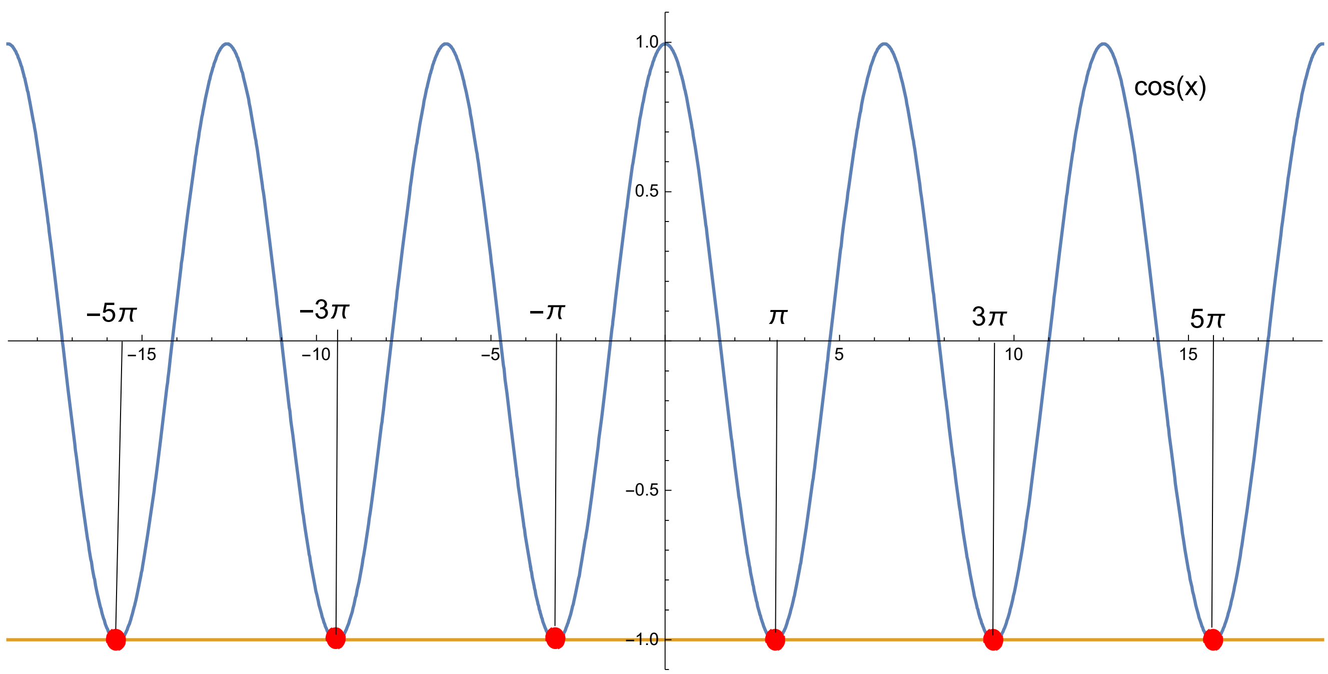
Ya resuelto en el Ej 14 d)

S = {x ∈ ℝ : x = (2 k + 1) π , k ∈ ℤ}

S es el conjunto solución de cos (x) = -1 ∀ x ∈ ℝ

Si graficamos cos (x) y la recta horizontal y = -1 se ven estas soluciones

```
Plot[{Cos[x], -1}, {x, -6 π, 6 π}, PlotRange → {{-6 π, 6 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· coseno rango de representación cociente de aspecto



++

Ejercicio 16.- Resolver.

a. $\operatorname{sen}(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ en $\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$

b. $\operatorname{sen}(x)+\frac{1}{2}=0$ en $[2\pi;5\pi]$

c. $\cos(x)-\frac{1}{2}=0$ en $[-\pi;2\pi]$

d. $\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ en $\left[\frac{\pi}{2};3\pi\right]$

Ej 16 a) Encontrar las soluciones de sen (x) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ que pertenecen a $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi\right]$

De acuerdo a la tabla de valores de seno y coseno para arcos entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

	0º	30º	45º	60º	90º
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen(t)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos(t)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

vemos que el arco t = $\frac{\pi}{3}$ tiene un valor de sen (t) igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Como seno es positivo en el 1 er y 2 do cuadrante, existen dos familias

de soluciones :

una generada por t = $\frac{\pi}{3}$ y la otra en el 2 do cuadrante

generada por t = $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

Estos son :

El primer conjunto se escribe así :

S_1 : $\quad x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z}$

El segundo conjunto se escribe así :

S_2 : $\quad x_2 = \frac{2}{3}\pi + z \cdot 2\pi \ , \quad z \in \mathbb{Z}$

Entonces el conjunto S solución de la ecuación sen (x) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ para x ∈ ℝ es :

$S = S_1 \bigcup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \;,\; k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2}{3}\pi + z \cdot 2\pi \;,\; z \in \mathbb{Z}\right\}$

Sin embargo, como en el ejercio nos piden encontrar sólo las soluciones de

seno

sen $(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **para** $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi\right]$ **, veamos cuáles soluciones están en** $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi\right]$

Primero tomamos valores enteros de k y vamos reemplazando en $x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$

si $k = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 0 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}$ $(60°)$ **NO es una de ellas pues** $\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$ **y no pertenece a** $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi\right]$

si $k = 1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 1 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7}{3}\pi$ $(320°)$ **es una de ellas pues** $\in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi\right]$ $([90°, 450°])$

si $k = 2 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13}{3}\pi$ $(780°)$ **NO es una de ellas pues** $\frac{13}{3}\pi > \frac{5}{2}\pi$

si $k = -1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{3} + (-1) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5}{3}\pi$ $(-300°)$ **NO es una de ellas pues** $-\frac{5}{3}\pi < \frac{\pi}{2}$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{\pi}{3}$ **sólo** $\frac{7}{3}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi\right]$

$S_1 = \left\{\frac{7}{3}\pi\right\}$

Veamos ahora cuáles de las soluciones generadas por $\frac{2}{3}\pi$ **pertenecen a** $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi\right]$

tomamos valores enteros de z y vamos reemplazando en $x = \frac{2}{3}\pi + z \cdot 2\pi$

si $z = 0 \Longrightarrow x = \frac{2}{3}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi$ $(120°)$ **es una de ellas pues** $\in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi\right]$

si $z = 1 \Longrightarrow x = \frac{2}{3}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi + 2\pi = \frac{8}{3}\pi$ $(480°)$ **NO es una de ellas pues** $\frac{8}{3}\pi > \frac{5}{2}\pi$

si $z = -1 \Longrightarrow x = \frac{2}{3}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi - 2\pi = -\frac{4}{3}\pi$ **NO es una de ellas pues** $-\frac{4}{3}\pi < \frac{\pi}{2}$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{2}{3}\pi$ **sólo** $\frac{2}{3}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi\right]$

$S_2 = \left\{\frac{2}{3}\pi\right\}$

Finalmente las soluciones de sen $(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **para** $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi\right]$ **son**

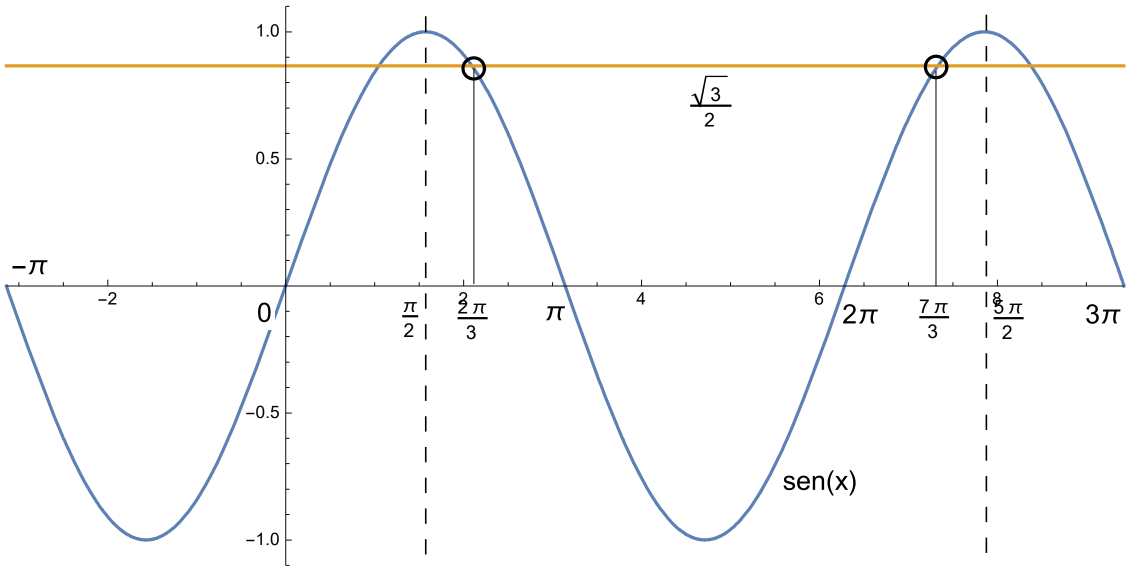
$S = S_1 \bigcup S_2 = S_1 = \left\{\frac{7}{3}\pi\right\} \bigcup \left\{\frac{2}{3}\pi\right\} \Longrightarrow$

$$S = \left\{\frac{2}{3}\pi, \frac{7}{3}\pi\right\}$$

S es el conjunto solución de $\text{sen}(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \forall x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5}{2}\pi\right]$

Si graficamos sen (x) y la recta horizontal $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **se verifican estas soluciones**

```
Plot[{Sin[x], √3/2}, {x, -π, 3 π}, PlotRange → {{-π, 3 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· seno rango de representación cociente de aspecto



Ej 16 b) Encontrar las soluciones de $\text{sen}(x) + \dfrac{1}{2} = 0$ **que pertenecen a** $[2\pi, 5\pi]$

$\text{sen}(x) + \dfrac{1}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{sen}(x) = -\dfrac{1}{2}$

De acuerdo a la tabla de valores de seno y coseno para arcos entre $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

el arco que tiene el mismo valor en módulo es $\hat{t} = \dfrac{\pi}{6}$

Como la ecuación nos pide $\text{sen}(x) = -\dfrac{1}{2}$ **negativo los arcos con seno negativo**

serán del 3 er y 4 to cuadrante, es decir :

$t_1 = \pi + \hat{t} = \pi + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7}{6}\pi$ **y**

$t_2 = 2\pi - \hat{t} = 2\pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{11}{6}\pi$

Estos arcos $t_1 = \dfrac{7}{6}\pi$ **y** $t_2 = \dfrac{11}{6}\pi$ **son los generadores de los conjuntos infinitos**

de soluciones en todo $\mathbb{R}$

$x_1 = \dfrac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = \frac{11}{6}\pi + z \cdot 2\pi\ ,\ z \in \mathbb{Z}$

El primer conjunto se escribe así :

$S_1 : \quad x_1 = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

El segundo conjunto se escribe así :

$S_2 : \quad x_2 = \frac{11}{6}\pi + z \cdot 2\pi\ ,\ z \in \mathbb{Z}$

Entonces el conjunto S solución de la ecuación $\operatorname{sen}(x) = -\frac{1}{2}$ **para** $x \in \mathbb{R}$ **es :**

$S = S_1 \bigcup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{11}{6}\pi + z \cdot 2\pi\ ,\ z \in \mathbb{Z}\right\}$

Sin embargo, como en el ejercio nos piden encontrar sólo las soluciones de

seno

$\operatorname{sen}(x) = -\frac{1}{2}$ **para** $x \in [2\pi, 5\pi]$ **, veamos cuáles soluciones están en** $[2\pi, 5\pi]$ $([360°, 900°])$

Primero tomamos valores enteros de k y vamos reemplazando en $x = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

si k =

$0 \Longrightarrow x = \frac{7}{6}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{7}{6}\pi$ $(210°)$ **NO es una de ellas pues** $\frac{7}{6}\pi < 2\pi$ **y no pertenece a** $[2\pi, 5\pi]$

si k =

$1 \Longrightarrow x = \frac{7}{6}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{7}{6}\pi + 2\pi = \frac{19}{6}\pi$ $(570°)$ **es una de ellas pues** $\in [2\pi, 5\pi]$ $([360°, 900°])$

si k = 2 $\Longrightarrow x = \frac{7}{6}\pi + 2 \cdot 2\pi = \frac{7}{6}\pi + 4\pi = \frac{31}{6}\pi$ $(930°)$ **NO es una de ellas pues** $\frac{31}{6}\pi > 5\pi$

si k = -1 $\Longrightarrow x = \frac{7}{6}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{7}{6}\pi - 2\pi = -\frac{5}{6}\pi$ $(-150°)$ **NO es una de ellas pues** $-\frac{5}{6}\pi < 2\pi$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{7}{6}\pi$ **tenemos la solución :**

$\frac{19}{6}\pi \in [2\pi, 5\pi]$

$S_1 = \left\{\frac{19}{6}\pi\right\}$

Veamos ahora cuáles de las soluciones generadas por $\frac{11}{6}\pi$ **pertenecen a** $[2\pi, 5\pi]$ $([360°, 900°])$

tomamos valores enteros de z y vamos reemplazando en $x = \frac{11}{6}\pi + z \cdot 2\pi$

si z = 0 $\Longrightarrow x = \frac{11}{6}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{11}{6}\pi$ **NO es una de ellas pues** $\frac{11}{6}\pi < 2\pi$

si $z = 1 \implies x = \frac{11}{6}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{11}{6}\pi + 2\pi = \frac{23}{6}\pi$ $(690°)$ es una de ellas pues $\in [2\pi, 5\pi]$

si $z = 2 \implies x = \frac{11}{6}\pi + 2 \cdot 2\pi = \frac{11}{6}\pi + 4\pi = \frac{35}{6}\pi$ $(1050°)$ NO es una de ellas pues $\frac{35}{6}\pi > 5\pi$

si $z = -1 \implies x = \frac{11}{6}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{11}{6}\pi - 2\pi = -\frac{1}{6}\pi$ $(-30°)$ NO es una de ellas pues $-\frac{1}{6}\pi < 2\pi$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{11}{6}\pi$ tenemos la solución :

$\frac{23}{6}\pi \in [2\pi, 5\pi]$

$S_2 = \left\{\frac{23}{6}\pi\right\}$

Finalmente las soluciones de sen $(x) = -\frac{1}{2}$ para $x \in [2\pi, 5\pi]$ son

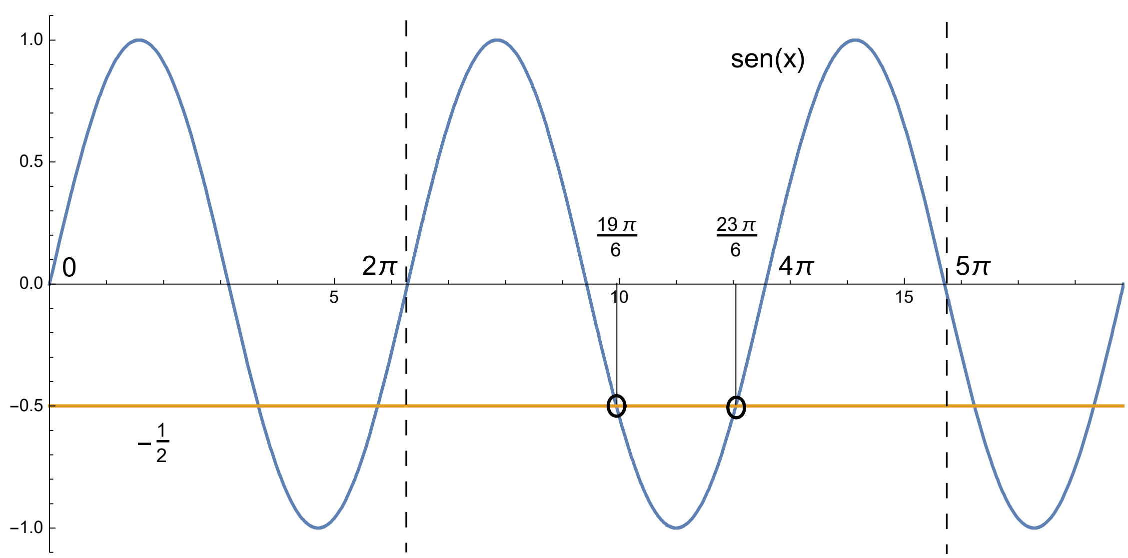
$S = S_1 \bigcup S_2 = S_1 = \left\{\frac{19}{6}\pi\right\} \bigcup \left\{\frac{23}{6}\pi\right\} \implies$

$$S = \left\{\frac{19}{6}\pi, \frac{23}{6}\pi\right\}$$

S es el conjunto solución de sen $(x) = -\frac{1}{2}$ $\forall x \in [2\pi, 5\pi]$

Si graficamos sen (x) y la recta horizontal $y = -\frac{1}{2}$ se verifican estas soluciones

```
Plot[{Sin[x], -1/2}, {x, 0, 6 π}, PlotRange → {{0, 6 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· seno rango de representación cociente de aspecto



Ej 16 c) Encontrar las soluciones de cos $(x) - \frac{1}{2} = 0$ que pertenecen a $[-\pi, 2\pi]$

cos $(x) - \frac{1}{2} = 0 \implies$ cos $(x) = \frac{1}{2}$

De acuerdo a la tabla de valores de seno y coseno para arcos entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

el arco que tiene el mismo valor en módulo es $\hat{t} = \frac{\pi}{3}$

Como la ecuación nos pide $\cos(x) = \frac{1}{2}$ positivo los arcos con coseno positivo

serán del 1 er y 4 to cuadrante, es decir :

$t_1 = \hat{t} = \frac{\pi}{3}$ y

$t_2 = 2\pi - \hat{t} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$

Estos arcos $t_1 = \frac{\pi}{3}$ y $t_2 = \frac{5}{3}\pi$ son los generadores de los conjuntos infinitos

de soluciones en todo $\mathbb{R}$

$x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = \frac{5}{3}\pi + z \cdot 2\pi, \quad z \in \mathbb{Z}$

El primer conjunto se escribe así :

$S_1: \quad x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

El segundo conjunto se escribe así :

$S_2: \quad x_2 = \frac{5}{3}\pi + z \cdot 2\pi, \quad z \in \mathbb{Z}$

Entonces el conjunto S solución de la ecuación $\cos(x) = \frac{1}{2}$ para $x \in \mathbb{R}$ es :

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5}{3}\pi + z \cdot 2\pi, \; z \in \mathbb{Z}\right\}$

Sin embargo, como en el ejercio nos piden encontrar sólo las soluciones de

seno

$\cos(x) = \frac{1}{2}$ para $x \in [-\pi, 2\pi]$, veamos cuáles soluciones están en $[-\pi, 2\pi]$ $\left(\left[-180°, 360°\right]\right)$

Primero tomamos valores enteros de k y vamos reemplazando en $x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$

si $k = 0 \implies x = \frac{\pi}{3} + 0 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}$ $(60°)$ es una de ellas pues $\in [-\pi, 2\pi]$ $\left(\left[-180°, 360°\right]\right)$

si $k = 1 \implies x = \frac{\pi}{3} + 1 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7}{3}\pi$ $(420°)$ NO es una de ellas pues $\frac{7}{3}\pi > 2\pi$

si $k = -1 \implies x = \frac{\pi}{3} + (-1) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5}{3}\pi$ $(-300°)$ NO es una de ellas pues $-\frac{5}{3}\pi < -\pi$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{\pi}{3}$ tenemos la solución :

$\frac{\pi}{3} \in [-\pi, 2\pi]$

$S_1 = \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$

Veamos ahora cuáles de las soluciones generadas por $\frac{5}{3}\pi$ **pertenecen a** $[-\pi, 2\pi]$ $\left([-180°, 360°]\right)$

tomamos valores enteros de z y vamos reemplazando en $x = \frac{11}{6}\pi + z \cdot 2\pi$

si $z = 0 \implies x = \frac{5}{3}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{5}{3}\pi$ $(300°)$ **es una de ellas pues** $\frac{5}{3}\pi \in [-\pi, 2\pi]$

si $z = 1 \implies x = \frac{5}{3}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{5}{3}\pi + 2\pi = \frac{11}{3}\pi$ $(660°)$ **NO es una de ellas pues** $\frac{11}{3}\pi > 2\pi$

si $z = -1 \implies x = \frac{5}{3}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{5}{3}\pi - 2\pi = -\frac{\pi}{3}$ $(-60°)$ **es una de ellas pues** $-\frac{\pi}{3} \in [-\pi, 2\pi]$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{11}{6}\pi$ **tenemos las soluciones :**

$\frac{5}{3}\pi$ **y** $-\frac{\pi}{3} \in [-\pi, 2\pi]$

$S_2 = \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right\}$

Finalmente las soluciones de $\cos(x) = \frac{1}{2}$ **para** $x \in [-\pi, 2\pi]$ **son**

$S = S_1 \bigcup S_2 = S_1 = \left\{\frac{\pi}{3}\right\} \bigcup \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right\} \implies$

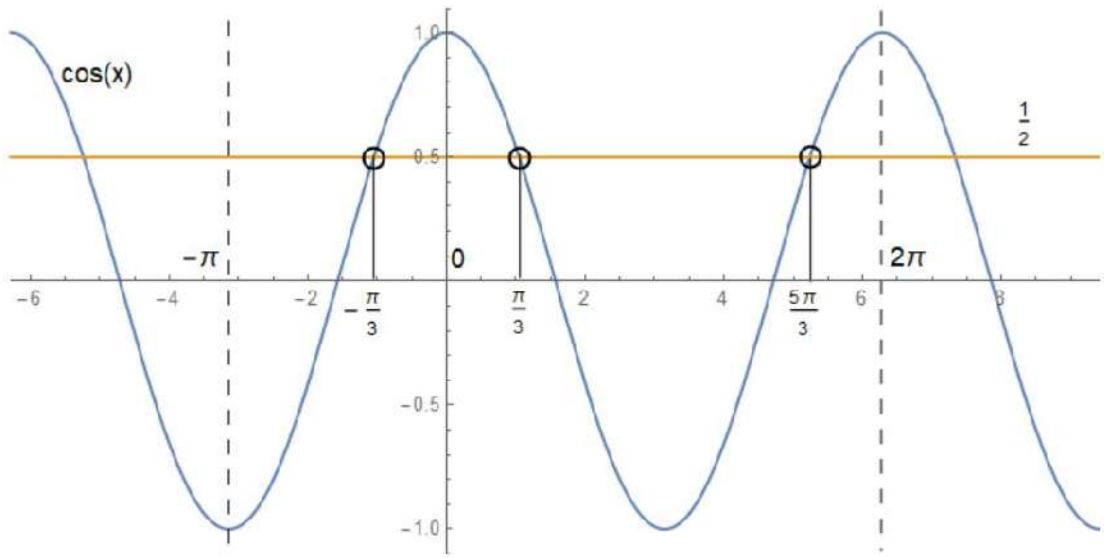
$$S = \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right\}$$

S es el conjunto solución de $\cos(x) = \frac{1}{2}$ $\forall x \in [-\pi, 2\pi]$

Si graficamos $\cos(x)$ **y la recta horizontal** $y = \frac{1}{2}$ **se verifican estas soluciones**

```
Plot[{Cos[x], 1/2}, {x, -2 π, 3 π}, PlotRange → {{-2 π, 3 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

repre⋯ coseno rango de representación cociente de aspecto



Ej 16 d) Encontrar las soluciones de $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ que pertenecen a $\left[\frac{\pi}{2}, 3\pi\right]$

De acuerdo a la tabla de valores de seno y coseno para arcos entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

el arco que tiene el mismo valor en módulo es $\hat{t} = \frac{\pi}{4}$

Como la ecuación nos pide $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ positivo los arcos con coseno positivo

serán del 1 er y 4 to cuadrante, es decir :

$t_1 = \hat{t} = \frac{\pi}{4}$ **y**

$t_2 = 2\pi - \hat{t} = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$

Estos arcos $t_1 = \frac{\pi}{4}$ y $t_2 = \frac{7}{4}\pi$ son los generadores de los conjuntos infinitos

de soluciones en todo $\mathbb{R}$

$x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = \frac{7}{4}\pi + z \cdot 2\pi \ , \ z \in \mathbb{Z}$

El primer conjunto se escribe así :

$S_1 : \quad x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

El segundo conjunto se escribe así :

$S_2 : \quad x_2 = \frac{7}{4}\pi + z \cdot 2\pi \ , \ z \in \mathbb{Z}$

Entonces el conjunto S solución de la ecuación $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ para $x \in \mathbb{R}$ es :

$$S = S_1 \bigcup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{7}{4}\pi + z \cdot 2\pi \ , \ z \in \mathbb{Z}\right\}$$

Sin embargo, como en el ejercio nos piden encontrar sólo las soluciones de

seno

$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ para $x \in \left[\frac{\pi}{2}, 3\pi\right]$,

veamos cuáles soluciones están en $\left[\frac{\pi}{2}, 3\pi\right]$ $([90°, 540°])$

Primero tomamos valores enteros de k y vamos reemplazando en $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$

si $k = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 0 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}$ $(45°)$ NO es una de ellas pues $\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

si $k = 1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 1 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9}{4}\pi$ $(405°)$ es una de ellas pues $\frac{9}{4}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, 3\pi\right]$ $([90°, 540°])$

si $k = 2 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{17}{4}\pi$ $(765°)$ NO es una de ellas pues $\frac{17}{4}\pi > 3\pi$

si $k = -1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + (-1) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7}{4}\pi$ $(-315°)$ NO es una de ellas pues $-\frac{7}{4}\pi < \frac{\pi}{2}$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{\pi}{4}$ tenemos la solución :

$\frac{9}{4}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, 3\pi\right]$

$S_1 = \left\{\frac{9}{4}\pi\right\}$

Veamos ahora cuáles de las soluciones generadas por $\frac{7}{4}\pi$ pertenecen a $\left[\frac{\pi}{2}, 3\pi\right]$ $([90°, 540°])$

tomamos valores enteros de z y vamos reemplazando en $x = \frac{7}{4}\pi + z \cdot 2\pi$

si $z = 0 \Longrightarrow x = \frac{7}{4}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{7}{4}\pi$ $(315°)$ es una de ellas pues $\frac{7}{4}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, 3\pi\right]$

si $z = 1 \Longrightarrow x = \frac{7}{4}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{7}{4}\pi + 2\pi = \frac{15}{4}\pi$ $(675°)$ NO es una de ellas pues $\frac{15}{4}\pi > 3\pi$

si $z = -1 \Longrightarrow x = \frac{7}{4}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{7}{4}\pi - 2\pi = -\frac{\pi}{4}$ $(-45°)$ NO es una de ellas pues $-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

Entonces para las soluciones generadas por $\frac{7}{4}\pi$ tenemos la soluoión :

$\frac{7}{4}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, 3\pi\right]$

$S_2 = \left\{\frac{7}{4}\pi\right\}$

Finalmente las soluciones de $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ para $x \in \left[\frac{\pi}{2}, 3\pi\right]$ son

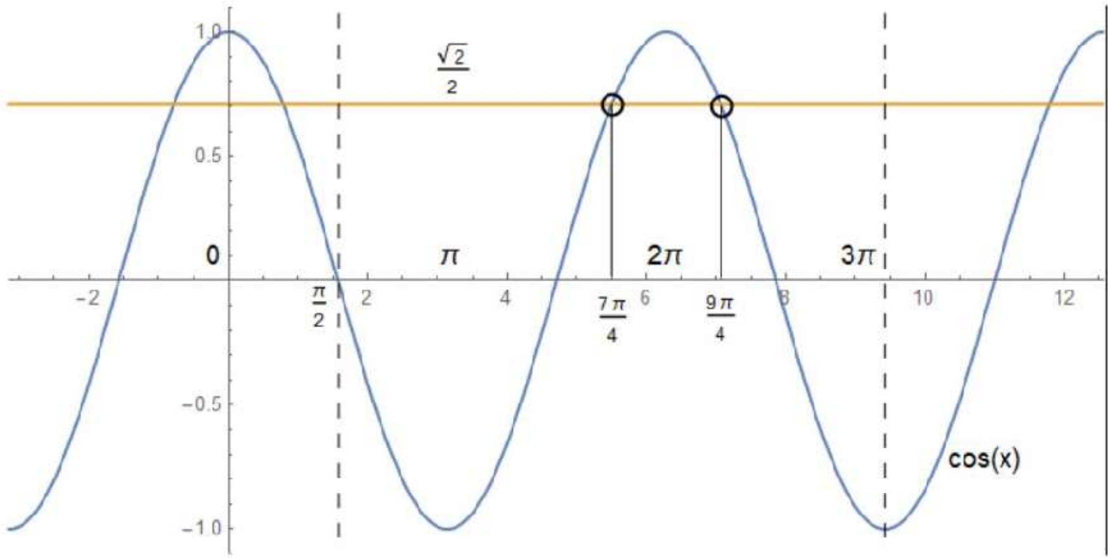
$S = S_1 \cup S_2 = S_1 = \left\{\frac{9}{4}\pi\right\} \cup \left\{\frac{7}{4}\pi\right\} \Longrightarrow$

$$S = \left\{\frac{7}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi\right\}$$

S es el conjunto solución de $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \forall\, x \in \left[\dfrac{\pi}{2},\ 3\pi\right]$

Si graficamos $\cos(x)$ **y la recta horizontal** $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **se verifican estas soluciones**

Plot$\left[\left\{\text{Cos}[x],\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\},\ \{x, -\pi, 4\pi\},\ \text{PlotRange} \to \{\{-\pi, 4\pi\}, \{-1.1, 1.1\}\},\ \text{AspectRatio} \to 0.5\right]$
repre··· coseno rango de representación cociente de aspecto



++

Ejercicio 17.- Hallar los ceros y los conjuntos de positividad y de negatividad de f.

a. $f(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ en $[-\pi; 5\pi]$

b. $f(x) = \text{sen}(2x) + 1$ en $[-\pi; 5\pi]$

c. $f(x) = 2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) - 1$ en $[-\pi; 3\pi]$

d. $f(x) = 2\,\text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 1$ en $[0; 3\pi]$

e. $f(x) = 2\,\text{sen}^2(x) - \text{sen}(x)$ en $[-\pi; \pi]$

f. $f(x) = \left(\dfrac{1}{2} + \text{sen}(x)\right)\cos(x)$ en $[-\pi; \pi]$

Ej 17 a) Hallar C^0, C^+ **y** C^- **de** $f(x)$ **en los intervalos indicados**

$$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{en} \quad [-\pi,\ 5\pi]$$

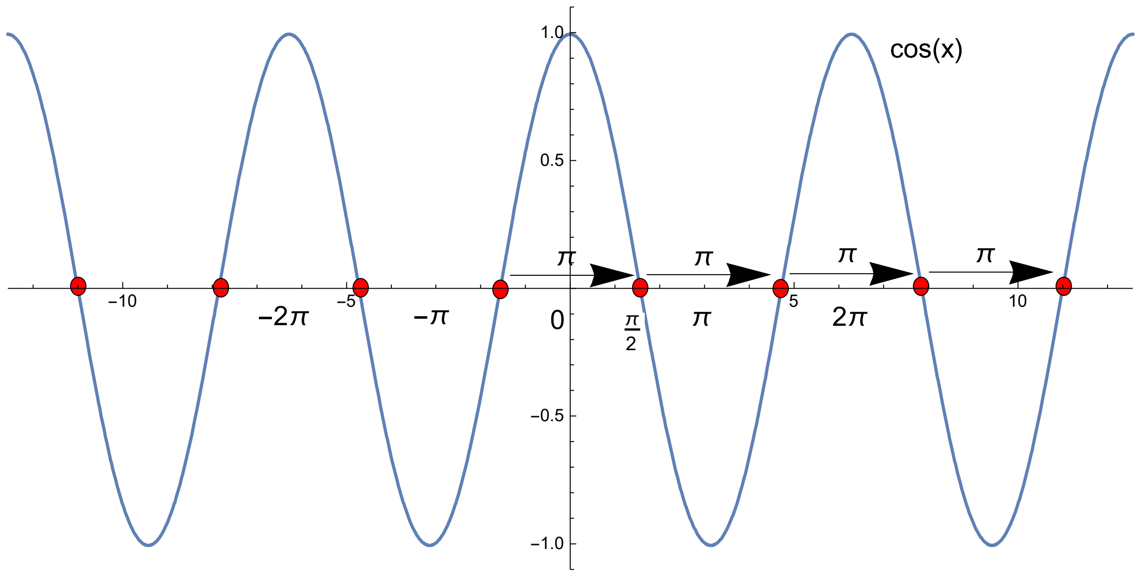
$C^0 = \{x \in \mathrm{Dom}\,(f) : f\,(x) = 0\}$

$f\,(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

Veamos dónde se dan los ceros del coseno

```
Plot[{Cos[x]}, {x, -4 π, 4 π}, PlotRange → {{-4 π, 4 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

repre··· coseno rango de representación cociente de aspecto



Observemos que los ceros se dan en $\frac{\pi}{2}$ más un múltiplo entero de π, es decir :

$$x_0 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Pero como tenemos $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, los ceros de esta función se darán cuando :

$$\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Despejamos x :

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi = \frac{(2-1)\,\pi}{4} + k \cdot \pi = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Entonces el conjunto de ceros de $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ es :

$$C^0 = \{x \in \mathrm{Dom}\,(f) : f\,(x) = 0\} = \left\{x \in \mathrm{Dom}\,(f) : x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Como nos piden sólo los ceros que pertenecen a $[-\pi, 5\pi]$

iremos tomando valores de k y chequeando que pertenezcan a $[-\pi, 5\pi]$ $([-180°, 900°])$

Si $k = 0 \Longrightarrow x_0 = \frac{\pi}{4} + 0 \cdot \pi = \frac{\pi}{4}$ $\quad (45°) \quad$ sí $\in [-\pi, 5\pi]$

Si $k = 1 \Longrightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + 1 \cdot \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5}{4}\pi$ $\quad (225°) \quad$ sí $\in [-\pi, 5\pi]$

Si $k = 2 \Longrightarrow x_2 = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \pi = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9}{4}\pi$ $\quad (405°) \quad$ sí $\in [-\pi, 5\pi]$

Si $k = 3 \implies x_3 = \frac{\pi}{4} + 3 \cdot \pi = \frac{\pi}{4} + 3\pi = \frac{13}{4}\pi$ $(585°)$ sí $\in [-\pi, 5\pi]$

Si $k = 4 \implies x_4 = \frac{\pi}{4} + 4 \cdot \pi = \frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{17}{4}\pi$ $(765°)$ sí $\in [-\pi, 5\pi]$

Si $k = 5 \implies x_5 = \frac{\pi}{4} + 5 \cdot \pi = \frac{\pi}{4} + 5\pi = \frac{21}{4}\pi$ $(945°)$ no $\in [-\pi, 5\pi]$

Ahora con k < 0

Si $k = -1 \implies x_{-1} = \frac{\pi}{4} + (-1) \cdot \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi$ $(-135°)$ sí $\in [-\pi, 5\pi]$

Si $k = -2 \implies x_{-2} = \frac{\pi}{4} + (-2) \cdot \pi = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7}{4}\pi$ $(-315°)$ no $\in [-\pi, 5\pi]$

por lo tanto,

$$C^0 = \{x \in [-\pi, 5\pi] : f(x) = 0\} = \left\{-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \frac{13}{4}\pi, \frac{17}{4}\pi\right\}$$

----

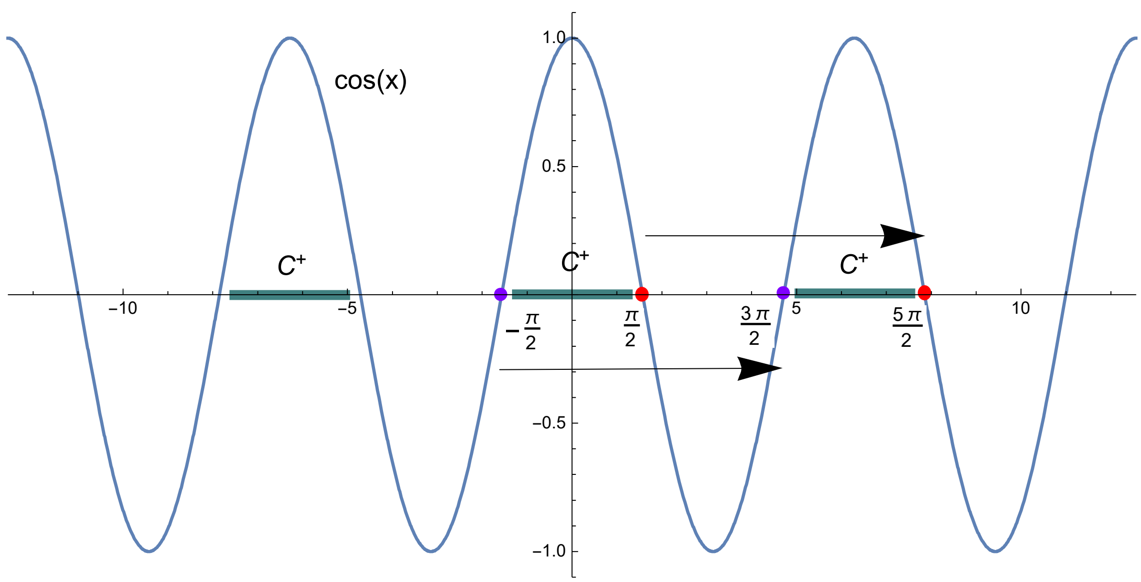
para hallar el C^+ de $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ en $[-\pi, 5\pi]$ $([-180°, 900°])$

$C^+ = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) > 0\}$

$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$

Analisis auxiliar : el C^+ del coseno

```
Plot[{Cos[x]}, {x, -4 π, 4 π}, PlotRange → {{-4 π, 4 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· coseno rango de representación cociente de aspecto



Del gráfico se puede ver que el extremo izquierdo del intervalo de positividad
del
del coseno entre $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se repite en un salto de 2π

Lo mismo le sucede al extremo derecho de dicho intervalo

Entonces $-\frac{\pi}{2}$ genera los extremos izquierdos de los intervalos de positividad

$$x_{\text{izquierdo}} = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

mientras que $\frac{\pi}{2}$ genera los extremos derechos de los intervalos de positividad

$$x_{\text{derecho}} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Es decir :

C^+ del cos (x) está formado por la unión de los intervalos :

$$C^+ = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right)$$

Ahora bien, como en realidad tenemos el coseno desplazado en $\frac{\pi}{4}$ para la izquierda

para $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ los extremos de los intervalos de positividad serán :

(pedimos que lo que está dentro del argumento satisfaga los extremos del coseno, visto antes)

$$\left(x_{\text{izquierdo}} + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \implies x_{\text{izquierdo}} = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi = \frac{(-2-1)\pi}{4} + k \cdot 2\pi = -\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$\left(x_{\text{derecho}} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \implies x_{\text{derecho}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi = \frac{(2-1)\pi}{4} + k \cdot 2\pi = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

Entonces el C^+ de $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ será :

$$C^+ = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi, \ \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi\right)$$

Veamos cuáles de éstos pertenecen a $[-\pi, 5\pi]$ ([-180°, 900°])

si k = 0 $\implies \left(-\frac{3}{4}\pi + 0 \cdot 2\pi, \frac{1}{4}\pi + 0 \cdot 2\pi\right) = \left(-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi\right)$ ([-135°, 45°]) sí

si k = 1 $\implies \left(-\frac{3}{4}\pi + 1 \cdot 2\pi, \frac{1}{4}\pi + 1 \cdot 2\pi\right) = \left(-\frac{3}{4}\pi + 2\pi, \frac{1}{4}\pi + 2\pi\right) =$

$= \left(\frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi\right)$ ([225°, 405°]) sí

si k = 2 $\implies \left(-\frac{3}{4}\pi + 2 \cdot 2\pi, \frac{1}{4}\pi + 2 \cdot 2\pi\right) = \left(-\frac{3}{4}\pi + 4\pi, \frac{1}{4}\pi + 4\pi\right) =$

$= \left(\frac{13}{4}\pi, \frac{17}{4}\pi\right)$ ([585°, 765°]) sí

si k = 3 $\implies \left(-\frac{3}{4}\pi + 3 \cdot 2\pi, \frac{1}{4}\pi + 3 \cdot 2\pi\right) = \left(-\frac{3}{4}\pi + 6\pi, \frac{1}{4}\pi + 6\pi\right) =$

$= \left(\frac{21}{4}\pi, \frac{25}{4}\pi\right)$ ([945°, 1125°]) no

Ahora veamos con k < 0

si $k = -1 \implies \left(-\frac{3}{4}\pi + (-1)\cdot 2\pi,\ \frac{1}{4}\pi + (-1)\cdot 2\pi\right) = \left(-\frac{3}{4}\pi - 2\pi,\ \frac{1}{4}\pi - 2\pi\right) =$

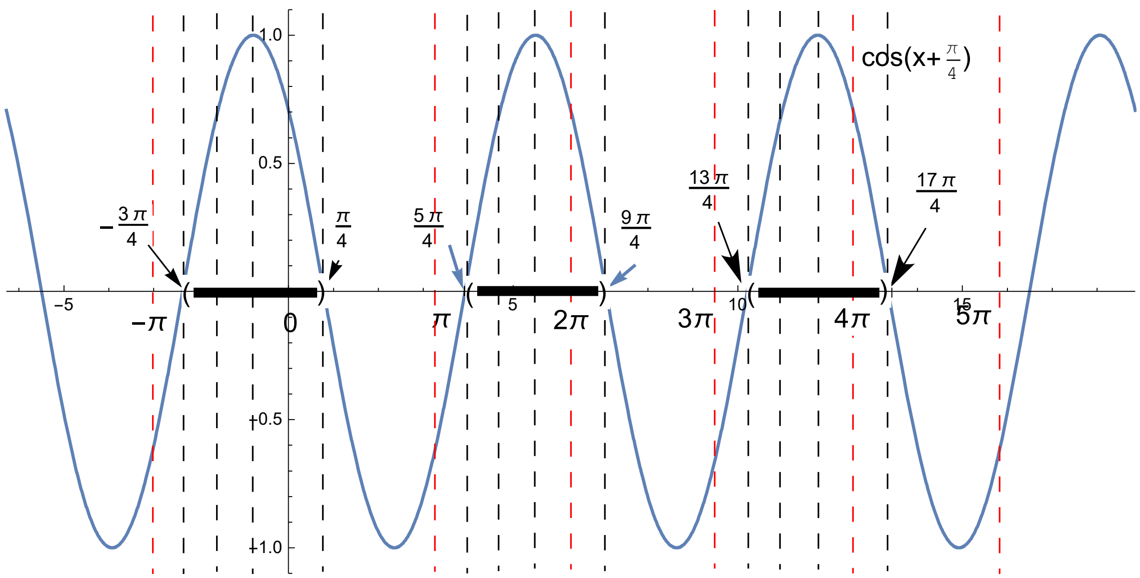
$= \left(-\frac{11}{4}\pi,\ -\frac{7}{4}\pi\right)$ $([-495°, -315°])$ no

Finalmente el C^+ de $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ para $x \in [-\pi, 5\pi]$ es :

$$C^+ = \left(-\frac{3}{4}\pi,\ \frac{1}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{5}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{13}{4}\pi,\ \frac{17}{4}\pi\right)$$

Veamos el gráfico de $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

```
Plot[{Cos[x + π/4]}, {x, -2 π, 6 π}, PlotRange → {{-2 π, 6 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· coseno rango de representación cociente de aspecto



----

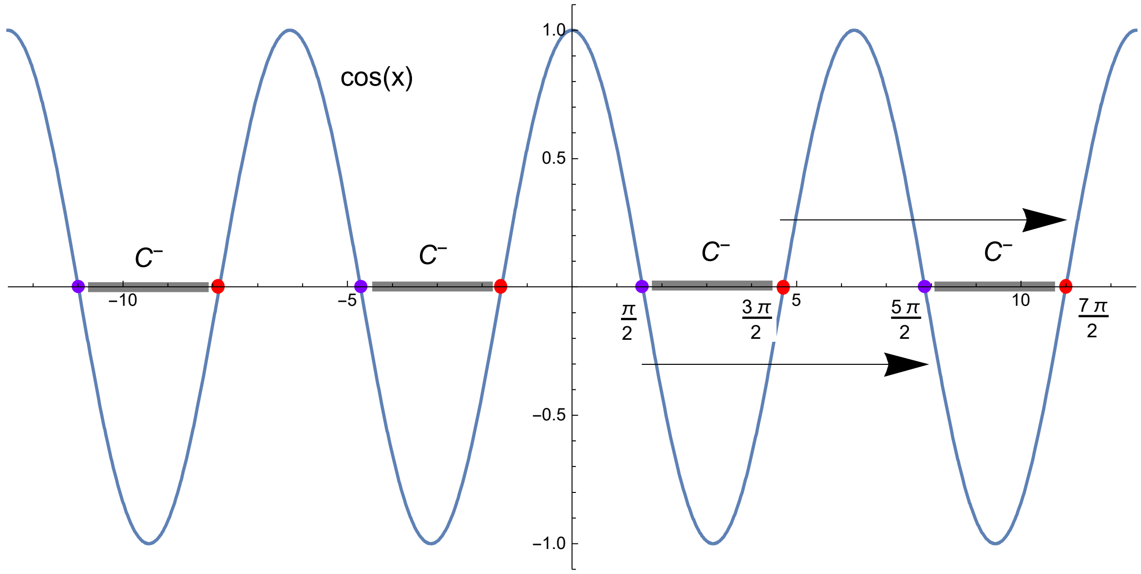
para hallar el C^- de $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ en $[-\pi, 5\pi]$ $([-180°, 900°])$

$C^- = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) < 0\}$

$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0$

Analisis auxiliar : el C^- del coseno

```
Plot[{Cos[x]}, {x, -4 π, 4 π}, PlotRange → {{-4 π, 4 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· coseno rango de representación cociente de aspecto



Del gráfico se puede ver que el extremo izquierdo del intervalo de negatividad

del

del coseno entre $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ se repite en un salto de 2π

Lo mismo le sucede al extremo derecho de dicho intervalo

Entonces $\frac{\pi}{2}$ genera los extremos izquierdos de los intervalos de negatividad

$$x_{izquierdo} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

mientras que $\frac{3}{2}\pi$ genera los extremos derechos de los intervalos de negatividad

$$x_{derecho} = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Es decir :

C^- del cos (x) está formado por la unión de los intervalos :

$$C^- = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \ \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi\right)$$

Ahora bien, como en realidad tenemos el coseno desplazado en $\frac{\pi}{4}$ para la izquierda

para $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ los extremos de los intervalos de negatividad serán :

(pedimos que lo que está dentro del argumento satisfaga los extremos del coseno, visto antes)

$$\left(x_{izquierdo} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad x_{izquierdo} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi = \frac{(2-1)\pi}{4} + k \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$\left(x_{derecho} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad x_{derecho} = \frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi = \frac{(6-1)\pi}{4} + k \cdot 2\pi = \frac{5}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

Entonces el C^- de $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ será :

$$C^- = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi,\ \frac{5}{4}\pi + k\cdot 2\pi\right)$$

Veamos cuáles de éstos pertenecen a $[-\pi, 5\pi]$ $\left([-180°, 900°]\right)$

si $k = 0 \implies \left(\frac{\pi}{4} + 0\cdot 2\pi,\ \frac{5}{4}\pi + 0\cdot 2\pi\right) = \left(\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi\right)$ $\quad (45°, 225°)$ sí

si $k = 1 \implies \left(\frac{\pi}{4} + 1\cdot 2\pi,\ \frac{5}{4}\pi + 1\cdot 2\pi\right) = \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi,\ \frac{5}{4}\pi + 2\pi\right) =$

$= \left(\frac{9}{4}\pi,\ \frac{13}{4}\pi\right)$ $\left([405°, 585°]\right)$ sí

si $k = 2 \implies \left(\frac{\pi}{4} + 2\cdot 2\pi,\ \frac{5}{4}\pi + 2\cdot 2\pi\right) = \left(\frac{\pi}{4} + 4\pi,\ \frac{5}{4}\pi + 4\pi\right) =$

$= \left(\frac{17}{4}\pi,\ \frac{21}{4}\pi\right)$ $\left([765°, 945°]\right)$ sí, pero una parte $\left(\frac{17}{4}\pi,\ 5\pi\right]$ porque $\frac{21}{4}\pi > 5\pi$

si $k = 3 \implies \left(\frac{\pi}{4} + 3\cdot 2\pi,\ \frac{5}{4}\pi + 3\cdot 2\pi\right) = \left(\frac{\pi}{4} + 6\pi,\ \frac{5}{4}\pi + 6\pi\right) =$

$= \left(\frac{25}{4}\pi,\ \frac{29}{4}\pi\right)$ $\left([1125°, 1305°]\right)$ no

Ahora veamos con $k < 0$

si $k = -1 \implies \left(\frac{\pi}{4} + (-1)\cdot 2\pi,\ \frac{5}{4}\pi + (-1)\cdot 2\pi\right) = \left(\frac{\pi}{4} - 2\pi,\ \frac{5}{4}\pi - 2\pi\right) =$

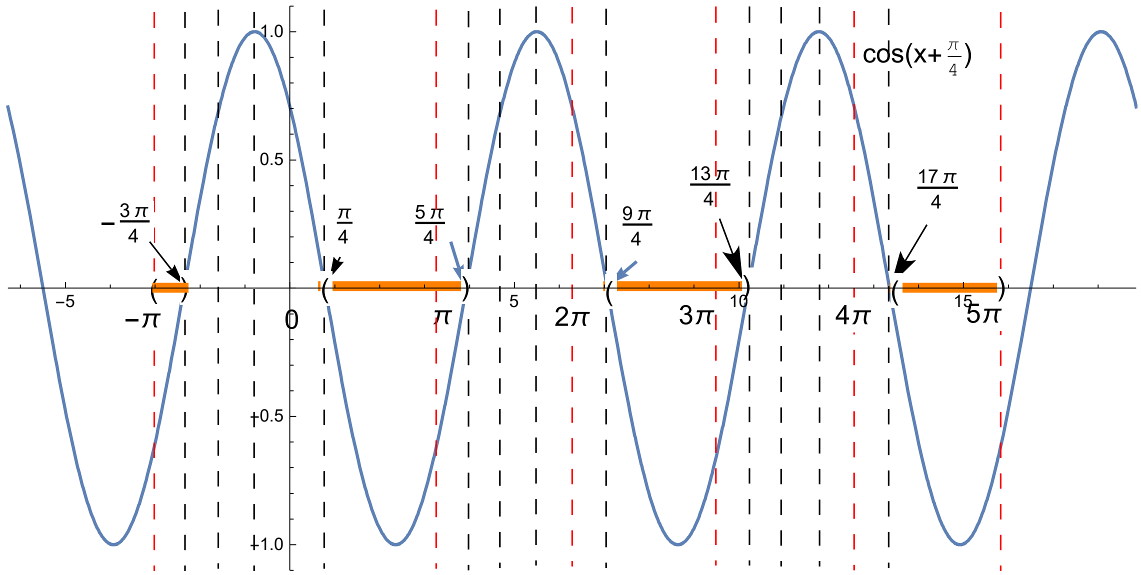
$= \left(-\frac{7}{4}\pi,\ -\frac{3}{4}\pi\right)$ $\left([-315°, -135°]\right)$ sí, pero una parte $\left(-\pi,\ -\frac{3}{4}\pi\right]$ porque $-\frac{7}{4}\pi < -\pi$

Finalmente el C^- de $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ para $x \in [-\pi, 5\pi]$ es :

$$C^- = \left(-\pi,\ -\frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{9}{4}\pi,\ \frac{13}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{17}{4}\pi,\ 5\pi\right)$$

Veamos el gráfico de $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

```
Plot[{Cos[x + π/4]}, {x, -2 π, 6 π}, PlotRange → {{-2 π, 6 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· coseno rango de representación cociente de aspecto



Conclusión :

Para obtener el C^0 , C^+ , C^- de cualquier función del tipo sen $(\mathcal{H})$ ó de cos $(\mathcal{H})$

del tipo sen $(\mathcal{H})$ ó del tipo cos $(\mathcal{H})$ con $\mathcal{H} = \pm ax \pm b$

teniendo calculados el C^0 , C^+ , C^- de sen (x) ó de cos (x)

reemplazamos los x por $\pm ax \pm b$ y despejamos x

y alli salen el C^0 , C^+ , C^- de sen $(\mathcal{H})$ ó de cos $(\mathcal{H})$

MACHETE PARA ESTUDIAR :

C^0 Conjunto de ceros del sen (x)

Observando el gráfico del sen (x) observamos un conjunto infinito de ceros marcados con color negro que se repiten cada medio período (cada π) y éstos son :

$C^0 = \{ \ldots, -4\pi, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots \}$

El conjunto infinito de ceros se escriben utilizando los números enteros así :

$$x_0 = 0 + k\pi = k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z}$$

(si k = -3, x = -3 π o si k = 10 , x = 10 π son ceros de sen (x))

C^0 del sen (x) = $\{x \in \mathbb{R} : x = k \cdot \pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$

C^+ Conjunto de Positividad del sen (x)

Asimismo, el gráfico del sen (x) nos permite escribir el conjunto de positividad como unión infinita de intervalos

$C^+ = \ldots \cup (-4\pi, -3\pi) \cup (-2\pi, -\pi) \cup (0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup (4\pi, 5\pi) \cup \ldots$

los extremos izquierdos de los intervalos se repiten cada 2 π
Idem los extremos derechos

extremos izquierdos de los intervalos → $k \cdot 2\pi = 2k\pi$

extremos derechos de los intervalos → $k \cdot 2\pi + \pi = (2k+1)\pi$

$$C^{+} \text{ del sen }(x) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(2k\pi,\ (2k+1)\pi\right)$$

(por ej. si $k = -2$, el intervalo $(2 \cdot (-2)\pi,\ (2(-2)+1)\pi) = (-4\pi, -3\pi)$

pertenece al C^{+} del sen (x))

C^{-} Conjunto de Negatividad del sen (x)

De manera similar, el gráfico del sen (x) nos permite escribir el conjunto de negatividad como unión infinita de intervalos

$C^{-} = \ldots \cup (-3\pi, -2\pi) \cup (-\pi, 0) \cup (\pi, 2\pi) \cup (3\pi, 4\pi) \cup (5\pi, 6\pi) \cup \ldots$

los extremos izquierdos de los intervalos se repiten cada 2π
Idem los extremos derechos

extremos izquierdos de los intervalos → $\pi + k \cdot 2\pi = (2k+1)\pi$

extremos derechos de los intervalos → $2\pi + k \cdot 2\pi = (2k+2)\pi$

$$C^{-} \text{ del sen }(x) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left((2k+1)\pi,\ (2k+2)\pi\right)$$

(por ej. si $k = -1$, el intervalo $(2 \cdot (-1)+1)\pi,\ (2(-1)+2)\pi) = (-\pi, 0\pi)$

y si $k = 2$, el intervalo $(2 \cdot 2+1)\pi,\ (2 \cdot 2+2)\pi) = (5\pi, 6\pi)$

pertenecen al C^{-} del sen (x)

Máximos del sen (x)

Además, vemos que sen (x) alcanza el valor máximo de 1 en $x = \frac{\pi}{2}$, resultado que se repite cada un período de 2π y están marcados con color rojo

Este conjunto de máximos del sen (x) se escriben así :

$$x_M = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Máximos del sen }(x) = \left\{x \in \mathbb{R} :\ x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\quad,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

(por ej. si $k = -1$, $x = \frac{\pi}{2} + (-1) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3}{2}\pi$ es un máximo de sen (x)

por ej. si $k = 3$, $x = \frac{\pi}{2} + 3 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} + 6\pi = \frac{13\pi}{2}$ es un máximo de sen (x))

Mínimos del sen (x)

Además, vemos que sen (x) alcanza el valor mínimo de -1 en $x = -\frac{\pi}{2}$, resultado que se repite cada un período de 2π y están marcados con color azulino

Este conjunto de mínimos del sen (x) se escriben así :

$$x_m = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Mínimos del sen (x) $= \left\{ x \in \mathbb{R} : \ x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad , \ k \in \mathbb{Z} \right\}$

$\Big($ **por ej. si** $k = -2, \ x = -\frac{\pi}{2} + (-2) \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{5\pi}{2}$ **es un mínimo de sen (x)**

por ej. si $k = 1, \ x = -\frac{\pi}{2} + 1 \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$ **es un mínimo de sen (x)** $\Big)$

C^0 Conjunto de ceros del cos (x)

Observando el gráfico del cos (x) se aprecia un conjunto infinito de ceros marcados con color negro que se repiten cada medio período (cada π) y éstos son :

$C^0 = \left\{ \ldots, -\frac{7}{2}\pi, -\frac{5}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \ \ldots. \right\}$

El conjunto infinito de ceros se escribe utilizando los números enteros así :

$$x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi = k\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\Big($ **si** $k = -3, \ x = \frac{\pi}{2} - 3\pi = -\frac{5}{2}\pi$ **o si** $k = 3 \ , \ x = \frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7}{2}\pi$ **son ceros de cos (x)** $\Big)$

C^0 **del cos (x)** $= \left\{ x \in \mathbb{R} : \ x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad , \ k \in \mathbb{Z} \right\}$

C^+ Conjunto de Positividad del cos (x)

Asimismo, el gráfico del cos (x) nos permite escribir el conjunto de positividad como unión infinita de intervalos

$C^+ = . \ldots \cup \left(-\frac{9}{2}\pi, -\frac{7}{2}\pi\right) \cup \left(-\frac{5}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi\right) \cup \ldots.$

los extremos izquierdos de los intervalos se repiten cada 2π
Idem los extremos derechos

extremos izquierdos de los intervalos $\to \ -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi = \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi$

extremos derechos de los intervalos $\to \ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi$

$$C^+ \text{ del cos } (x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi, \ \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \right)$$

$\Big($ **por ej. si** $k = -2,$ **el intervalo** $\left(\left(2(-2) - \frac{1}{2}\right)\pi \ , \ \left(2(-2) + \frac{1}{2}\right)\pi \right) = \left(-\frac{9}{2}\pi, -\frac{7}{2}\pi\right)$

pertenece al C^+ del cos (x)$\Big)$

C^- Conjunto de Negatividad del cos (x)

De manera similar, el gráfico del cos (x) nos permite escribir el conjunto de negatividad como unión infinita de intervalos

$C^- = \ldots \cup \left(-\frac{7}{2}\pi, -\frac{5}{2}\pi\right) \cup \left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{9}{2}\pi, \frac{11}{2}\pi\right) \cup \ldots$

los extremos izquierdos de los intervalos se repiten cada 2π
Idem los extremos derechos

extremos izquierdos de los intervalos $\to \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi$

extremos derechos de los intervalos $\to \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi = \left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi$

$$C^- \text{ del } \cos(x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi, \left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi\right)$$

(**por ej. si** $k = -1$, **el intervalo** $\left(\left(2(-1) + \frac{1}{2}\right)\pi, \left(2(-1) + \frac{3}{2}\right)\pi\right) = \left(-\frac{7}{2}\pi, -\frac{5}{2}\pi\right)$

y si $k = 2$, **el intervalo** $\left(\left(2 \cdot 2 + \frac{1}{2}\right)\pi, \left(2 \cdot 2 + \frac{3}{2}\right)\pi\right) = \left(\frac{9}{2}\pi, \frac{11}{2}\pi\right)$

pertenecen al C^- del cos (x)

Máximos del cos (x)

Además, vemos que cos (x) alcanza el valor máximo de 1 en x = 0, resultado que se repite cada un período de 2π y están marcados con color rojo

Este conjunto de máximos del cos (x) se escriben así :

$$x_M = 0 + k \cdot 2\pi = k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Máximos del } \cos(x)) = \{x \in \mathbb{R} : x = k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$$

(**por ej. si** $k = -1$, $x = (-1) \cdot 2\pi = -2\pi$ **es un máximo de cos (x)**

por ej. si $k = 2$, $x = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$ **es un máximo de cos (x)**)

Mínimos del cos (x)

Además, vemos que cos (x) alcanza el valor mínimo de -1 en $x = \pi$, resultado que se repite cada un período de 2π y están marcados con color azulino

Este conjunto de mínimos del cos (x) se escriben así :

$$x_m = \pi + k \cdot 2\pi = (2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Mínimos del cos (x)) = $\{x \in \mathbb{R} : x = (2k+1)\pi \quad , k \in \mathbb{Z}\}$

(por ej. si $k = -2$, $x = (2 \cdot (-2) + 1)\pi = -3\pi$ es un mínimo de cos (x)

por ej. si $k = 1$, $x = (2 \cdot 1 + 1)\pi = 3\pi$ es un mínimo de cos (x))

RESUMEN MACHETE

C^0 del sen (x) = $\{x \in \mathbb{R} : x = k \cdot \pi \quad , k \in \mathbb{Z}\}$

C^+ del sen (x) = $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$

C^- del sen (x) = $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$

Máximos del sen (x) = $\left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad , k \in \mathbb{Z}\right\}$

Mínimos del sen (x) = $\left\{x \in \mathbb{R} : x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad , k \in \mathbb{Z}\right\}$

--------------------000-------- -----------

C^0 del cos (x) = $\left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad , k \in \mathbb{Z}\right\}$

C^+ del cos (x) = $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi, \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$

C^- del cos (x) = $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi, \left(2k + \frac{3}{2}\right)\pi\right)$

Máximos del cos (x)) = $\{x \in \mathbb{R} : x = k \cdot 2\pi \quad , k \in \mathbb{Z}\}$

Mínimos del cos (x)) = $\{x \in \mathbb{R} : x = (2k+1)\pi \quad , k \in \mathbb{Z}\}$

+++

Ej 17 b) Hallar C^0, C^+ y C^- de f (x) en los intervalos indicados

$f(x) = \text{sen}(2x) + 1 \quad \text{en} \quad [-\pi, 5\pi]$

$C^0 = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) = 0\}$

$f(x) = 0 \implies \text{sen}(2x) + 1 = 0 \implies \text{sen}(2x) = -1$

Si encontramos los x tal que $\text{sen}(2x) = -1$ estaremos encontrando
los ceros de $f(x) = \text{sen}(2x) + 1$

De acuerdo a lo que describimos anteriormente en este caso $\mathcal{H} = 2x$

Entonces buscamos los $\mathcal{H}$ tal que sen $(\mathcal{H}) = -1$

y después en los resultados reemplazamos $\mathcal{H} = 2x$ para despejar x

Vean :

sen $(\mathcal{H}) = -1$

es como el Ej 13 d) sen (x) = -1

usamos los resultados de dicho Ej 13 d) :

$$S: \quad \mathcal{H} = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \;, \quad k \in \mathbb{Z}$$

S es el conjunto solución de sen $(\mathcal{H}) = -1 \quad \forall\, \mathcal{H} \in \mathbb{R}$

Ahora como $\mathcal{H} = 2x$, reemplazamos donde dice x ponemos 2 x

$$S: \quad 2x = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\left(\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi\right)}{2} = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$\Longrightarrow \quad C^0 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi\right\}$$

Veamos cuáles de éstos pertenecen a $[-\pi, 5\pi]$ $\left(\left[-180°, 900°\right]\right)$

$$\text{si } k = 0 \Longrightarrow x = \frac{3}{4}\pi + 0 \cdot \pi = \frac{3}{4}\pi \qquad (135°) \text{ sí}$$

$$\text{si } k = 1 \Longrightarrow x = \frac{3}{4}\pi + 1 \cdot \pi = \frac{3}{4}\pi + \pi = \frac{7}{4}\pi \qquad (315°) \text{ sí}$$

$$\text{si } k = 2 \Longrightarrow x = \frac{3}{4}\pi + 2 \cdot \pi = \frac{3}{4}\pi + 2\pi = \frac{11}{4}\pi \qquad (495°) \text{ sí}$$

$$\text{si } k = 3 \Longrightarrow x = \frac{3}{4}\pi + 3 \cdot \pi = \frac{3}{4}\pi + 3\pi = \frac{15}{4}\pi \qquad (675°) \text{ sí}$$

$$\text{si } k = 4 \Longrightarrow x = \frac{3}{4}\pi + 4 \cdot \pi = \frac{3}{4}\pi + 4\pi = \frac{19}{4}\pi \qquad (855°) \text{ sí}$$

$$\text{si } k = 5 \Longrightarrow x = \frac{3}{4}\pi + 5 \cdot \pi = \frac{3}{4}\pi + 5\pi = \frac{23}{4}\pi \qquad (1035°) \text{ no}$$

Ahora para k < 0

$$\text{si } k = -1 \Longrightarrow x = \frac{3}{4}\pi + (-1) \cdot \pi = \frac{3}{4}\pi - \pi = -\frac{\pi}{4} \qquad (-45°) \text{ sí } \in [-\pi, 5\pi]$$

$$\text{si } k = -2 \Longrightarrow x = \frac{3}{4}\pi + (-2) \cdot \pi = \frac{3}{4}\pi - 2\pi = -\frac{5}{4}\pi \qquad (-225°) \text{ no } \in [-\pi, 5\pi]$$

Entonces :

$$\text{S de sen } (\mathcal{H}) = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi\right\} \text{ que } \in [-\pi, 5\pi] \text{ son : } \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi, \frac{15}{4}\pi, \frac{19}{4}\pi\right\}$$

Por lo tanto :

$$C^0 = \left\{-\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \frac{11}{4}\pi,\ \frac{15}{4}\pi,\ \frac{19}{4}\pi\right\}$$

son los soluciones de $f(x) = \text{sen}(2x) + 1 = 0$ que $\in [-\pi, 5\pi]$

Calculemos el C^+ de $f(x) = \text{sen}(2x) + 1$ en $[-\pi, 5\pi]$

$C^+ = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) > 0\}$

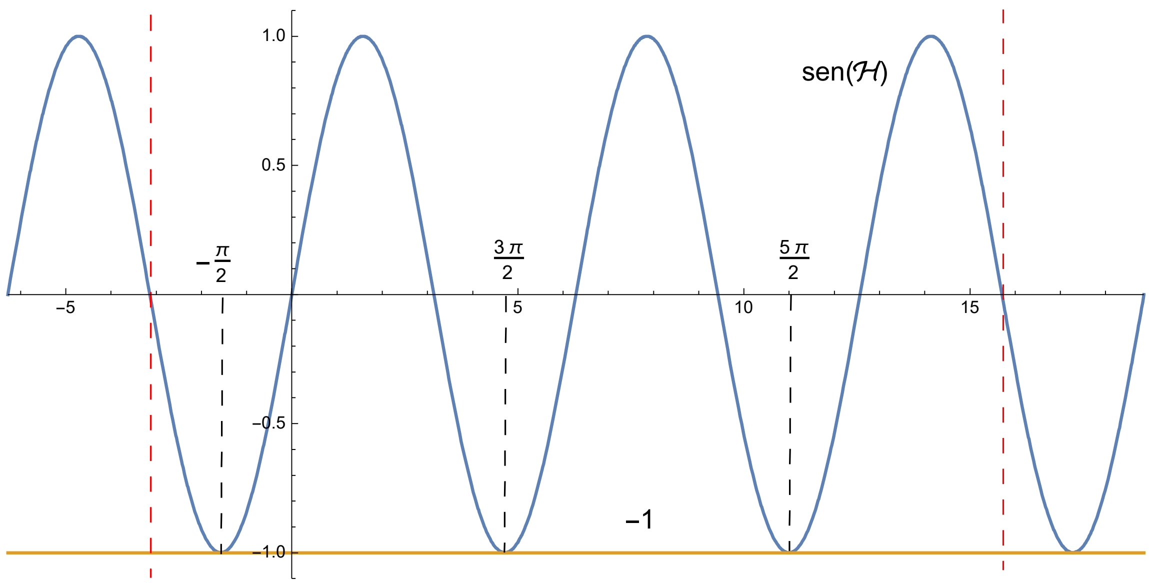
$f(x) > 0 \implies \text{sen}(2x) + 1 > 0 \implies \text{sen}(2x) > -1$

Llamamos $\mathcal{H} = 2x$ para analizar $\text{sen}(\mathcal{H}) > -1$

Si graficamos sen $(\mathcal{H})$ vemos que el seno es > -1 para todo $\mathcal{H}$

salvo para $\mathcal{H} = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

```
Plot[{Sin[ℋ], -1}, {ℋ, -2 π, 6 π}, PlotRange → {{-2 π, 6 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
repre… seno                        rango de representación                    cociente de aspecto
```



Entonces sen $(\mathcal{H}) > -1$ para $\mathbb{R} - \left[\mathcal{H} = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}\right]$

Como $\mathcal{H} = 2x$ reemplazamos para despejar x :

$$2x = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \implies x = \frac{\left(\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi\right)}{2} = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

Luego sen $(2x) > -1$ para $x \in \mathbb{R} - \left\{x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Este es el C^+ de $f(x) = \text{sen}(2x) + 1$

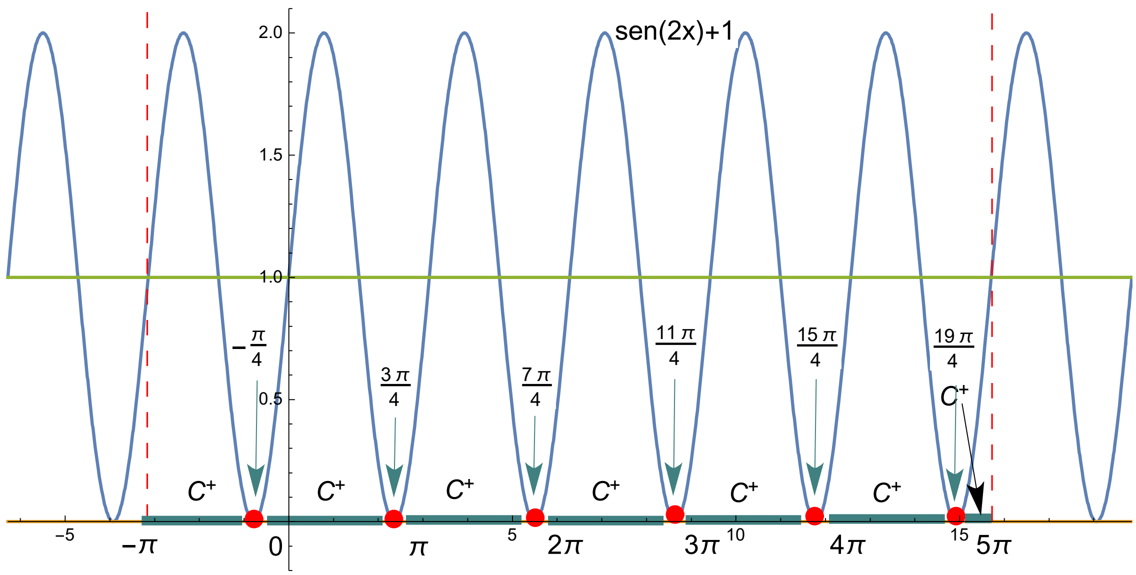
$$C^+ = \mathbb{R} - \left\{x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

que escrito como unión de intervalos es :

$$C^{+} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{3}{4}\pi + k\cdot\pi,\ \frac{3}{4}\pi + (k+1)\cdot\pi\right)$$

sen (x) se comprimió a la mitad y subió 1 unidad según las "y" para dar sen $(2x) + 1$

```
Plot[{Sin[2 x] + 1, 0, 1}, {x, -2 π, 6 π}, PlotRange → {{-2 π, 6 π}, {-0.2, 2.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· seno rango de representación cociente de aspecto



Veamos cuáles de estos intervalos $C^{+} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{3}{4}\pi + k\cdot\pi,\ \frac{3}{4}\pi + (k+1)\cdot\pi\right)$

pertenecen a $[-\pi, 5\pi]$ $\quad ([-180°, 900°])$

si k = 0 $\implies \left(\frac{3}{4}\pi + 0\cdot\pi,\ \frac{3}{4}\pi + (0+1)\cdot\pi\right) = \left(\frac{3}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi + \pi\right) =$

$= \left(\frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi\right) \quad (135°, 315°)$ **sí** $\in [-\pi, 5\pi]$

si k = 1 $\implies \left(\frac{3}{4}\pi + 1\cdot\pi,\ \frac{3}{4}\pi + (1+1)\cdot\pi\right) = \left(\frac{3}{4}\pi + \pi,\ \frac{3}{4}\pi + 2\pi\right) =$

$= \left(\frac{7}{4}\pi,\ \frac{11}{4}\pi\right) \quad (315°, 495°)$ **sí** $\in [-\pi, 5\pi]$

si k = 2 $\implies \left(\frac{3}{4}\pi + 2\cdot\pi,\ \frac{3}{4}\pi + (2+1)\cdot\pi\right) = \left(\frac{3}{4}\pi + 2\pi,\ \frac{3}{4}\pi + 3\pi\right) =$

$= \left(\frac{11}{4}\pi,\ \frac{15}{4}\pi\right) \quad (495°, 675°)$ **sí** $\in [-\pi, 5\pi]$

si k = 3 $\implies \left(\frac{3}{4}\pi + 3\cdot\pi,\ \frac{3}{4}\pi + (3+1)\cdot\pi\right) = \left(\frac{3}{4}\pi + 3\pi,\ \frac{3}{4}\pi + 4\pi\right) =$

$= \left(\frac{15}{4}\pi,\ \frac{19}{4}\pi\right) \quad (675°, 855°)$ **sí** $\in [-\pi, 5\pi]$

si k = 4 $\implies \left(\frac{3}{4}\pi + 4\cdot\pi,\ \frac{3}{4}\pi + (4+1)\cdot\pi\right) = \left(\frac{3}{4}\pi + 4\pi,\ \frac{3}{4}\pi + 5\pi\right) =$

$= \left(\frac{19}{4}\pi,\ \frac{23}{4}\pi\right) \quad (855°, 1035°)$ **sí, una parte** $\left(\frac{19}{4}\pi,\ 5\pi\right) \in [-\pi, 5\pi]$

Ahora para k < 0

si k = -1 $\Longrightarrow$ $\left(\frac{3}{4}\pi + (-1)\cdot\pi,\ \frac{3}{4}\pi + (-1+1)\cdot\pi\right) = \left(\frac{3}{4}\pi - \pi,\ \frac{3}{4}\pi + 0\right) =$

$= \left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\right)$ $(-45°, 135°)$ sí $\in [-\pi, 5\pi]$

si k = -2 $\Longrightarrow$ $\left(\frac{3}{4}\pi + (-2)\cdot\pi,\ \frac{3}{4}\pi + (-2+1)\cdot\pi\right) = \left(\frac{3}{4}\pi - 2\pi,\ \frac{3}{4}\pi - \pi\right) =$

$= \left(-\frac{5}{4}\pi,\ -\frac{\pi}{4}\right)$ $(-225°, -45°)$ sí, una parte $\left(-\pi, -\frac{\pi}{4}\right) \in [-\pi, 5\pi]$

Entonces C^+ que pertenecen a $[-\pi, 5\pi]$ $([-180°, 900°])$ son :

$$C^+ = \left(-\pi, -\frac{\pi}{4}\right) \bigcup \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right) \bigcup \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right) \bigcup \left(\frac{7}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{11}{4}\pi, \frac{15}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{15}{4}\pi, \frac{19}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{19}{4}\pi, 5\pi\right)$$

Calculemos el C^- de $f(x) = \text{sen}(2x) + 1$ en $[-\pi, 5\pi]$

$C^- = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) < 0\}$

$f(x) < 0 \Longrightarrow \text{sen}(2x) + 1 < 0 \Longrightarrow \text{sen}(2x) < -1$

Vemos en esta inecuación que no existe x tal que seno sea menor que -1

(recordemos que sen (algo) da números reales entre [-1, 1]

Entonces :

$C^- = \phi$

Ej 17 c) Hallar C^0, C^+ y C^- de f (x) en los intervalos indicados

$$f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 \quad \text{en} \quad [-\pi, 3\pi]$$

+-+

Nota : $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 2\cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) - 1$ es una composición de funciones así :

.- compresión de cos (x) a la mitad (el período se reduce a π) $\cos(x) \longrightarrow \cos(2x)$

.- luego una traslación en $\frac{\pi}{4}$ a la derecha según las x $\cos(2x) \longrightarrow \cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

.- una dilatación al doble según las y (la amplitud de la onda se duplica)

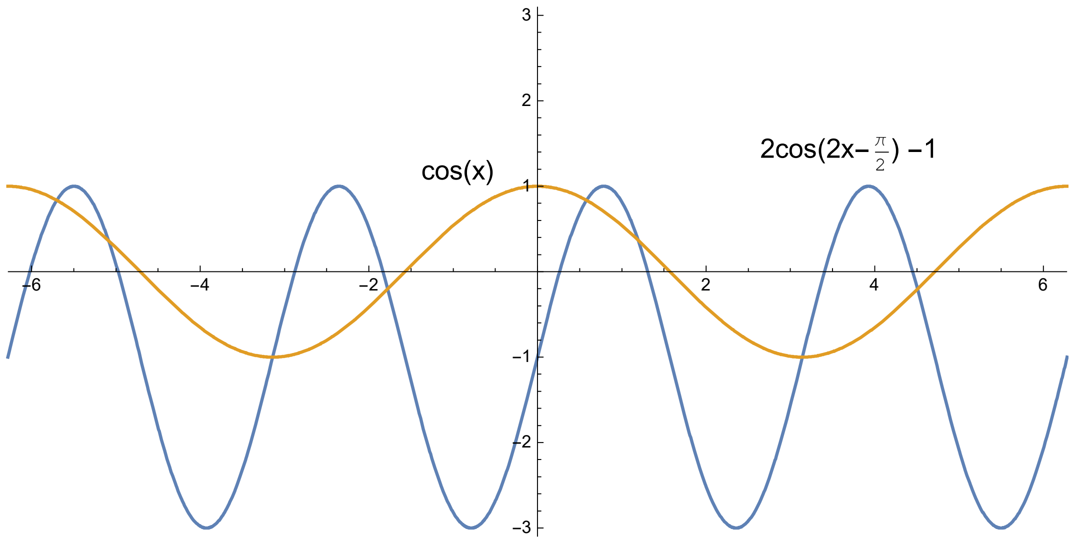
$\cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \longrightarrow 2\cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

.- finalmente una traslación según las y hacia abajo en 1 unidad

$2\cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \longrightarrow 2\cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) - 1$

+-+

```
Plot[{2 Cos[2 x - π/2] - 1, Cos[x]}, {x, -2 π, 2 π},
represen·· coseno                 coseno
  PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-3.1, 3.1}}, AspectRatio → 0.5]
  rango de representación                cociente de aspecto
```



$C^0 = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) = 0\}$

$$f(x) = 0 \implies 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 0 \implies 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 1 \implies \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Esto quiere decir que encomtrar los ceros de la $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ se reduce

a encontrar los x que satisfacen la ecuación $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

En este caso hacemos las sustitución $\mathcal{H} = 2x - \frac{\pi}{2}$, entonces resolveremos

$\cos(\mathcal{H}) = \frac{1}{2}$ para despues reemplazar $\mathcal{H}$ y despejar x

De acuerdo al signo positivo del coseno, $\cos(\mathcal{H}) = \frac{1}{2}$ se cumple para

$\mathcal{H} = \frac{\pi}{3}$ en el 1 er cuadrante como para $\mathcal{H} = \frac{5}{3}\pi$ en el 4 to cuadrante

El primer conjunto de soluciones es :

$$\mathcal{H} = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

El segundo conjunto de soluciones es :

$$\mathcal{H} = \frac{5}{3}\pi + z \cdot 2\pi \quad , \quad z \in \mathbb{Z}$$

Ahora reemplazamos $\mathcal{H} = 2x - \frac{\pi}{2}$ para despejar x :

$$2x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \implies 2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi = \frac{(3+2)\pi}{6} + k \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \implies$$

$$\implies x = \frac{\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi}{2} \implies x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$$

Entonces :

$$S_1 : \; x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ahora reemplazmos $\mathcal{H} = 2x - \frac{\pi}{2}$ para despejar x en el otro conjunto de soluciones :

$$2x - \frac{\pi}{2} = \frac{5}{3}\pi + z \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}\pi + z \cdot 2\pi = \frac{(3+10)\pi}{6} + z \cdot 2\pi = \frac{13}{6}\pi + z \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{\frac{13}{6}\pi + z \cdot 2\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{13}{12}\pi + z \cdot \pi$$

Entonces :

$S_2: \; x = \frac{13}{12}\pi + z \cdot \pi \;, \; z \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto el C^0 de $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ en todo $\mathbb{R}$ es :

$$C^0 = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi, \; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{13}{12}\pi + z \cdot \pi, \; z \in \mathbb{Z}\right\}$$

Veamos cuáles de éstos pertenecen a $[-\pi, 3\pi]$ $([-180°, 540°])$ $-\frac{12}{12}\pi = -\pi$; $\frac{36}{12}\pi = 3\pi$

si $k = 0 \Longrightarrow x = \frac{5}{12}\pi + 0 \cdot \pi = \frac{5}{12}\pi$ **sí**

si $k = 1 \Longrightarrow x = \frac{5}{12}\pi + 1 \cdot \pi = \frac{5}{12}\pi + \pi = \frac{17}{12}\pi$ **sí**

si $k = 2 \Longrightarrow x = \frac{5}{12}\pi + 2 \cdot \pi = \frac{5}{12}\pi + 2\pi = \frac{29}{12}\pi$ **sí**

si $k = 3 \Longrightarrow x = \frac{5}{12}\pi + 3 \cdot \pi = \frac{5}{12}\pi + 3\pi = \frac{41}{12}\pi$ **no**

Ahora para $k < 0$

si $k = -1 \Longrightarrow x = \frac{5}{12}\pi + (-1) \cdot \pi = \frac{5}{12}\pi - \pi = -\frac{7}{12}\pi$ **sí**

si $k = -2 \Longrightarrow x = \frac{5}{12}\pi + (-2) \cdot \pi = \frac{5}{12}\pi - 2\pi = -\frac{19}{12}\pi$ **no** $\in [-\pi, 3\pi]$

Entonces :

del primer conjunto de soluciones las que pertenecen a $[-\pi, 3\pi]$ son :

$-\frac{7}{12}\pi, \; \frac{5}{12}\pi, \; \frac{17}{12}\pi, \; \frac{29}{12}\pi$

Veamos cuáles de las soluciones del segundo conjunto

pertenecen a $[-\pi, 3\pi]$ $([-180°, 540°])$ $-\frac{12}{12}\pi = -\pi$;

$\frac{36}{12}\pi = 3\pi$

si $z = 0 \Longrightarrow x = \frac{13}{12}\pi + 0 \cdot \pi = \frac{13}{12}\pi$ **sí**

si $z = 1 \Longrightarrow x = \frac{13}{12}\pi + 1 \cdot \pi = \frac{13}{12}\pi + \pi = \frac{25}{12}\pi$ **sí**

si z = 2 $\implies$ $x = \frac{13}{12}\pi + 2 \cdot \pi = \frac{13}{12}\pi + 2\pi = \frac{37}{12}\pi$ **no**

Ahora para z < 0

si z = -1 $\implies$ $x = \frac{13}{12}\pi + (-1) \cdot \pi = \frac{13}{12}\pi - \pi = \frac{\pi}{12}$ **sí**

si z = -2 $\implies$ $x = \frac{13}{12}\pi + (-2) \cdot \pi = \frac{13}{12}\pi - 2\pi = -\frac{11}{12}\pi$ **sí**

si z = -3 $\implies$ $x = \frac{13}{12}\pi + (-3) \cdot \pi = \frac{13}{12}\pi - 3\pi = -\frac{23}{12}\pi$ **no** $\in [-\pi, 3\pi]$

Entonces :

del segundo conjunto de soluciones las que pertenecen a $[-\pi, 3\pi]$ **son :**

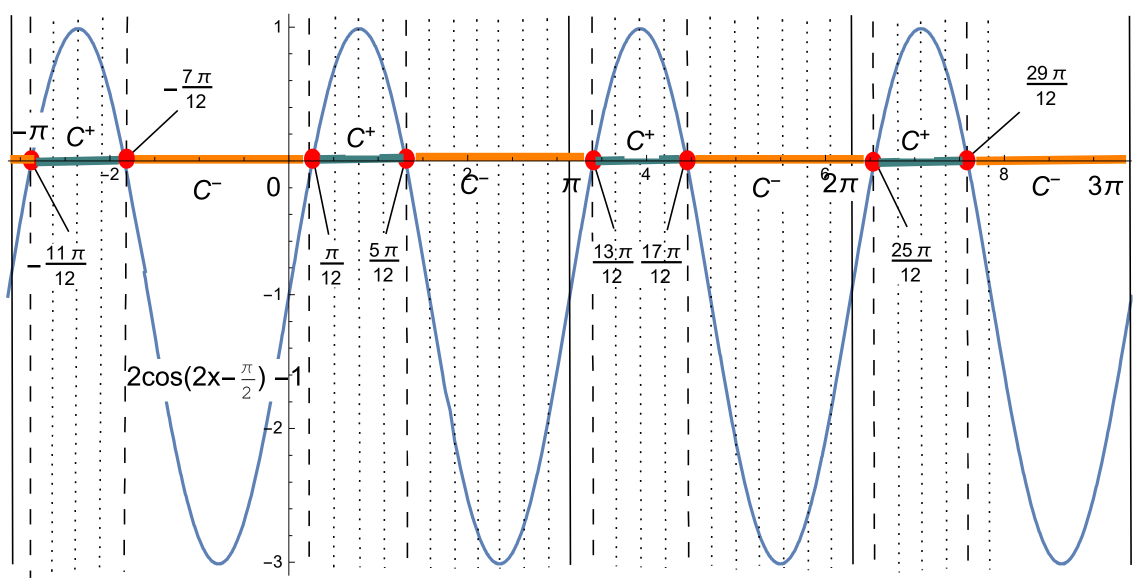
$-\frac{11}{12}\pi,\ \frac{\pi}{12},\ \frac{13}{12}\pi,\ \frac{25}{12}\pi$

Por lo tanto el C^0 **de** $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ **en** $[-\pi, 3\pi]$ **es :**

$$C^0 = \left\{-\frac{11}{12}\pi,\ -\frac{7}{12}\pi,\ \frac{\pi}{12},\ \frac{5}{12}\pi,\ \frac{13}{12}\pi,\ \frac{17}{12}\pi,\ \frac{25}{12}\pi,\ \frac{29}{12}\pi\right\}$$

Veamos el gráfico de $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

```
Plot[{2 Cos[2 x - π/2] - 1}, {x, -π, 3 π}, PlotRange → {{-π, 3 π}, {-3.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
represen·· coseno rango de representación cociente de aspecto



Calculemos el C^+ **y el** C^- **de** $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ **en** $[-\pi, 3\pi]$

$C^+ = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) > 0\}$

$f(x) > 0 \implies 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 > 0$

$C^- = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) < 0\}$

$f(x) < 0 \quad \Longrightarrow \quad 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 < 0$

Como $f(x) = \cos(x)$ **es continua como también** $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

usaremos el corolario del Teo de Bolzano para afirmar que entre dos ceros consecutivos

o bien $f(x) > 0$ **o** $f(x) < 0$ **en dicho intervalo entre raíces consecutivas**

Tenemos los ceros o raíces entre $[-\pi, 3\pi]$ **:**

$C^0 = \left\{-\frac{11}{12}\pi, -\frac{7}{12}\pi, \frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi, \frac{25}{12}\pi, \frac{29}{12}\pi\right\}$

Entonces los intervalos de evaluación de $f(x)$ **entre raíces serán :**

$\left[-\pi, -\frac{11}{12}\pi\right)$; $\left(-\frac{11}{12}\pi, -\frac{7}{12}\pi\right)$; $\left(-\frac{7}{12}\pi, \frac{\pi}{12}\right)$; $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi\right)$; $\left(\frac{5}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi\right)$; $\left(\frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi\right)$;

$\left(\frac{17}{12}\pi, \frac{25}{12}\pi\right)$; $\left(\frac{25}{12}\pi, \frac{29}{12}\pi\right)$; $\left(\frac{29}{12}\pi, 3\pi\right]$

	$[-\pi, -\frac{11\pi}{12})$	$(-\frac{11\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12})$	$(-\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12})$	$(\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12})$	$(\frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12})$	$(\frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12})$	$(\frac{17\pi}{12}, \frac{25\pi}{12})$	$(\frac{25\pi}{12}, \frac{29\pi}{12})$	$(\frac{29\pi}{12}, 3\pi]$
X (tomamos el promedio del intervalo)	$-\frac{23\pi}{24}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{65\pi}{24}$
f(x)	-0.482362	1	-3	1	-3	1	-3	1	-2.93185
f(x) es	-	+	-	+	-	+	-	+	-

Entonces C^+ **y** C^- **de** $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ **en** $[-\pi, 3\pi]$ **, son :**

$C^+ = \left(-\frac{11}{12}\pi, -\frac{7}{12}\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi\right) \cup \left(\frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi\right) \cup \left(\frac{25}{12}\pi, \frac{29}{12}\pi\right)$

y

$C^- = \left[-\pi, -\frac{11}{12}\pi\right) \cup \left(-\frac{7}{12}\pi, \frac{\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{5}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi\right) \cup \left(\frac{17}{12}\pi, \frac{25}{12}\pi\right) \cup \left(\frac{29}{12}\pi, 3\pi\right]$

Ej 17 d) Hallar C^0 **,** C^+ **y** C^- **de** $f(x)$ **en los intervalos indicados**

$f(x) = 2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 \quad$ **en** $[0, 3\pi]$

+-+

Nota : $2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ **es una composición de funciones así :**

.- una traslación de $\text{sen}(x)$ **en** $\frac{\pi}{4}$ **a la derecha según las x** $\text{sen}(x) \longrightarrow \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

.- una dilatación al doble según las y (la amplitud de la onda se duplica)

$\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \longrightarrow 2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

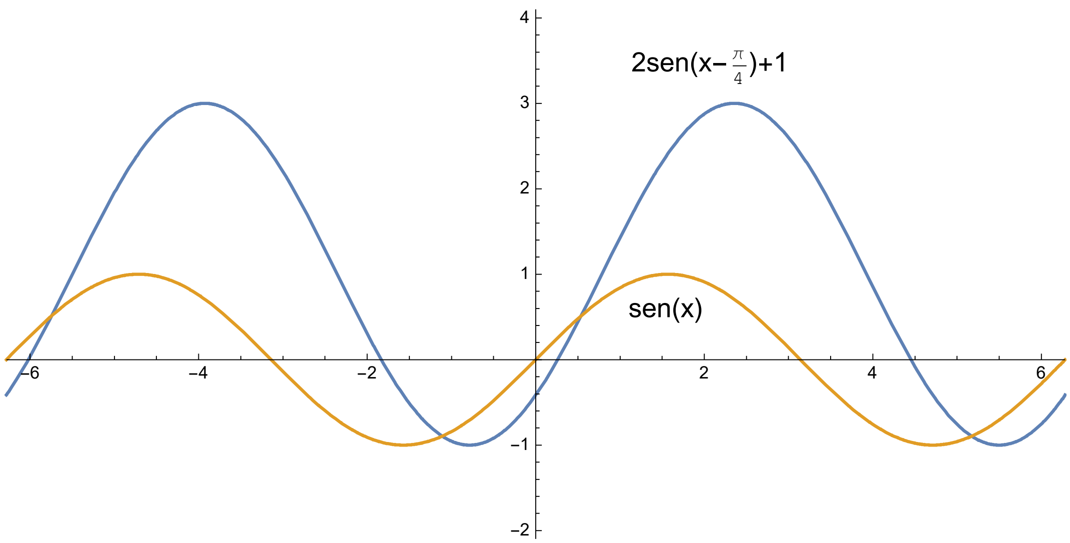
.- finalmente una traslación según las y hacia arriba en 1 unidad

$$2 \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \longrightarrow 2 \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

+-+

```
Plot[{2 Sin[x - π/4] + 1, Sin[x]}, {x, -2 π, 2 π},
 PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-2.1, 4.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

represen·· seno seno rango de representación cociente de aspecto



$C^0 = \{x \in \operatorname{Dom}(f) : f(x) = 0\}$

$$f(x) = 0 \implies 2 \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0 \implies 2 \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \implies \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

Esto quiere decir que encomtrar los ceros de $f(x) = 2 \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ **se reduce**

a encontrar los x que satisfacen la ecuación $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

En este caso hacemos las sustitución $\mathcal{H} = x - \frac{\pi}{4}$ **, entonces resolveremos**

$\operatorname{sen}(\mathcal{H}) = -\frac{1}{2}$ **para despues reemplazar** $\mathcal{H}$ **y despejar x**

De acuerdo al signo negativo del seno en la ecuación, $\operatorname{sen}(\mathcal{H}) = -\frac{1}{2}$

tendremos generadores de soluciones en el 3 er y 4 to cuadrante (allí sen < 0)

El arco del 1 er cuadrante cuyo seno en valor absoluto es $\frac{1}{2}$

se cumple para $\hat{\mathcal{H}} = \frac{\pi}{6}$ **en el 1 er cuadrante**

Entonces en el 3 er cuadrante será $\pi + \hat{\mathcal{H}} \implies \mathcal{H} = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$

y en el 4 to cuadrante será $\quad 2\pi - \hat{\mathcal{H}} \implies \mathcal{H} = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$

El primer conjunto de soluciones es :

$$\mathcal{H} = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

El segundo conjunto de soluciones es :

$$\mathcal{H} = \frac{11}{6}\pi + z \cdot 2\pi \quad , \quad z \in \mathbb{Z}$$

Ahora reemplazamos $\mathcal{H} = x - \frac{\pi}{4}$ **para despejar x :**

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi \implies x = \frac{\pi}{4} + \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi = \frac{(3+14)\pi}{12} + k \cdot 2\pi = \frac{17}{12}\pi + k \cdot 2\pi \implies$$

$$\implies x = \frac{17}{12}\pi + k \cdot 2\pi$$

Entonces :

$$S_1 : \; x = \frac{17}{12}\pi + k \cdot 2\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ahora reemplazmos $\mathcal{H} = 2x - \frac{\pi}{2}$ **para despejar x en el otro conjunto de soluciones :**

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{11}{6}\pi + z \cdot 2\pi \implies x = \frac{\pi}{4} + \frac{11}{6}\pi + z \cdot 2\pi = \frac{(3+22)\pi}{12} + z \cdot 2\pi = \frac{25}{12}\pi + z \cdot 2\pi \implies$$

$$\implies x = \frac{25}{12}\pi + z \cdot 2\pi$$

Entonces :

$$S_2 : \; x = \frac{25}{12}\pi + z \cdot 2\pi \quad , \quad z \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto el C^0 **de** $f(x) = 2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ **en todo** $\mathbb{R}$ **es :**

$$C^0 = S_1 \bigcup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{17}{12}\pi + k \cdot 2\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{25}{12}\pi + z \cdot 2\pi, \;\; z \in \mathbb{Z}\right\}$$

Veamos cuáles de éstos pertenecen a $[0, 3\pi]$ $\left([0°, 540°]\right)$ $\quad 0\pi \; ; \; \frac{36}{12}\pi = 3\pi$

si $k = 0 \implies x = \frac{17}{12}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{17}{12}\pi$ **sí**

si $k = 1 \implies x = \frac{17}{12}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{17}{12}\pi + 2\pi = \frac{41}{12}\pi$ **no**

Ahora para $k < 0$

si $k = -1 \implies x = \frac{17}{12}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{17}{12}\pi - 2\pi = -\frac{7}{12}\pi$ **no** $\in [-\pi, 3\pi]$

Entonces :

del primer conjunto de soluciones las que pertenecen a $[0, 3\pi]$ **son :**

$\frac{17}{12}\pi$

Veamos cuáles de las soluciones del segundo conjunto pertenecen a $[0, 3\pi]$ $([0°, 540°])$ 0π ;

$\frac{36}{12}\pi = 3\pi$

si $z = 0 \implies x = \frac{25}{12}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{25}{12}\pi$ sí

si $z = 1 \implies x = \frac{25}{12}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{25}{12}\pi + 2\pi = \frac{49}{12}\pi$ no

Ahora para $z < 0$

si $z = -1 \implies x = \frac{25}{12}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{25}{12}\pi - 2\pi = \frac{\pi}{12}$ sí

si $z = -2 \implies x = \frac{25}{12}\pi + (-2) \cdot 2\pi = \frac{25}{12}\pi - 4\pi = -\frac{23}{12}\pi$ no $\in [0, 3\pi]$

Entonces :

del segundo conjunto de soluciones las que pertenecen a $[0, 3\pi]$ **son :**

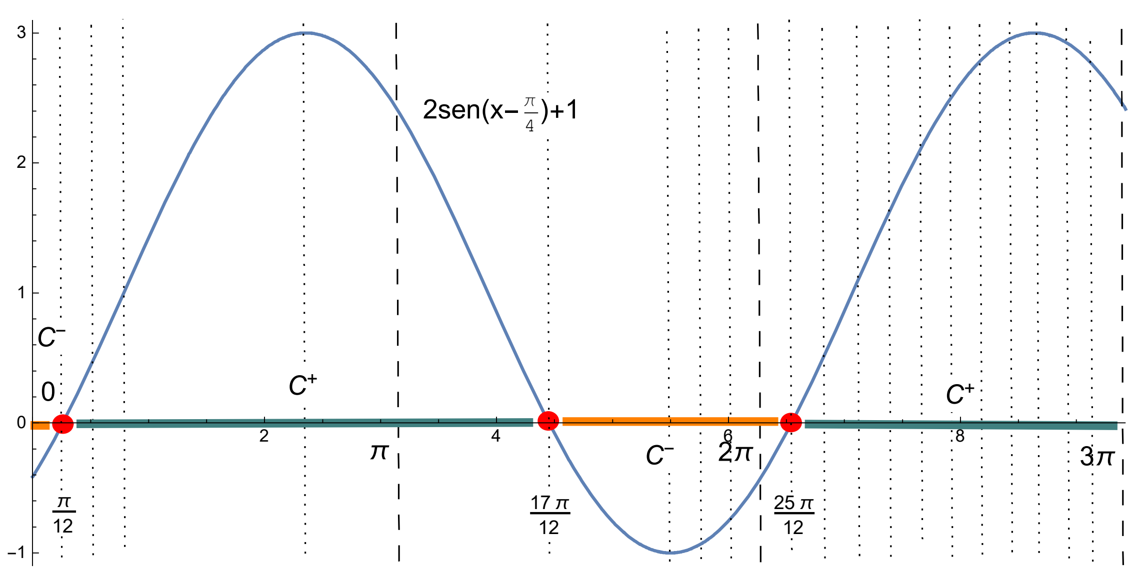
$\frac{\pi}{12}, \frac{25}{12}\pi$

Por lo tanto el C^0 **de** $f(x) = 2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ **en** $[0, 3\pi]$ **es :**

$$C^0 = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{17}{12}\pi, \frac{25}{12}\pi\right\}$$

Veamos el gráfico de $f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

```
Plot[{2 Sin[x - π/4] + 1}, {x, 0, 3 π}, PlotRange → {{0, 3 π}, {-1.1, 3.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
represen··· seno rango de representación cociente de aspecto



Calculemos el C^+ y el C^- de $f(x) = 2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ en $[0, 3\pi]$

$C^+ = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) > 0\}$

$f(x) > 0 \implies 2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 > 0$

$C^- = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) < 0\}$

$f(x) < 0 \implies 2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 < 0$

Como $f(x) = \text{sen}(x)$ es continua como también $f(x) = 2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

usaremos el corolario del Teo de Bolzano para afirmar que entre dos ceros consecutivos

o bien $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$ en dicho intervalo entre raíces consecutivas

Tenemos los ceros o raíces entre $[0, 3\pi]$:

$C^0 = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{17}{12}\pi, \frac{25}{12}\pi\right\}$

Entonces los intervalos de evaluación entre raíces de $f(x)$ son :

$\left[0, \frac{\pi}{12}\right)$; $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{17}{12}\pi\right)$; $\left(\frac{17}{12}\pi, \frac{25}{12}\pi\right)$; $\left(\frac{25}{12}\pi, 3\pi\right]$

	$[0, \frac{\pi}{12})$	$(\frac{\pi}{12}, \frac{17\pi}{12})$	$(\frac{17\pi}{12}, \frac{25\pi}{12})$	$(\frac{25\pi}{12}, 3\pi]$
X (tomamos el promedio del intervalo)	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{61\pi}{24}$
f(x)	-0.217523	3	-1	2.58671
f(x) es	-	+	-	+

Entonces C^+ y C^- de $f(x) = 2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ en $[0, 3\pi]$, son :

$$C^+ = \left(\frac{\pi}{12}, \frac{17}{12}\pi\right) \cup \left(\frac{25\pi}{12}, 3\pi\right]$$

y

$$C^- = \left[0, \frac{\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{17}{12}\pi, \frac{25\pi}{12}\right)$$

Ej 17 e) Hallar C^0, C^+ y C^- de $f(x)$ en los intervalos indicados

$f(x) = 2\,\text{sen}^2(x) - \text{sen}(x)$ en $[-\pi, \pi]$

+-+

$C^0 = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) = 0\}$

$f(x) = 0 \implies 2\,\text{sen}^2(x) - \text{sen}(x) = 0$ si sacamos factor común sen (x)

$\implies \text{sen}(x) \cdot [2\,\text{sen}(x) - 1] = 0$

Este producto será cero cuando :

$\text{sen}(x) = 0$ ó $2\,\text{sen}(x) - 1 = 0$

----

1 er caso :

$\text{sen}(x) = 0 \implies x = k \cdot \pi \;,\; k \in \mathbb{Z}$

2 do caso :

$2\,\text{sen}(x) - 1 = 0 \implies \text{sen}(x) = \frac{1}{2}$

Como seno es posotivo los arcos generadores de soluciones pertenecen al 1 er o el 2 do cuadrante

un generador es el arco del 1 er cuadrante $\hat{t} = \frac{\pi}{6}$ y el otro generador de soluciones es el arco del segundo cuadrante $\pi - \hat{t} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$

Entonces para el 2 do caso tenemos dos conjuntos de soluciones :

$x = \frac{\pi}{6} + p \cdot 2\pi \;,\; p \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{5}{6}\pi + q \cdot 2\pi \;,\; q \in \mathbb{Z}$

Recapitulando tenemos 3 conjuntos de soluciones :

del 1 er caso $S_1 : \; x = k \cdot \pi \;,\; k \in \mathbb{Z}$

del 2 do caso $S_2 : \; x = \frac{\pi}{6} + p \cdot 2\pi \;,\; p \in \mathbb{Z}$ ó $S_3 : \; x = \frac{5}{6}\pi + q \cdot 2\pi \;,\; q \in \mathbb{Z}$

$S = S_1 \bigcup S_2 \bigcup S_3$

$S = \{x \in \mathbb{R} : x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{6} + p \cdot 2\pi, p \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{5}{6}\pi + q \cdot 2\pi, q \in \mathbb{Z}\right\}$

Veamos para que valores de k, p, q las soluciones pertenecen a $[-\pi, \pi]$

Para S_1 :

si $k = 0 \implies x = 0 \cdot \pi = 0$ sí $\in [-\pi, \pi]$

si $k = 1 \implies x = 1 \cdot \pi = \pi$ sí $\in [-\pi, \pi]$

si $k = 2 \implies x = 2 \cdot \pi = 2\pi$ no $\in [-\pi, \pi]$

si $k = -1 \implies x = (-1) \cdot \pi = -\pi$ sí $\in [-\pi, \pi]$

si $k = -2 \implies x = (-2) \cdot \pi = -2\pi$ no $\in [-\pi, \pi]$

$S_1 = \{-\pi, 0, \pi\}$

Para S_2 : ahora para p :

$\text{si } p = 0 \implies x = \frac{\pi}{6} + 0 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}$ sí $\in [-\pi, \pi]$

$\text{si } p = 1 \implies x = \frac{\pi}{6} + 1 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13}{6}\pi$ no $\in [-\pi, \pi]$

$\text{si } p = -1 \implies x = \frac{\pi}{6} + (-1) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11}{6}\pi$ no $\in [-\pi, \pi]$

$S_2 = \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$

Para S_3 ahora para q;

$\text{si } q = 0 \implies x = \frac{5}{6}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi$ sí $\in [-\pi, \pi]$

$\text{si } q = 1 \implies x = \frac{5}{6}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi + 2\pi = \frac{17}{6}\pi$ no $\in [-\pi, \pi]$

$\text{si } q = -1 \implies x = \frac{5}{6}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi - 2\pi = -\frac{7}{6}\pi$ no $\in [-\pi, \pi]$

$S_3 = \left\{\frac{5}{6}\pi\right\}$

Por lo tanto

$S = S_1 \bigcup S_2 \bigcup S_2 = \left\{-\pi, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \pi\right\}$

Estos son los ceros de $f(x) = 2\,\text{sen}^2(x) - \text{sen}(x)$ **en** $[-\pi, \pi]$

Calculemos el C^+ y el C^- de $f(x) = 2\,\text{sen}^2(x) - \text{sen}(x)$ **en** $[-\pi, \pi]$

$C^+ = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) > 0\}$

$f(x) > 0 \implies 2\,\text{sen}^2(x) - \text{sen}(x) > 0$

$C^- = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) < 0\}$

$f(x) < 0 \implies 2\,\text{sen}^2(x) - \text{sen}(x) < 0$

Como $f(x) = \text{sen}(x)$ **es continua también lo será** $2\,\text{sen}^2(x) - \text{sen}(x)$

usaremos el corolario del Teo de Bolzano para afirmar que entre dos ceros consecutivos

o bien f (x) > 0 o f (x) < 0 en dicho intervalo entre raíces consecutivas

Tenemos los ceros o raíces entre $[-\pi, \pi]$ **:**

$$C^0 = \left\{-\pi, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \pi\right\}$$

Entonces los intervalos de evaluación entre raíces de f (x) son :

$$[-\pi, 0) \; ; \; \left(0, \frac{\pi}{6}\right); \; \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right); \; \left(\frac{5}{6}\pi, \pi\right]$$

	$[-\pi, 0)$	$(0, \frac{\pi}{6})$	$(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$	$(\frac{5\pi}{6}, \pi)$
X (tomamos el promedio del intervalo)	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{12}$
f(x)	3	0.124844	1	0.124844
f(x) es	+	-	+	-

Entonces C^+ **y** C^- **de** $f(x) = 2\,\text{sen}^2(x) - \text{sen}(x)$ **en** $[-\pi, \pi]$ **, son :**

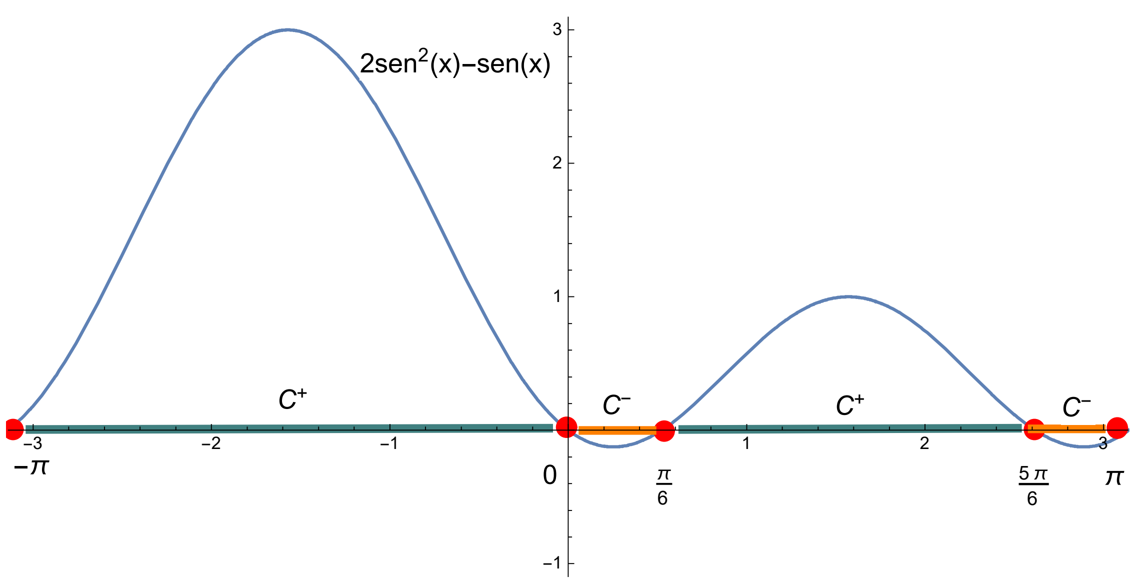
$$C^+ = [-\pi, 0) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right)$$

y

$$C^- = \left[0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi, \pi\right]$$

+-

```
Plot[{2 Sin[x]^2 - Sin[x]}, {x, -π, π}, PlotRange → {{-π, π}, {-1.1, 3.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
representación gráfica | seno | rango de representación | cociente de aspecto



Ej 17 f) Hallar C^0, C^+ y C^- de f (x) en los intervalos indicados

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} + \operatorname{sen}(x)\right)[\cos(x)] \quad \text{en} \quad [-\pi, \pi]$$

+-+

$C^0 = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) = 0\}$

$f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{1}{2} + \operatorname{sen}(x)\right) \cdot (\cos(x)) = 0$

Este producto será cero cuando :

$\cos(x) = 0 \quad$ ó $\quad \frac{1}{2} + \operatorname{sen}(x) = 0$

----

1 er caso :

$\cos(x) = 0 \;\Longrightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \;, \quad k \in \mathbb{Z}$

2 do caso :

$\frac{1}{2} + \operatorname{sen}(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen}(x) = -\frac{1}{2}$

Estas soluciones corresponden a arcos del 3 er y 4 to cuadrante pues ahí sen < 0

el arco que genera el mismo valore de seno en valor absoluto es $\hat{t} = \frac{\pi}{6}$

El arco del 3 er cuadrante es : $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$ **y las soluciones serán :**

$x = \frac{7}{6}\pi + p \cdot 2\pi \;, \quad p \in \mathbb{Z}$

El arco del 4 to cuadrante es : $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$ **y las soluciones serán :**

$x = \frac{11}{6}\pi + q \cdot 2\pi \;, \quad q \in \mathbb{Z}$

Recapitulando tenemos 3 conjuntos de soluciones :

del 1 er caso $S_1 : \quad x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \;, \quad k \in \mathbb{Z}$

del 2 do caso $S_2 : \quad x = \frac{7}{6}\pi + p \cdot 2\pi \;, \; p \in \mathbb{Z}$ ó $S_3 : \quad x = \frac{11}{6}\pi + q \cdot 2\pi \;, \; q \in \mathbb{Z}$

$S = S_1 \bigcup S_2 \bigcup S_3$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \;, \; k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{7}{6}\pi + p \cdot 2\pi \;, \; p \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{11}{6}\pi + q \cdot 2\pi \;, \; q \in \mathbb{Z}\right\}$$

Veamos para que valores de k , p , q las soluciones pertenecen a $[-\pi, \pi]$

Para S_1 **:**

si $k = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} + 0 \cdot \pi = \frac{\pi}{2}$ **sí** $\in [-\pi, \pi]$

si $k = 1 \implies x = \frac{\pi}{2} + 1 \cdot \pi = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3}{2}\pi$ **no** $\in [-\pi, \pi]$

si $k = -1 \implies x = \frac{\pi}{2} + (-1) \cdot \pi = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$ **sí** $\in [-\pi, \pi]$

si $k = -2 \implies x = \frac{\pi}{2} + (-2) \cdot \pi = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3}{2}\pi$ **no** $\in [-\pi, \pi]$

$S_1 = \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$

Para S_2 **: ahora para** p **:**

si $p = 0 \implies x = \frac{7}{6}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{7}{6}\pi$ **no** $\in [-\pi, \pi]$

si $p = 1 \implies x = \frac{7}{6}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{7}{6}\pi + 2\pi = \frac{19}{6}\pi$ **no** $\in [-\pi, \pi]$

si $p = -1 \implies x = \frac{7}{6}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{7}{6}\pi - 2\pi = -\frac{5}{6}\pi$ **sí** $\in [-\pi, \pi]$

si $p = -2 \implies x = \frac{7}{6}\pi + (-2) \cdot 2\pi = \frac{7}{6}\pi - 4\pi = -\frac{17}{6}\pi$ **no** $\in [-\pi, \pi]$

$S_2 = \left\{-\frac{5}{6}\pi\right\}$

Para S_3 **ahora para** q**;**

si $q = 0 \implies x = \frac{11}{6}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{11}{6}\pi$ **no** $\in [-\pi, \pi$

si $q = 1 \implies x = \frac{11}{6}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{11}{6}\pi + 2\pi = \frac{23}{6}\pi$ **no** $\in [-\pi, \pi]$

si $q = -1 \implies x = \frac{11}{6}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{11}{6}\pi - 2\pi = -\frac{\pi}{6}$ **sí** $\in [-\pi, \pi]$

$S_3 = \left\{-\frac{\pi}{6}\right\}$

Por lo tanto

$S = S_1 \bigcup S_2 \bigcup S_2 = \left\{-\frac{5}{6}\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right\}$

Estos son los ceros de $f(x) = \left(\frac{1}{2} + \text{sen}(x)\right) \cdot [\cos(x)]$ **en** $[-\pi, \pi]$

Calculemos el C^+ **y el** C^- **de** $f(x) = \left(\frac{1}{2} + \text{sen}(x)\right) \cdot [\cos(x)]$ **en** $[-\pi, \pi]$

$C^{+} = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) > 0\}$

$f(x) > 0 \implies \left(\frac{1}{2} + \text{sen}(x)\right) \cdot [\cos(x)] > 0$

$C^{-} = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) < 0\}$

$f(x) < 0 \implies \left(\frac{1}{2} + \text{sen}(x)\right) \cdot [\cos(x)] < 0$

Como f (x) = sen (x) es continua también lo será $\left(\frac{1}{2} + \text{sen}(x)\right) \cdot [\cos(x)]$

usaremos el corolario del Teo de Bolzano para afirmar que entre dos ceros consecutivos

o bien f (x) > 0 o f (x) < 0 en dicho intervalo entre raíces consecutivas

Tenemos los ceros o raíces entre $[-\pi, \pi]$ **:**

$C^{0} = \left\{-\frac{5}{6}\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right\}$

Entonces los intervalos de evaluación entre raíces de f (x) son :

$\left[-\pi, -\frac{5}{6}\pi\right); \left(-\frac{5}{6}\pi, -\frac{\pi}{2}\right); \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right); \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

	$[-\pi, -\frac{5\pi}{6})$	$(-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2})$	$(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6})$	$(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi]$
X (tomamos el promedio del intervalo)	$-\frac{11\pi}{12}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$
f(x)	-0.232963	0.183013	-0.183013	0.866025	-0.853553
f(x) es	-	+	-	+	-

Entonces C^{+} **y** C^{-} **de** $f(x) = \left(\frac{1}{2} + \text{sen}(x)\right) \cdot \cos(x)$ **en** $[-\pi, \pi]$ **, son :**

$C^{+} = \left(-\frac{5}{6}\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$

y

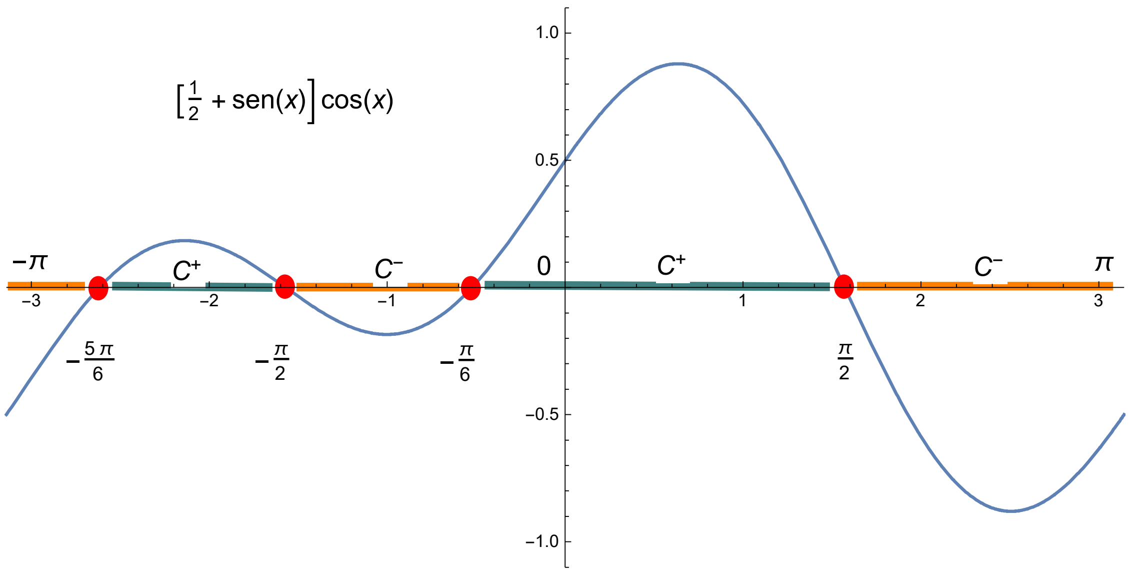
$C^{-} = \left[-\pi, -\frac{5}{6}\pi\right) \bigcup \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$\left(\frac{1}{2} + \underbrace{\text{Sin}[x]}_{\text{seno}}\right) \cdot \underbrace{\text{Cos}[x]}_{\text{coseno}}$

+-+

```
Plot[{(1/2 + Sin[x]) Cos[x]}, {x, -π, π}, PlotRange → {{-π, π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

representaci··· seno coseno rango de representación cociente de aspecto



++

Ejercicio 18.- Hallar la imagen de f. Determinar el valor máximo y el valor mínimo de f e indicar en qué puntos se alcanzan dichos valores.

a. $f(x) = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(x)$ **b.** $f(x) = -2\operatorname{sen}(2x+\pi)$

c. $f(x) = 3\cos(-x)+2$ **d.** $f(x) = 2\cos(3x)-1$

+-+

Imagen, Amplitud y Período

Observemos el gráfico de sen (x) y el de cos (x)

Vemos que el conjunto Imagen de seno y coseno es el intervalo [-1, 1]

Imagen (sen (x)) = [-1, 1]

Imagen (cos (x)) = [-1, 1]

Y que cada 2 π el gráfico se repite : esto se llama período T

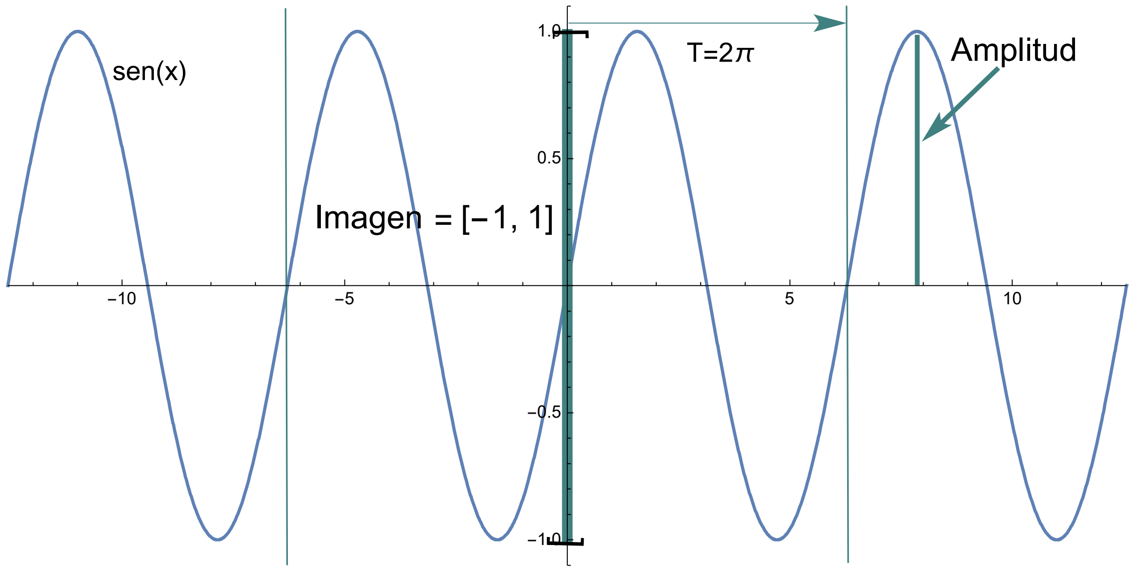
que no es otra cosa que decir que cada vuelta de 2 π los valores de seno y coseno vuelven a dar lo mismo.

Se dice que tanto sen (x) como cos (x) tienen período 2 π

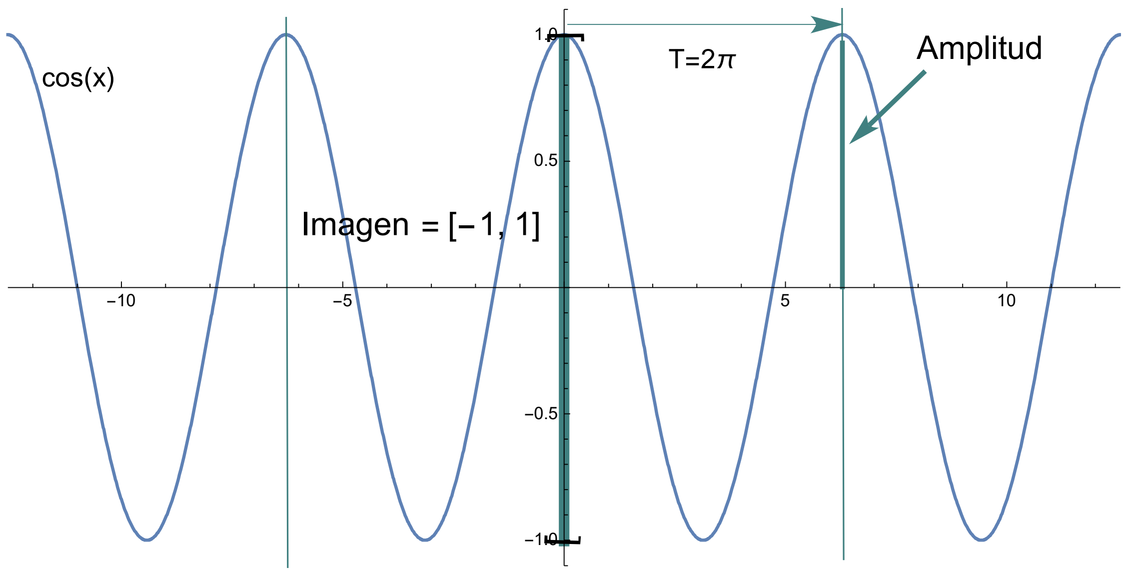
+-+

```
Plot[{Sin[x]}, {x, -4 π, 4 π}, PlotRange → {{-4 π, 4 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

repre··· seno rango de representación cociente de aspecto




```
Plot[{Cos[x]}, {x, -4 π, 4 π}, PlotRange → {{-4 π, 4 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· coseno rango de representación cociente de aspecto



+-+

En un sentido más amplio consideremos la función f (x) = A · sen (bx)   (Idem para coseno)

El factor |A| se llama Amplitud de la onda y el factor |b|, dentro del argumento del seno está

relacionado al período T mediante la siguiente expresión :

$$|b| = \frac{2\pi}{T} \qquad (*)$$

$$|A| = \text{Amplitud} \qquad (**)$$

Es decir que la fórmula de la función sinusoidal o cosinusoidal
nos da información sobre la Amplitud y el período de la misma

Ejemplo : Sea f (x) = 2 sen (x) = 2 sen (1 · x)

como b = 1   aplicando   (*)

$$|1| = 1 = \frac{2\pi}{T} \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

$f(x) = 2\,\text{sen}(x)$ tiene período $T = 2\pi$

Como $A = 2$, y $|A|$ = Amplitud, tiene Amplitud 2

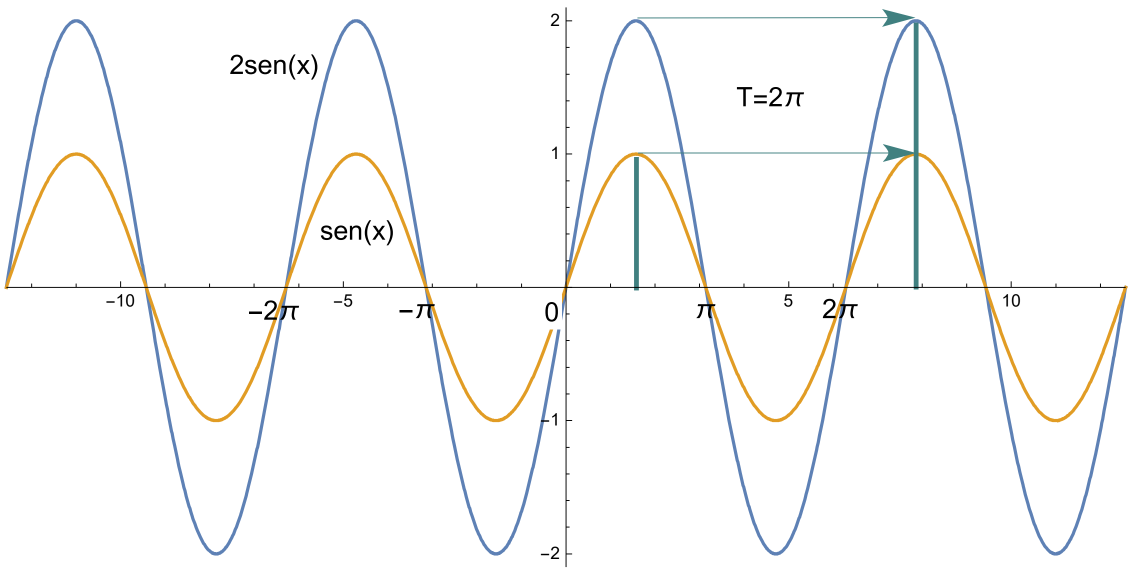
(el factor A comprime o dilata el conjunto Imagen (las "y") de acuerdo a si

$0 < |A| < 1$ ó $|A| > 1$ respectivamente, según las "y")

Como Amplitud es 2, el conjunto Imagen de $f(x) = 2\,\text{sen}(x)$ es $[-2, 2]$

+-+

```
Plot[{2 Sin[x], Sin[x]}, {x, -4 π, 4 π}, PlotRange → {{-4 π, 4 π}, {-2.1, 2.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
represen⋯ seno seno rango de representación cociente de aspecto



+-+

Ejemplo 2 : $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right) = 1 \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

como $b = \frac{1}{2}$ aplicando (*)

$$\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} = \frac{2\pi}{T} \implies T = 4\pi$$

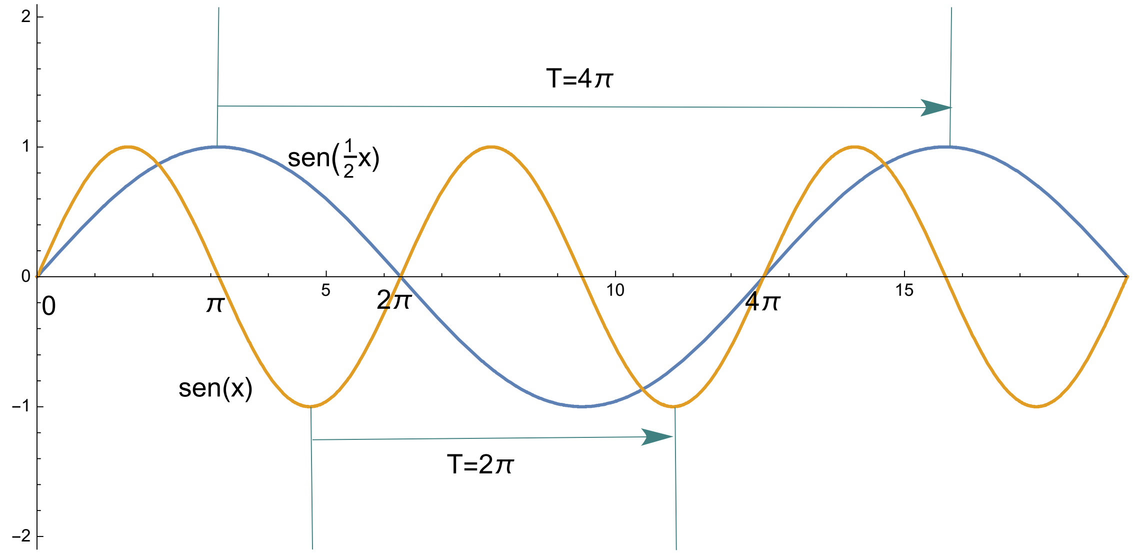
$f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ tiene período $T = 4\pi$ (se dilató según las x)

Como $A = 1$, y $|A|$ = Amplitud, tiene Amplitud 1

Como Amplitud es 1, el conjunto Imagen de $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ es $[-1, 1]$

+-+

```
Plot[{Sin[1/2 x], Sin[x]}, {x, 0, 6 π}, PlotRange → {{0, 6 π}, {-2.1, 2.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre⋯ seno seno rango de representación cociente de aspecto



+-+

Ejemplo 3 : $f(x) = -\frac{1}{3} \text{sen}(-4x)$

como $b = -4$ **aplicando (*)**

$|-4| = 4 = \frac{2\pi}{T} \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{\pi}{2}$

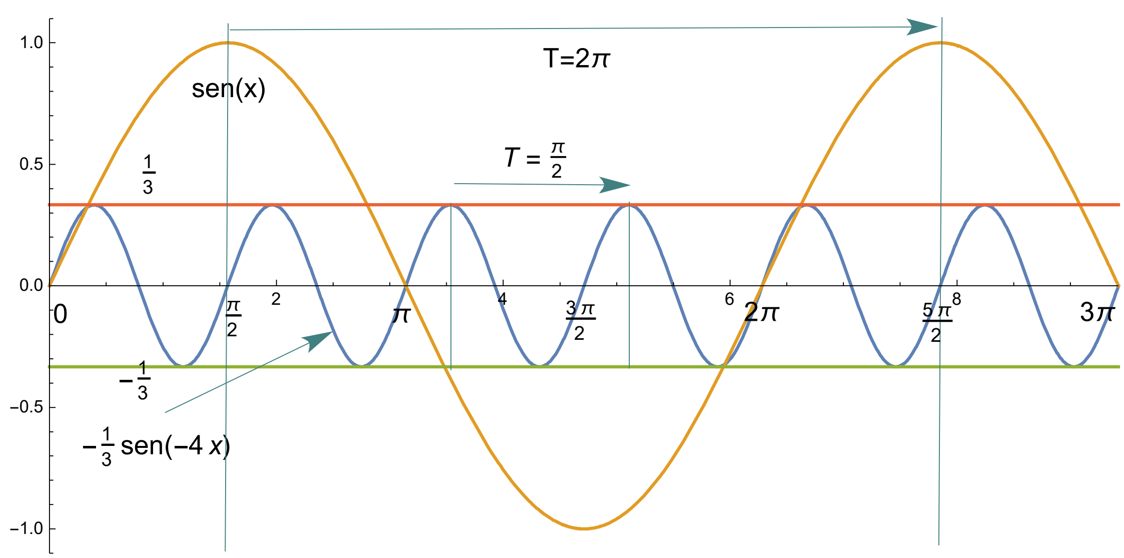
$f(x) = -\frac{1}{3} \text{sen}(-4x)$ **tiene período** $T = \frac{\pi}{2}$ **(se comprimió según las "x" y rotó)**

Como $A = -\frac{1}{3}$, **y** $|A|$ **= Amplitud, tiene Amplitud** $\frac{1}{3}$ **(se comprimió según las "y" y rotó)**

Como Amplitud es $\frac{1}{3}$, **el conjunto Imagen de** $f(x) = -\frac{1}{3} \text{sen}(-4x)$ **es** $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

+-+

```
Plot[{-1/3 Sin[-4 x], Sin[x], -1/3, 1/3}, {x, 0, 3 π},
     PlotRange → {{0, 3 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
representac· seno seno
rango de representación cociente de aspecto



+-+

Ej 18 a) con $f(x) = \frac{1}{3}\,\text{sen}(x)$ hallar imagen de f, valor máximo y mínimo y en cuáles x se da eso

Como $A = \frac{1}{3}$ y Amplitud $= |A| = \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$ el conjunto Imagen se comprimirá a $\frac{1}{3}$ de los valores máximos y mínimos de sen (x)

Entonces Imagen $(f) = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

Como $b = 1$ y $|b| = \frac{2\pi}{T} \Longrightarrow |1| = 1 = \frac{2\pi}{T} \Longrightarrow T = 2\pi$

Tiene período 2π

Valor Máximo $= \frac{1}{3}$ se da en los máximos del seno

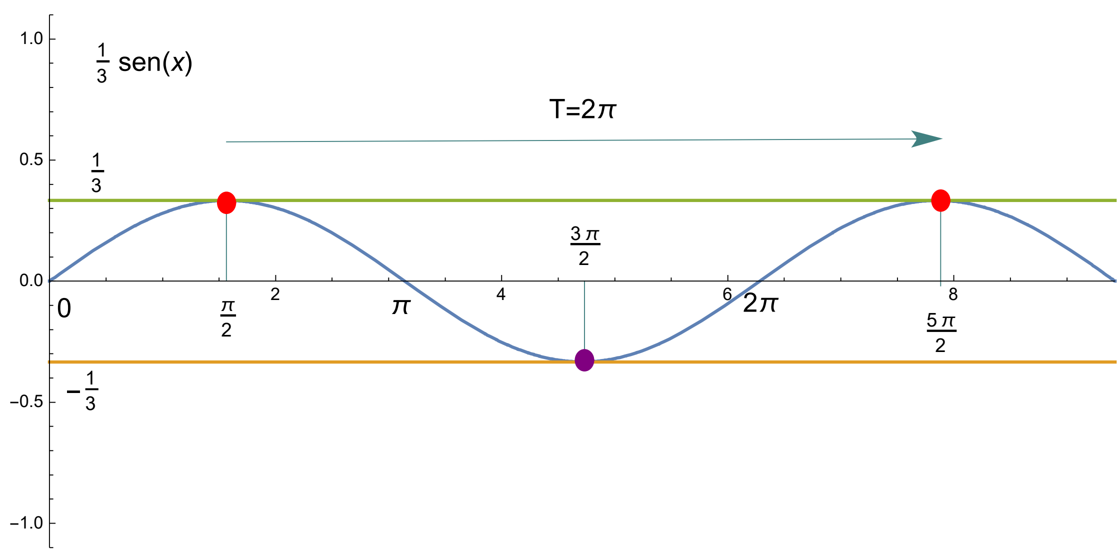
$x_M = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

Valor Mínimo $= -\frac{1}{3}$ se da en los mínimos del seno

$x_m = \frac{3}{2}\pi + z \cdot 2\pi, \; z \in \mathbb{Z}$

+-+

Plot[{$\frac{1}{3}$ Sin[x], $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$}, {x, 0, 3 π}, PlotRange → {{0, 3 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
represen· | seno | rango de representación | cociente de aspecto



+-+

Ej 18 b) con $f(x) = -2\,\text{sen}(2x + \pi)$ hallar imagen de f, valor máximo y mínimo y en cuáles x se da eso

Como $A = -2$ y Amplitud $= |A| = |-2| = 2$ el conjunto Imagen se dilatará 2 de los valores máximos y mínimos de sen (x)

Entonces Imagen $(f) = [-2, 2]$

Como $b = 2$ y $|b| = \frac{2\pi}{T} \implies |2| = 2 = \frac{2\pi}{T} \implies T = \pi$

Tiene período π

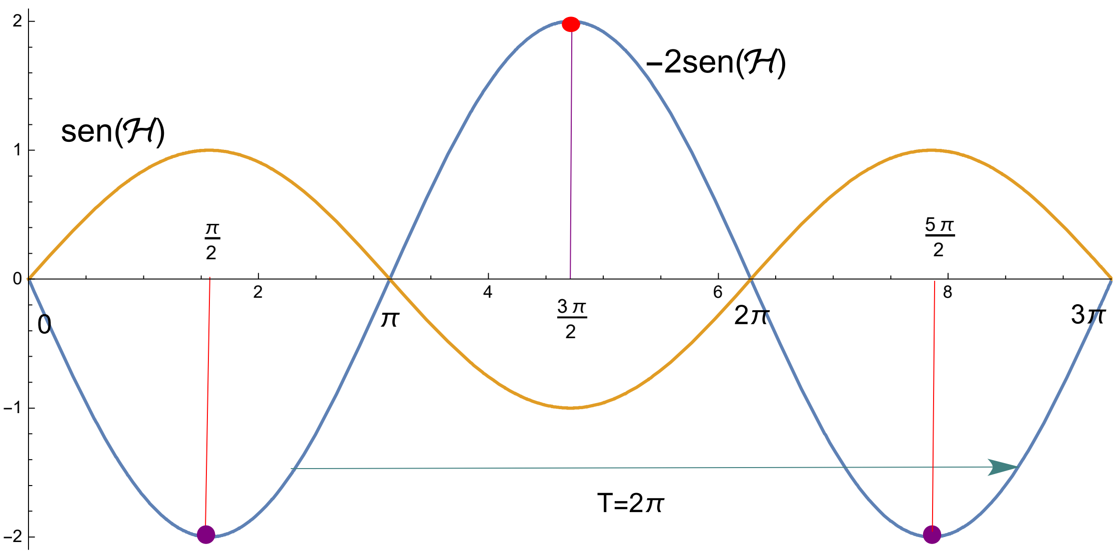
Para obtener los valores máximos y mínimos de $-2\,\text{sen}\,(2x+\pi)$ usaremos la sustituciòn

$\mathcal{H} = 2x+\pi$ para calcular los valores máximos y mínimos de $-2\,\text{sen}\,(\mathcal{H})$

Como $-2\,\text{sen}\,(\mathcal{H})$ es una rotación rígida de sen $(\mathcal{H})$ alrededor del eje x y una dilatación según las "y" al doble (ver gráfico)

+-+

```
Plot[{-2 Sin[ℋ], Sin[ℋ]}, {ℋ, 0, 3 π}, PlotRange → {{0, 3 π}, {-2.1, 2.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
representa·· seno seno rango de representación cociente de aspecto



+-+

los valores Máximos = 2 se dan en los mínimos de sen $(\mathcal{H})$

$$x_M = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

los valores Mínimos = -2 se dan en los máximos de sen $(\mathcal{H})$

$$x_m = \frac{\pi}{2} + z \cdot 2\pi, \quad z \in \mathbb{Z}$$

Ahora para obtener los máximos de $-2\,\text{sen}\,(2x+\pi)$

y como $\mathcal{H} = 2x+\pi$, reemplazamos para despejar x

$$2x+\pi = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \implies 2x = -\pi + \frac{3}{2}\pi + k\cdot 2\pi \implies 2x = \frac{(-2+3)}{2}\pi + k \cdot 2\pi \implies$$

$$\implies 2x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi \implies x = \frac{\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$$

Entonces, los máximos de $-2\,\text{sen}\,(2x+\pi)$ se dan en :

$$x_M = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi , \qquad k \in \mathbb{Z}$$

y el valor Máximo que alcanza $f(x) = -2\,\text{sen}(2x + \pi)$ es 2

----

para obtener los mínimos de $-2\,\text{sen}(2x + \pi)$

y como $\mathcal{H} = 2x + \pi$, reemplazamos para despejar x

$$2x + \pi = \frac{\pi}{2} + z \cdot 2\pi \implies 2x = -\pi + \frac{\pi}{2} + z \cdot 2\pi \implies 2x = \frac{(-2+1)}{2}\pi + z \cdot 2\pi \implies$$

$$\implies 2x = -\frac{\pi}{2} + z \cdot 2\pi \implies x = \frac{-\frac{\pi}{2} + z \cdot 2\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} + z \cdot \pi$$

Entonces, los mínimos de $-2\,\text{sen}(2x + \pi)$ se dan en :

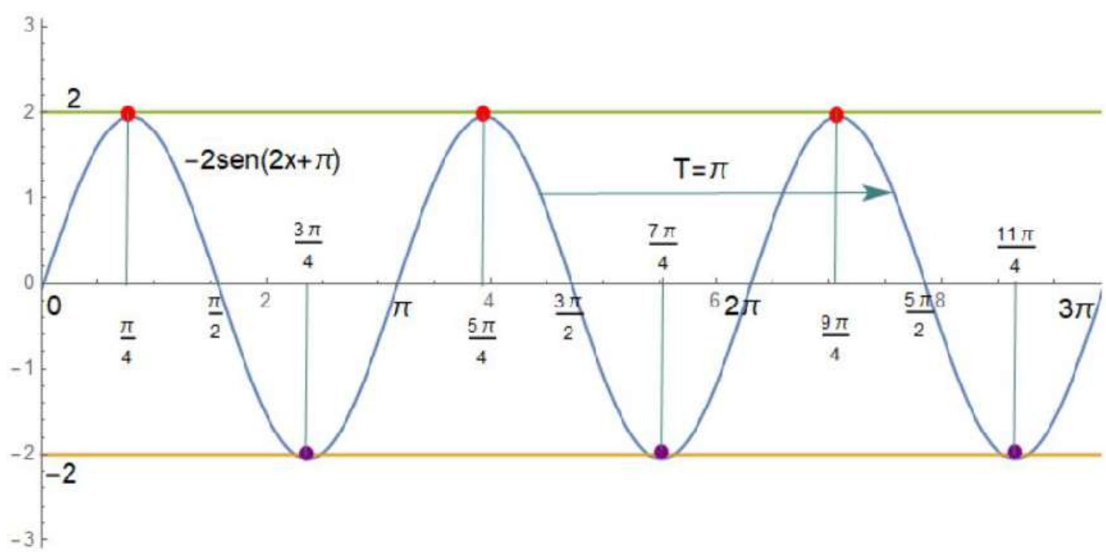
$$x_m = -\frac{\pi}{4} + z \cdot \pi, \quad z \in \mathbb{Z}$$

y el valor Mínimo que alcanza $f(x) = -2\,\text{sen}(2x + \pi)$ es -2

Veamos un gráfico de $f(x) = -2\,\text{sen}(2x + \pi)$ entre $[0, 3\pi]$

+-+

```
Plot[{-2 Sin[2 x + π], -2, 2}, {x, 0, 3 π}, PlotRange → {{0, 3 π}, {-3.1, 3.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
representa·· seno rango de representación cociente de aspecto



+-+

Ej 18 c) con $f(x) = 3\cos(-x) + 2$ hallar imagen de f, valor máximo y mínimo y en cuáles x se da

Como A = 3 y Amplitud = |A| = |3| = 3 el conjunto Imagen se dilatará 3
de los valores máximos y mínimos de cos (x)

Pero además, como tenemos una traslación según las "y" en 2 unidades hacia arriba

Entonces Imagen (f) = [-1, 5]

$$\text{Como } b = -1 \text{ y } |b| = \frac{2\pi}{T} \implies |-1| = 1 = \frac{2\pi}{T} \implies T = 2\pi$$

Tiene período 2π

Para obtener los valores máximos y mínimos de 3 cos (-x) + 2 usaremos la sustituciòn

$\mathcal{H}$ = -x para calcular los valores máximos y mínimos de 3 cos $(\mathcal{H})$ + 2

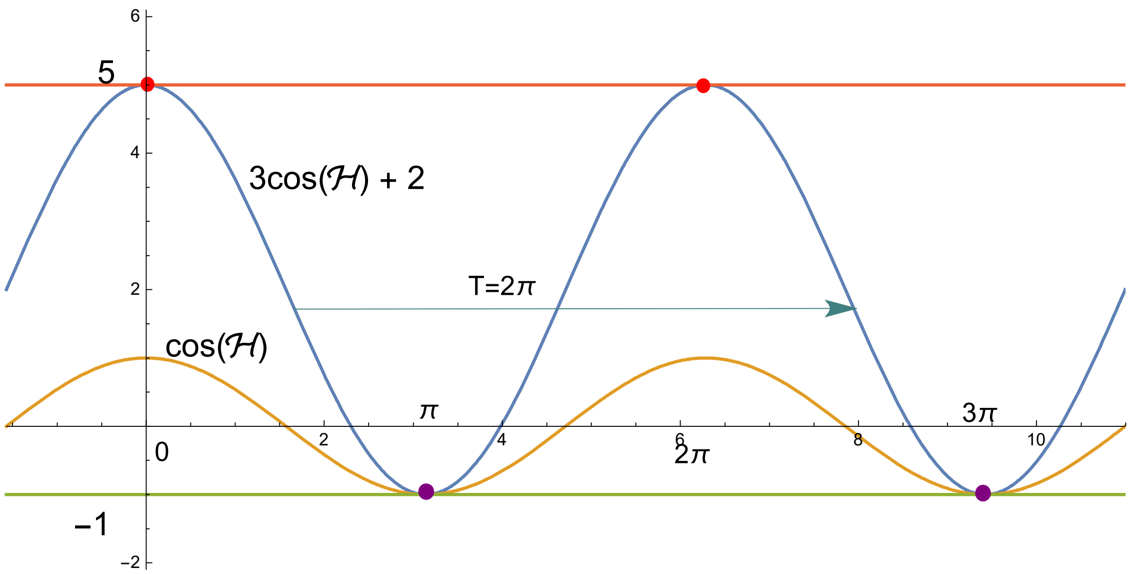
Como 3 cos $(\mathcal{H})$ + 2 es una dilatación según las "y" al triple de cos $(\mathcal{H})$ y una traslación rígida de esta última según las "y" en dos unidades hacia arriba (ver gráfico)

+-+

```
Plot[{3 Cos[𝓗] + 2, Cos[𝓗], -1, 5}, {𝓗, -π/2, 7/2 π},
 PlotRange → {{-π/2, 7/2 π}, {-2.1, 6.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

represen·· coseno coseno

rango de representación cociente de aspecto



+-+

los valores Máximos = 5 se dan en los máximos de cos $(\mathcal{H})$

$x_M = 0 + k \cdot 2\pi = k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

los valores Mínimos = -1 se dan en los mínimos de cos $(\mathcal{H})$

$x_m = \pi + z \cdot 2\pi = (2z+1)\pi,\ z \in \mathbb{Z}$

Ahora para obtener los máximos de 3 cos (-x) + 2

y como $\mathcal{H}$ = -x , reemplazamos para despejar x

$-x = k \cdot 2\pi \implies x = -k \cdot 2\pi$

Entonces, los máximos de 3 cos (-x) + 2 se dan en :

$$x_M = -k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

y el valor Máximo que alcanza f (x) = 3 cos (-x) +2 es 5

----

para obtener los mínimos de 3 cos (-x) + 2

y como $\mathcal{H}$ = -x , reemplazamos para despejar x

$-x = (2z+1)\pi \implies x = -(2z+1)\pi$

Entonces, los mínimos de 3 cos (-x) + 2 se dan en :

$$x_m = -(2z+1)\pi, \quad z \in \mathbb{Z}$$

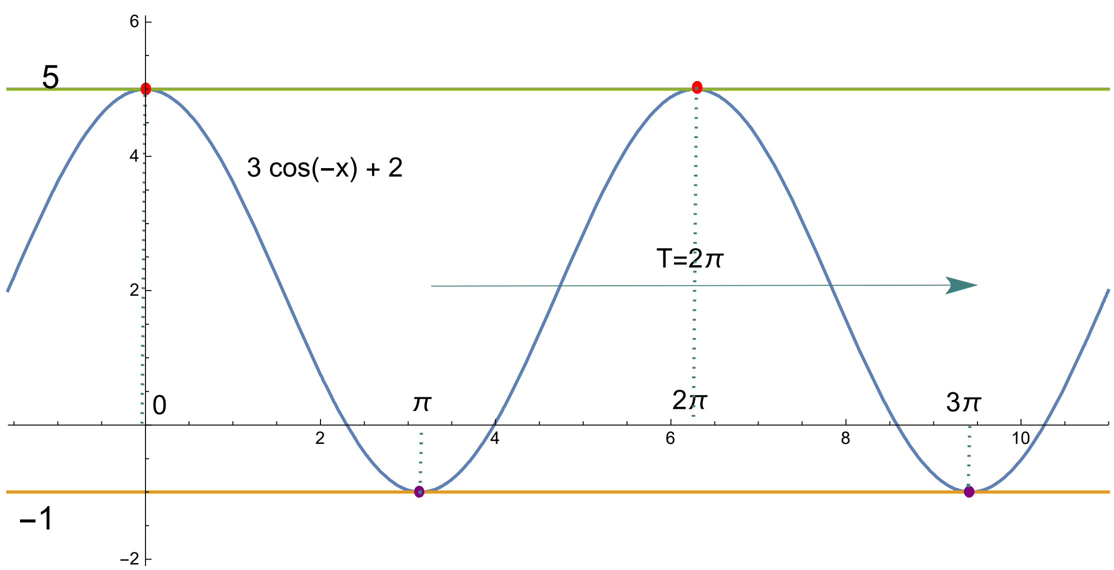
y el valor Mínimo que alcanza f (x) = 3 cos (-x) +2 es -1

Veamos un gráfico de f (x) = 3 cos (-x) + 2 entre $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{7}{2}\pi\right]$

+-+

```
Plot[{3 Cos[-x] + 2, -1, 5}, {x, -π/2, 7/2 π},
 PlotRange → {{-π/2, 7/2 π}, {-2.1, 6.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

represen·· coseno cociente de aspecto



+-+

Ej 18 d) con f (x) = 2 cos (3 x) - 1 hallar imagen de f, valor máximo y mínimo y en cuáles x se da

Como A = 2 y Amplitud = |A| = |2| = 2 el conjunto Imagen se dilatará 2
de los valores máximos y mínimos de cos (x)

Pero además, como tenemos una traslación según las "y" en 1 unidad hacia abajo

Entonces Imagen (f) = [-3, 1]

Como $b = 3$ **y** $|b| = \frac{2\pi}{T} \implies |3| = 3 = \frac{2\pi}{T} \implies T = \frac{2}{3}\pi$

Tiene período $\frac{2}{3}\pi$

Para obtener los valores máximos y mínimos de $2\cos(3x) - 1$ **usaremos la sustituciòn**

$\mathcal{H} = 3x$ **para calcular los valores máximos y mínimos de** $2\cos(\mathcal{H}) - 1$

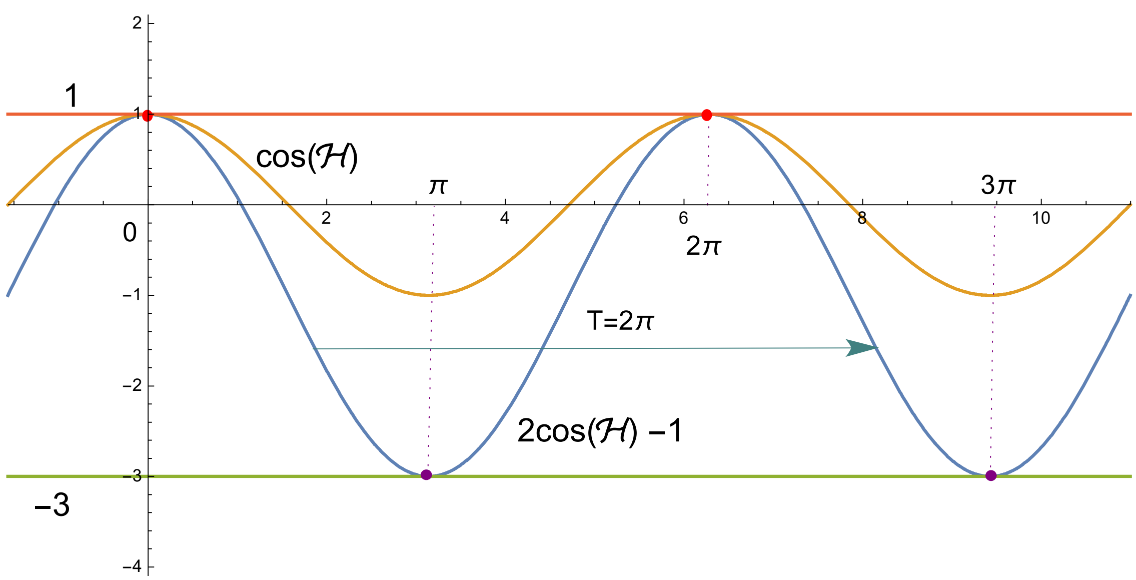
Como $2\cos(\mathcal{H}) - 1$ **es una dilatación según las "y" al doble de cos** $(\mathcal{H})$ **y una traslación rígida de esta última según las "y" en una unidad para abajo (ver gráfico)**

+-+

```
Plot[{2 Cos[𝓗] - 1, Cos[𝓗], -3, 1}, {𝓗, -π/2, 7/2 π},
 PlotRange → {{-π/2, 7/2 π}, {-4.1, 2.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

represen·· coseno coseno

rango de representación cociente de aspecto



+-+

los valores Máximos = 1 se dan en los máximos de cos $(\mathcal{H})$

$x_M = 0 + k \cdot 2\pi = k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

los valores Mínimos = -3 se dan en los mínimos de cos $(\mathcal{H})$

$x_m = \pi + z \cdot 2\pi = (2z + 1)\pi, \quad z \in \mathbb{Z}$

Ahora para obtener los máximos de $2\cos(3x) - 1$

y como $\mathcal{H} = 3x$ **, reemplazamos para despejar x**

$$3x = k \cdot 2\pi \implies x = \frac{k \cdot 2\pi}{3} = k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

Entonces, los máximos de 2 cos (3 x) - 1 se dan en :

$$x_M = k \cdot \frac{2}{3}\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

y el valor Máximo que alcanza f (x) = 2 cos (3 x) - 1 es 1

----

para obtener los mínimos de 2 cos (3 x) - 1

y como $\mathcal{H} = 3x$, reemplazamos para despejar x

$$3x = (2z+1)\pi \implies x = \frac{(2z+1)\pi}{3} = (2z+1)\cdot\frac{\pi}{3}$$

Entonces, los mínimos de 2 cos (3 x) - 1 se dan en :

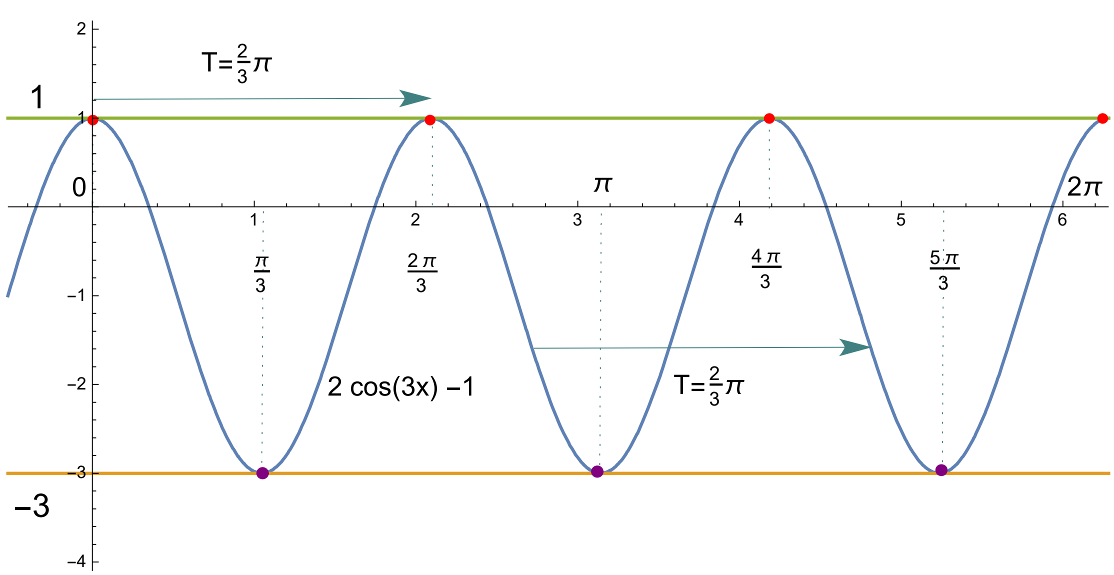
$$x_m = (2z+1)\cdot\frac{\pi}{3}, \qquad z \in \mathbb{Z}$$

y el valor Mínimo que alcanza f (x) = 2 cos (3 x) -1 es -3

Veamos un gráfico de f (x) = 2 cos (3 x) - 1 entre $\left[-\frac{\pi}{6}, 2\pi\right]$

+-+

```
Plot[{2 Cos[3 x] - 1, -3, 1}, {x, -π/6, 2 π},
 PlotRange → {{-π/6, 2 π}, {-4.1, 2.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
represen··· coseno rango de representación cociente de aspecto



+-+

Ejercicio 19.- Hallar la amplitud y el período de f.

a. $f(x)=\cos(x+\pi)$ **b.** $f(x)=3\,\mathrm{sen}(2x)$

c. $f(x)=-\mathrm{sen}(3x-\pi)$ **d.** $f(x)=2\cos\left(\dfrac{x}{2}+\pi\right)$

Ej 19 a) **Sea** $f(x)=\cos(x+\pi)$ **Hallar A y T**

$f(x) = 1 \cdot \cos(x+\pi)$

Como $A = 1$ **y Amplitud** $= |A|$ $\Longrightarrow$

Amplitud = 1

$f(x) = \cos(1 \cdot x + \pi)$

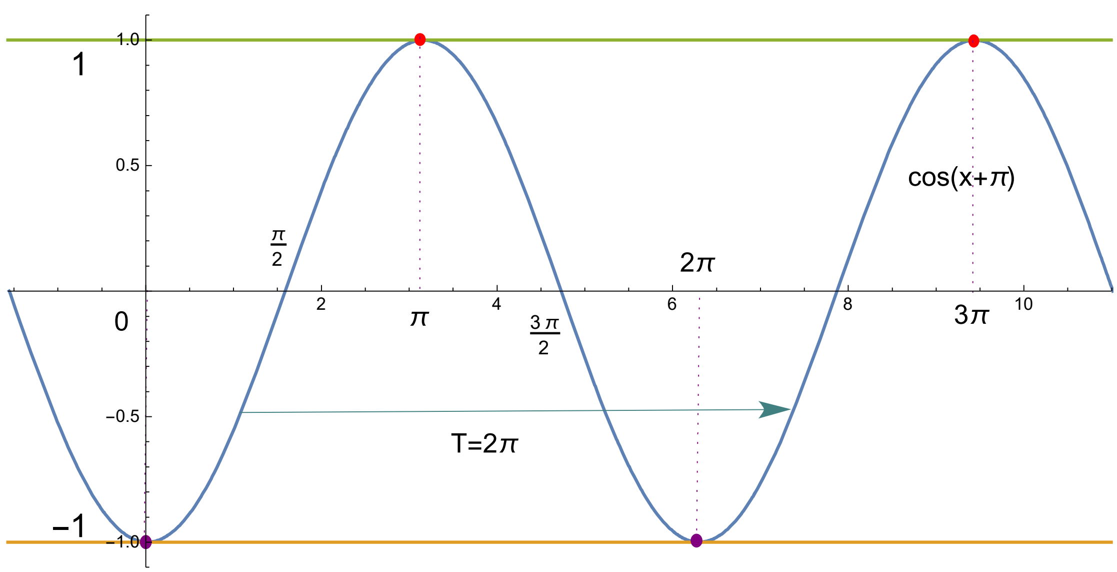
Como $b = 1$ **y** $|b| = \dfrac{2\pi}{T}$ $\Longrightarrow$ $|1| = 1 = \dfrac{2\pi}{T}$ $\Longrightarrow$ $T = \dfrac{2}{1}\pi = 2\pi$

Tiene período 2 π

Veamos un gráfico de $f(x) = \cos(x+\pi)$ **entre** $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{7}{2}\pi\right]$

+-+

```
Plot[{Cos[x + π], -1, 1}, {x, -π/2, 7/2 π}, PlotRange → {{-π/2, 7/2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre⋯ coseno rango de representación cociente de aspecto



Ej 19 b) **Sea** $f(x) = 3\,\mathrm{sen}(2x)$ **Hallar A y T**

$f(x) = 3 \cdot \cos(2x)$

Como A = 3 y Amplitud = |A| $\Longrightarrow$

Amplitud = 3

----

f (x) = cos (1 · x + π)

Como b = 2 y $|b| = \frac{2\pi}{T} \Longrightarrow |2| = 2 = \frac{2\pi}{T} \Longrightarrow T = \frac{2}{2}\pi = \pi$

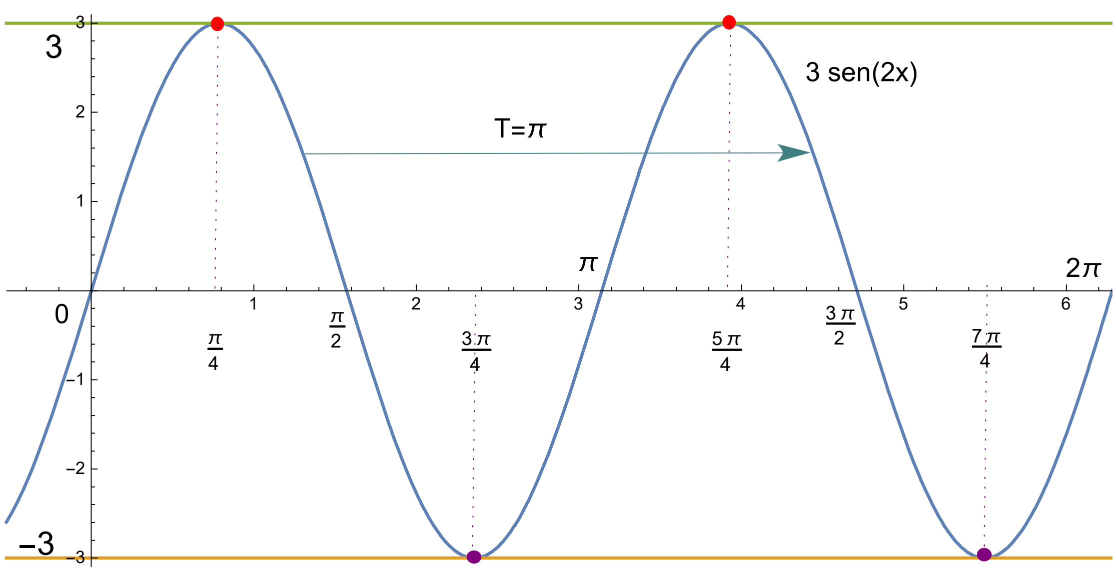
Tiene período π

Veamos un gráfico de f (x) = 3 sen (2 x) entre $\left[-\frac{\pi}{6}, 2\pi\right]$

+-+

Plot$\left[\{3\,\mathrm{Sin}[2\,x], -3, 3\}, \left\{x, -\frac{\pi}{6}, 2\pi\right\}, \mathrm{PlotRange} \to \left\{\left\{-\frac{\pi}{6}, 2\pi\right\}, \{-3.1, 3.1\}\right\}, \mathrm{AspectRatio} \to 0.5\right]$

represen·· seno rango de representación cociente de aspecto



Ej 19 c) Sea f (x) = - sen (3 x - π) Hallar A y T

f (x) = (-1) · sen (3 x - π)

Como A = -1 y Amplitud = |A| = |-1| = 1 $\Longrightarrow$

Amplitud = 1

----

f (x) = cos (1 · x + π)

Como b = 3 y $|b| = \frac{2\pi}{T} \Longrightarrow |3| = 3 = \frac{2\pi}{T} \Longrightarrow T = \frac{2}{3}\pi$

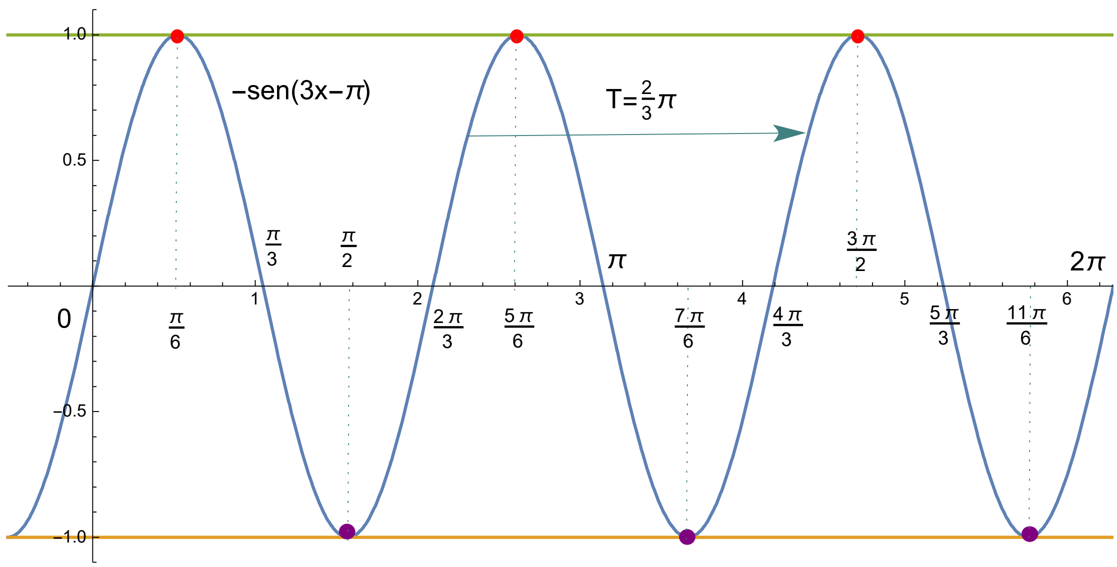
Tiene período $\frac{2}{3}\pi$

Veamos un gráfico de $f(x) = -\operatorname{sen}(3x - \pi)$ **entre** $\left[-\frac{\pi}{6}, 2\pi\right]$

+-+

```
Plot[{-Sin[3 x - π], -1, 1}, {x, -π/6, 2 π},
 PlotRange → {{-π/6, 2 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

represe··· seno rango de representación cociente de aspecto



Ej 19 d) **Sea** $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$ **Hallar A y T**

$f(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2} x + \pi\right)$

Como $A = 2$ **y** **Amplitud** $= |A| = |2| = 2 \implies$

Amplitud = 2

$f(x) = \cos(1 \cdot x + \pi)$

Como $b = \frac{1}{2}$ **y** $|b| = \frac{2\pi}{T} \implies \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} = \frac{2\pi}{T} \implies T = 4\pi$

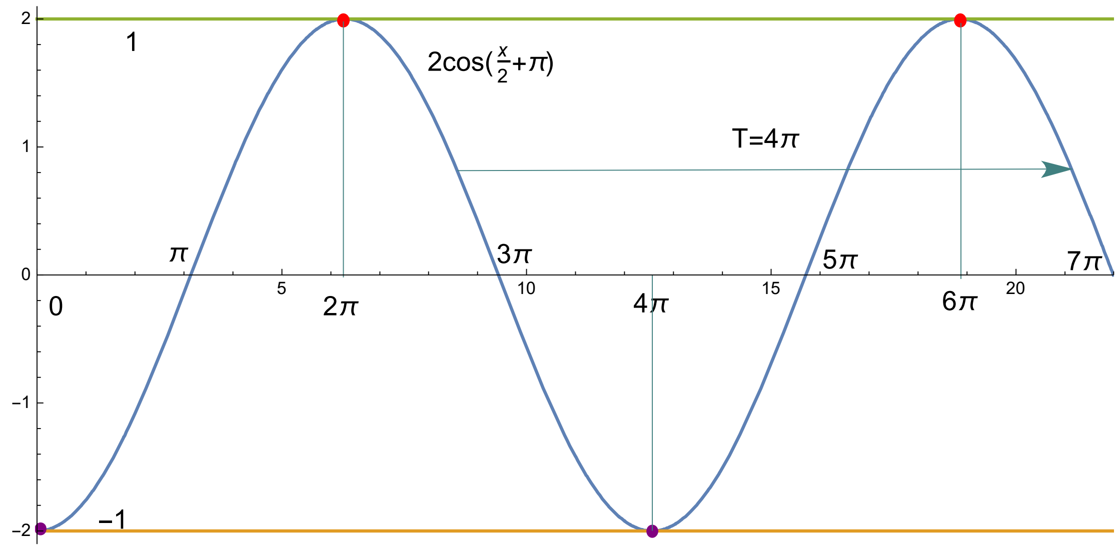
Tiene período 4π

Veamos un gráfico de $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$ **entre** $[0, 7\pi]$

+-+

```
Plot[{2 Cos[x/2 + π], -2, 2}, {x, 0, 7 π}, PlotRange → {{0, 7 π}, {-2.1, 2.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

represen·· coseno rango de representación cociente de aspecto



++

Ejercicio 20.- Sea $f(x) = -3\,\text{sen}(x+\pi)+k$. Determinar el valor de k para que $\text{Im}\, f = [-4;2]$. Con el valor de k hallado, dar un x_0 tal que $f(x_0) = -4$ y un x_1 tal que $f(x_1) = 2$.

Ej 20 Sea $f(x) = -3\,\text{sen}(x+\pi)+k$ Hallar k para que Imagen (f) = [-4, 2]

Por una parte, como $A = -3$ y $|A| = |-3| = 3$ es la Amplitud|

el conjunto Imagen de f (x) será : $[-3+k, 3+k]$

Por hipótesis Imagen de f tiene que ser [-4, 2]

Entonces k = -1

Con este valor de $k = -1$ dar un x_0 tal que $f(x_0) = -4$ y un x_1 tal que $f(x_1) = -2$

Con $k = -1$, $f(x) = -3\,\text{sen}(x+\pi) - 1$

Como $f(x_0) = -4$ entonces $-3\,\text{sen}(x_0+\pi) - 1 = -4 \implies -3\,\text{sen}(x_0+\pi) = -4+1$

$$\implies -3\,\text{sen}(x_0+\pi) = -3 \implies \text{sen}(x_0+\pi) = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$\implies \text{sen}(x_0+\pi) = 1$$

Si llamamos $\mathcal{H} = x_0+\pi$ resolver $\text{sen}(\mathcal{H}) = 1$ es encontrar los máximos de $\text{sen}(\mathcal{H})$

y como los máximos de $\text{sen}(\mathcal{H})$ se dan para

$$\mathcal{H} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

reemplazamos $\mathcal{H}$

$$x_0+\pi = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \implies x_0 = -\pi + \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi = \frac{(-2+1)}{2}\pi + k\cdot 2\pi = -\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi$$

es decir : $x_0 = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$

Para dar un x_0 que cumpla $f(x_0) = -4$

sólo basta elegir un valor de k por ejemplo, $k = 0 \implies x_0 = -\frac{\pi}{2} + 0 \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{2}$

Por lo tanto

$$x_0 = -\frac{\pi}{2} \text{ para que } f(x_0) = -4$$

De manera similar encontrar un x_1 tal que $f(x_1) = 2$

planteamos $f(x_1) = 2$ con $f(x) = -3\,\text{sen}(x + \pi) - 1$

$-3\,\text{sen}(x_1 + \pi) - 1 = 2 \implies -3\,\text{sen}(x_1 + \pi) = 2 + 1 = 3 \implies \text{sen}(x_1 + \pi) = \frac{3}{-3} = -1$

$\implies \text{sen}(x_1 + \pi) = -1$

Hacemos lo mismo que antes : llamamos $\mathcal{H} = x_1 + \pi \implies \text{sen}(\mathcal{H}) = -1$

es ecnoctrar los mínimos de $\text{sen}(\mathcal{H})$

que se dan para

$$\mathcal{H} = \frac{3}{2}\pi + z \cdot 2\pi \quad , \quad z \in \mathbb{Z}$$

reemplazamos $\mathcal{H}$ para despejar x :

$x_1 + \pi = \frac{3}{2}\pi + z \cdot 2\pi \implies x_1 = -\pi + \frac{3}{2}\pi + z \cdot 2\pi = \frac{(-2+3)}{2}\pi + z \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} + z \cdot 2\pi \implies$

$\implies x_1 = \frac{\pi}{2} + z \cdot 2\pi \quad , \quad z \in \mathbb{Z}$

Basta elegir un valor de z para obtener un $x_1 : f(x_1) = 2$

sea $z = 0 \implies x_1 = \frac{\pi}{2} + 0 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$

Por lo tanto

$$x_1 = \frac{\pi}{2} \text{ para que } f(x_1) = 2$$

Verifiquemos que efectivamente con $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ es $f(x_0) = -4$

y que con $x_1 = \frac{\pi}{2}$ es $f(x_1) = 2$ para $f(x) = -3\,\text{sen}(x + \pi) - 1$

----

con $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ reemplacemos en $f(x)$:

$f(x_0) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -3\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\right) - 1 = -3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 = -3 \cdot 1 + 1 = -3 - 1 = -4$ si cumple

----

Ahora con $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$ ver que reemplazando da $f(x_1) = 2$

$f(x_1) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -3\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\right) - 1 = -3\,\text{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) - 1 = (-3)\cdot(-1) - 1 = 3 - 1 = 2$ **si cumple**

++

Ejercicio 21.- Hallar los ceros, el conjunto de positividad y el de negatividad, los máximos y mínimos y la imagen de f. Hacer un gráfico aproximado.

a. $f(x) = 3\,\text{sen}\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ en $[0; 2\pi]$

b. $f(x) = 2\cos(3x - \pi) - 1$ en $[\pi; 2\pi]$

c. $f(x) = 4\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ en $[-\pi; \pi]$

d. $f(x) = 2\,\text{sen}\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right) - 1$ en $[-\pi; \pi]$

Ej 21 a) Hallar C^0, C^+, C^-, máximos y mínimos e Imagen de f con gráfico aprox.

$f(x) = 3\,\text{sen}\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ **en** $[0, 2\pi]$

$f(x) = 3\,\text{sen}\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 3\,\text{sen}\left[2\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right)\right]$

+-+-+-+-+-+-+-+-+-

Nota : respecto a sen (x) f (x) es una

.- compresión según el eje x a la mitad lo que hace reducir el príodo a $T = \pi$

.- una traslación respecto de las x en $\dfrac{\pi}{8}$ para la izquierda

.- una dilatación al triple según las y

+-+-+-+-+-+-+-+-+-

Como $A = 3$ y $|A|$ es la Amplitud $\Longrightarrow$ Amplitud = 3

y como no hay una traslación según el eje de la "y" será

Imagen (f) = [-3, 3]

----

como $b = 2$ y b se relaciona con el período T a partir de $|b| = \dfrac{2\pi}{T}$

tenemos $|2| = 2 = \dfrac{2\pi}{T} \Longrightarrow T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

Período de f (x) es $T = \pi$

Calculemos el C^0

$C^0 = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) = 0\}$

planteamos $f(x) = 0$

$$f(x) = 3\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{0}{3} = 0 \quad \Longrightarrow$$

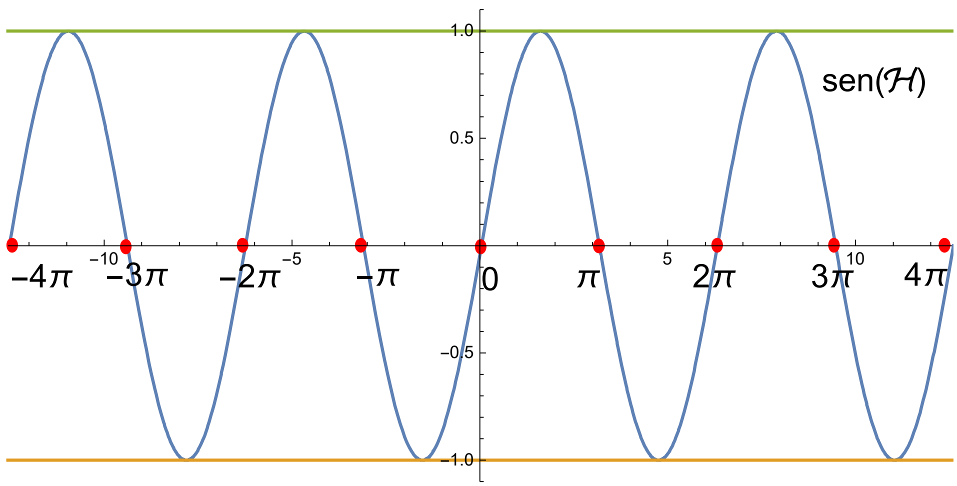
$$\Longrightarrow \quad \text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Si llamamos $\mathcal{H} = 2x + \frac{\pi}{4}$ **tenemos que resolver la ecuación** $\text{sen}(\mathcal{H}) = 0$

es decir encontrar los ceros del seno como paso intermedio

Recordando que $\text{sen}(\mathcal{H}) = 0$ **para** $\mathcal{H} = k \cdot \pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

```
Plot[{ Sin[ℋ], -1, 1}, {ℋ, -4 π, 4 π}, PlotRange → {{-4 π, 4 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
repres··· seno rango de representación cociente de aspecto



reemplazamos $\mathcal{H} = 2x + \frac{\pi}{4}$ **en las soluciones** $\mathcal{H} = k \cdot \pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$ **despejamos x**

$$2x + \frac{\pi}{4} = k \cdot \pi \quad \Longrightarrow \quad 2x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{-\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi}{2} = -\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}$$

$\Longrightarrow$ **los ceros de** $f(x) = 3\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ **son :**

$$x = -\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Veamos cuáles de estas infinitas soluciones están en el intervalo $[0, 2\pi]$ $([0, 720°])$

$[0, 2\pi]$ $([0, 720°])$ $\quad 2\pi = \frac{16}{8}\pi$

----

si k = 0 $\quad x = -\frac{\pi}{8} + 0 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{8}$ **no** $\in [0, 2\pi]$

si k = 1 $\quad x = -\frac{\pi}{8} + 1 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{(-1+4)}{8}\pi = \frac{3}{8}\pi$ **sí** $\in [0, 2\pi]$

si k = 2 $\quad x = -\frac{\pi}{8} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{(-1+8)}{8}\pi = \frac{7}{8}\pi$ **sí** $\in [0, 2\pi]$

si k = 3 $\quad x = -\frac{\pi}{8} + 3 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2} = \frac{(-1+12)}{8}\pi = \frac{11}{8}\pi$ $\quad$ sí $\in [0, 2\pi]$

si k = 4 $\quad x = -\frac{\pi}{8} + 4 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{8} + 2\pi = \frac{(-1+16)}{8}\pi = \frac{15}{8}\pi$ $\quad$ sí $\in [0, 2\pi]$

si k = 5 $\quad x = -\frac{\pi}{8} + 5 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{8} + \frac{5\pi}{2} = \frac{(-1+20)}{8}\pi = \frac{19}{8}\pi$ $\quad$ no $\in [0, 2\pi]$

Ahora con k < 0

si k = -1 $\quad x = -\frac{\pi}{8} + (-1) \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} = \frac{(-1-4)}{8}\pi = -\frac{5}{8}\pi$ $\quad$ no $\in [0, 2\pi]$

Por lo tanto, el conjunto de ceros de f (x) en $[0, 2\pi]$ es :

$$C^0 = \left\{\frac{3}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi\right\}$$

Cálculo del C^+ y C^-

Como $f(x) = 3 \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ es continua

utilizaremos el corolario del Teo de Bolzano que afirma que entre dos ceros consecutivos

o bien f (x) > 0 o f (x) < 0 en dicho intervalo entre raíces consecutivas

Tenemos los ceros o raíces entre $[0, 2\pi]$:

$C^0 = \left\{\frac{3}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi\right\}$ y $[0, 2\pi]$ como Dom (f)

Entonces los intervalos entre raíces, de evaluación de f (x), serán :

$$\left[0, \frac{3}{8}\pi\right); \left(\frac{3}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi\right); \left(\frac{7}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi\right); \left(\frac{11}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi\right); \left(\frac{15}{8}\pi, 2\pi\right]$$

	$[0, \frac{3\pi}{8})$	$(\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8})$	$(\frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8})$	$(\frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8})$	$(\frac{15\pi}{8}, 2\pi]$
X (tomamos el promedio del intervalo)	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{31\pi}{16}$
f(x)	2.77164	-3	3	-3	1.14805
f(x) es	+	-	+	-	+

Entonces C^+ y C^- de $f(x) = 3 \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ en $[0, 2\pi]$, son :

$$C^+ = \left[0, \frac{3}{8}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi\right) \cup \left(\frac{15}{8}\pi, 2\pi\right]$$

y

$C^- = \left(\frac{3}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi\right) \cup \left(\frac{11}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi\right)$

Calculemos los máximos y mínimos de $f(x) = 3\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ **en** $[0, 2\pi]$

Máximos de $f(x) = 3\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ **en** $[0, 2\pi]$ **:**

$f(x) = 3\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

Llamamos $\mathcal{H} = 2x + \frac{\pi}{4} \implies$ **buscamos los máximos de** $3\,\text{sen}(\mathcal{H})$

Mirando el gráfico de $\text{sen}(\mathcal{H})$ **vemos que los máximos se dan para**

$$\mathcal{H} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad , \; k \in \mathbb{Z}$$

Reemplazando $\mathcal{H}$**, despejamos x :**

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \implies 2x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi = \frac{(-1+2)}{4}\pi + k \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$\implies x = \frac{\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi}{2} = \frac{\pi}{8} + k \cdot \pi$$

en

$$x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{se dan los máximos de } f(x) = 3\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Veamos cuáles de ellas pertenecen a $[0, 2\pi]$ $\left(\frac{16}{8}\pi = 2\pi\right)$

si $k = 0$ $\quad x = \frac{\pi}{8} + 0 \cdot \pi = \frac{\pi}{8}$ $\qquad$ sí $\in [0, 2\pi]$

si $k = 1$ $\quad x = \frac{\pi}{8} + 1 \cdot \pi = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9}{8}\pi$ $\qquad$ sí $\in [0, 2\pi]$

si $k = 2$ $\quad x = \frac{\pi}{8} + 2 \cdot \pi = \frac{\pi}{8} + 2\pi = \frac{17}{8}\pi$ $\qquad$ no $\in [0, 2\pi]$

Ahora con $k < 0$

si $k = -1$ $\quad x = \frac{\pi}{8} + (-1) \cdot \pi = \frac{\pi}{8} - \pi = -\frac{7}{8}\pi$ $\qquad$ no $\in [0, 2\pi]$

Por lo tanto, los máximos de $f(x) = 3\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ **que pertenecen a** $[0, 2\pi]$ **son :**

$$x_M = \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{9}{8}\pi\right\}$$

Mínimos de $f(x) = 3\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ **en** $[0, 2\pi]$:

$f(x) = 3\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

Llamamos $\mathcal{H} = 2x + \frac{\pi}{4} \implies$ **buscamos los mínimos de** $3\,\text{sen}(\mathcal{H})$

Mirando el gráfico de sen $(\mathcal{H})$ **vemos que los mínimos se dan para**

$$\mathcal{H} = \frac{3}{2}\pi + z \cdot 2\pi \quad , z \in \mathbb{Z}$$

Reemplazando $\mathcal{H}$, **despejamos** x :

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi + z \cdot 2\pi \implies 2x = -\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\pi + z \cdot 2\pi = \frac{(-1+6)}{4}\pi + z \cdot 2\pi = \frac{5}{4}\pi + z \cdot 2\pi$$

$$\implies x = \frac{\frac{5}{4}\pi + z \cdot 2\pi}{2} = \frac{5}{8}\pi + z \cdot \pi$$

en :

$$x = \frac{5}{8}\pi + z \cdot \pi \,, \quad z \in \mathbb{Z} \quad \text{se dan los mínimos de } f(x) = 3\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Veamos cuáles de ellas pertenecen a $[0, 2\pi]$ $\left(\frac{16}{8}\pi = 2\pi\right)$

si $z = 0$ $\quad x = \frac{5}{8}\pi + 0 \cdot \pi = \frac{5}{8}\pi$ — sí $\in [0, 2\pi]$

si $z = 1$ $\quad x = \frac{5}{8}\pi + 1 \cdot \pi = \frac{5}{8}\pi + \pi = \frac{13}{8}\pi$ — sí $\in [0, 2\pi]$

si $z = 2$ $\quad x = \frac{5}{8}\pi + 2 \cdot \pi = \frac{5}{8}\pi + 2\pi = \frac{21}{8}\pi$ — no $\in [0, 2\pi]$

Ahora con $z < 0$

si $z = -1$ $\quad x = \frac{5}{8}\pi + (-1) \cdot \pi = \frac{5}{8}\pi - \pi = -\frac{3}{8}\pi$ — no $\in [0, 2\pi]$

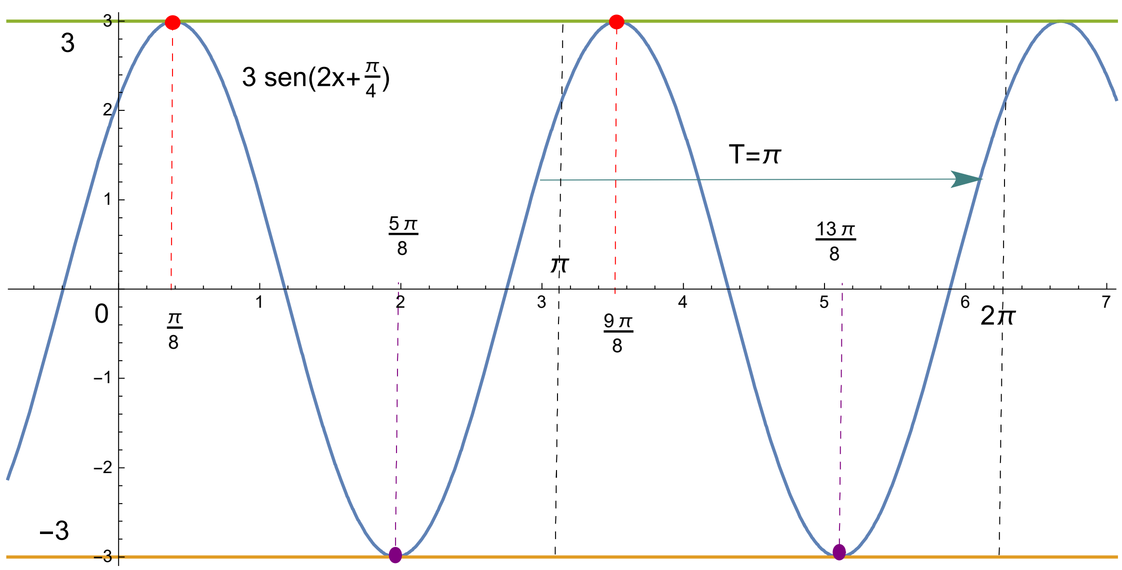
Por lo tanto, los mínimos de $f(x) = 3\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ **que pertenecen a** $[0, 2\pi]$ **son :**

$$x_m = \left\{\frac{5}{8}\pi, \ \frac{13}{8}\pi\right\}$$

Veamos un gráfico de $f(x) = 3\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

```
Plot[{ 3 Sin[2 x + π/4], -3, 3}, {x, -π/4, 9/4 π},
  PlotRange → {{-π/4, 9/4 π}, {-3.1, 3.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

representa… | seno | cociente de aspecto



Ej 21 b) Hallar C^0, C^+, C^-, máximos y mínimos e Imagen de f con gráfico aprox.

f (x) = 2 cos $(3x - \pi) - 1$ en $[\pi, 2\pi]$

f (x) = 2 cos $(3x - \pi) - 1 = 2\cos\left[3\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]$

+-+-+-+-+-+-+-+-

Nota : respecto a cos (x) f (x) es una

.- compresión según el eje x a 1 tercio lo que hace reducir el período a $T = \frac{2\pi}{3}$

.- una traslación respecto de las "x" en $\frac{\pi}{3}$ para la derecha

.- una dilatación al doble según las y

.- una traslación respecto de las "y" en 1 hacia abajo

+-+-+-+-+-+-+-+-

Como A = 2 y |A| es la Amplitud ⟹ Amplitud = 2

y como hay una traslación según el eje de la "y" en 1 hacia abajo será

Imagen (f) = [-3, 1]

---

como b = 3 y b se relaciona con el período T a partir de $|b| = \frac{2\pi}{T}$

tenemos $|3| = 3 = \frac{2\pi}{T} \implies T = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

Período de f (x) es T = $\frac{2}{3}\pi$

Calculemos el C^0

$C^0 = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) = 0\}$

planteamos f (x) = 0

$f(x) = 2\cos(3x - \pi) - 1 = 0 \implies \cos(3x - \pi) = \frac{1}{2} \implies$

$\implies \cos(3x - \pi) = \frac{1}{2}$

Si llamamos $\mathcal{H} = 3x - \pi$ tenemos que resolver la ecuación $\cos(\mathcal{H}) = \frac{1}{2}$

es decir encontrar los ceros del coseno como paso intermedio

Mirando la tabla de valores de seno y coseno para arcos en el 1 er cuadrante

vemos que $\cos(\mathcal{H}) = \frac{1}{2}$ para $\mathcal{H} = \frac{\pi}{3}$

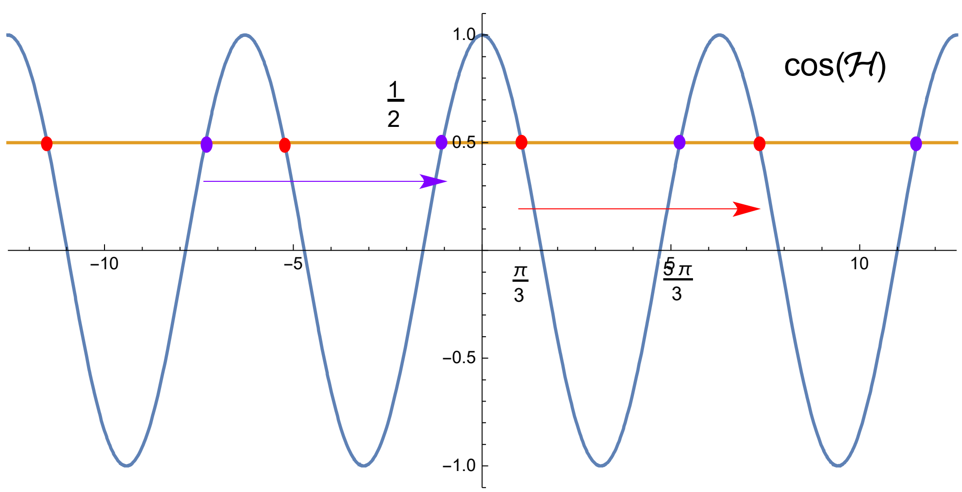
Ahora el coseno es positivo para arcos en el 1 er cuadrante y en el 4 to cuadrante

En el 1 er cuadrante, es como vimos por tabla $\mathcal{H} = \frac{\pi}{3}$

En el 4 to cuadrante será $\mathcal{H} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$

las soluciones de $\cos(\mathcal{H}) = \frac{1}{2}$ son dos conjuntos infinitos :

$S_1 : \mathcal{H} = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \ , k \in \mathbb{Z}$ ó $S_2 : \mathcal{H} = \frac{5}{3}\pi + z \cdot 2\pi \ , z \in \mathbb{Z}$



Para obtener x de f (x) tal que $\cos(3x - \pi) = \frac{1}{2}$

reemplazamos $\mathcal{H} = 3x - \pi$ para luego despejar x :

En S_1 :

$$3\,x - \pi = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\,\pi \quad \Longrightarrow \quad 3\,x = \pi + \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\,\pi = \frac{(3+1)}{3}\,\pi + k \cdot 2\,\pi = \frac{4}{3}\,\pi + k \cdot 2\,\pi \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{\frac{4}{3}\,\pi + k \cdot 2\,\pi}{3} = \frac{4}{9}\,\pi + k \cdot \frac{2}{3}\,\pi$$

Entonces $S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{4}{9}\,\pi + k \cdot \frac{2}{3}\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Veamos el conjunto S_2

En S_2 :

$$3\,x - \pi = \frac{5}{3}\,\pi + z \cdot 2\,\pi \quad \Longrightarrow \quad 3\,x = \pi + \frac{5}{3}\,\pi + z \cdot 2\,\pi = \frac{(3+5)}{3}\,\pi + z \cdot 2\,\pi = \frac{8}{3}\,\pi + z \cdot 2\,\pi \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{\frac{8}{3}\,\pi + z \cdot 2\,\pi}{3} = \frac{8}{9}\,\pi + z \cdot \frac{2}{3}\,\pi$$

Entonces $S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{8}{9}\,\pi + z \cdot \frac{2}{3}\,\pi,\ z \in \mathbb{Z}\right\}$

Por lo tanto,

$$S = S_1 \bigcup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{4}{9}\,\pi + k \cdot \frac{2}{3}\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{8}{9}\,\pi + z \cdot \frac{2}{3}\,\pi,\ z \in \mathbb{Z}\right\}$$

Este es el conjunto de ceros de $f(x) = 2\cos(3\,x - \pi) - 1$ **en todo** $\mathbb{R}$

$$C^0 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{4}{9}\,\pi + k \cdot \frac{2}{3}\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{8}{9}\,\pi + z \cdot \frac{2}{3}\,\pi,\ z \in \mathbb{Z}\right\}$$

Veamos cuáles de estas infinitas soluciones de ceros están en el intervalo $[\pi, 2\,\pi]$ $([180°, 360°])$

$[\pi, 2\,\pi]$ $([180°, 360°])$ $\quad \pi = \frac{9}{9}\,\pi \quad , \quad 2\,\pi = \frac{18}{9}\,\pi$

Para $\tilde{S_1}$ **en** $[\pi, 2\,\pi]$

$$x = \frac{4}{9}\,\pi + k \cdot \frac{2}{3}\,\pi$$

----

si $k = 0$ $\quad x = \frac{4}{9}\,\pi + 0 \cdot \frac{2}{3}\,\pi = \frac{4}{9}\,\pi$ $\qquad$ **no** $\in [\pi, 2\,\pi]$

si $k = 1$ $\quad x = \frac{4}{9}\,\pi + 1 \cdot \frac{2}{3}\,\pi = \frac{4}{9}\,\pi + \frac{2}{3}\,\pi = \frac{(4+6)}{9}\,\pi = \frac{10}{9}\,\pi$ $\qquad$ **sí** $\in [\pi, 2\,\pi]$

si $k = 2$ $\quad x = \frac{4}{9}\,\pi + 2 \cdot \frac{2}{3}\,\pi = \frac{4}{9}\,\pi + \frac{4}{3}\,\pi = \frac{(4+12)}{9}\,\pi = \frac{16}{9}\,\pi$ $\qquad$ **sí** $\in [\pi, 2\,\pi]$

si $k = 3$ $\quad x = \frac{4}{9}\,\pi + 3 \cdot \frac{2}{3}\,\pi = \frac{4}{9}\,\pi + 2\,\pi = \frac{(4+18)}{9}\,\pi = \frac{22}{9}\,\pi$ $\qquad$ **no** $\in [\pi, 2\,\pi]$

Ahora con k < 0

si k = -1 $\quad x = \frac{4}{9}\pi + (-1)\cdot\frac{2}{3}\pi = \frac{4}{9}\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{(4-6)}{9}\pi = -\frac{2}{9}\pi$ $\qquad$ no $\in [\pi, 2\pi]$

Por lo tanto, el conjunto de soluciones $\tilde{S_1}$ de f (x) en $[\pi, 2\pi]$ es :

$\tilde{S_1} = \left\{\frac{10}{9}\pi, \frac{16}{9}\pi\right\}$

Para $\tilde{S_2}$ en $[\pi, 2\pi]$ $\quad [\pi, 2\pi]$ $([180°, 360°])$ $\quad \pi = \frac{9}{9}\pi$, $2\pi = \frac{18}{9}\pi$

$x = \frac{8}{9}\pi + z\cdot\frac{2}{3}\pi$

si z = 0 $\quad x = \frac{8}{9}\pi + 0\cdot\frac{2}{3}\pi = \frac{8}{9}\pi$ $\qquad$ no $\in [\pi, 2\pi]$

si z = 1 $\quad x = \frac{8}{9}\pi + 1\cdot\frac{2}{3}\pi = \frac{8}{9}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{(8+6)}{9}\pi = \frac{15}{9}\pi$ $\qquad$ sí $\in [\pi, 2\pi]$

si z = 2 $\quad x = \frac{8}{9}\pi + 2\cdot\frac{2}{3}\pi = \frac{8}{9}\pi + \frac{4}{3}\pi = \frac{(8+12)}{9}\pi = \frac{20}{9}\pi$ $\qquad$ no $\in [\pi, 2\pi]$

Ahora con z < 0

si z = -1 $\quad x = \frac{8}{9}\pi + (-1)\cdot\frac{2}{3}\pi = \frac{8}{9}\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{(8-6)}{9}\pi = \frac{2}{9}\pi$ $\qquad$ no $\in [\pi, 2\pi]$

Por lo tanto, el conjunto de soluciones $\tilde{S_2}$ de f (x) en $[\pi, 2\pi]$ es :

$\tilde{S_2} = \left\{\frac{15}{9}\pi\right\}$

Finalmente el conjunto de ceros de f (x) = 2 cos $(3x - \pi) - 1$ en $[\pi, 2\pi]$ es :

$$C^0 = \left\{\frac{10}{9}\pi, \frac{15}{9}\pi, \frac{16}{9}\pi\right\}$$

Cálculo del C^+ y C^-

Como f (x) = 2 cos $(3x - \pi) - 1$ es continua

utilizaremos el corolario del Teo de Bolzano que afirma que entre dos ceros consecutivos

o bien f (x) > 0 o f (x) < 0 en dicho intervalo entre raíces consecutivas

Tenemos los ceros o raíces entre $[\pi, 2\pi]$:

$C^0 = \left\{\frac{10}{9}\pi, \frac{15}{9}\pi, \frac{16}{9}\pi\right\}$ y $[\pi, 2\pi]$ como Dom (f)

Entonces los intervalos entre raíces, de evaluación de f (x), serán :

$\left[\pi, \frac{10}{9}\pi\right)$; $\left(\frac{10}{9}\pi, \frac{15}{9}\pi\right)$; $\left(\frac{15}{9}\pi, \frac{16}{9}\pi\right)$; $\left(\frac{16}{9}\pi, 2\pi\right]$

	$[\pi, \frac{10\pi}{9})$	$(\frac{10\pi}{9}, \frac{15\pi}{9})$	$(\frac{15\pi}{9}, \frac{16\pi}{9})$	$(\frac{16\pi}{9}, 2\pi]$
X (tomamos el promedio del intervalo)	$\frac{19\pi}{18}$	$\frac{25\pi}{18}$	$\frac{31\pi}{18}$	$\frac{17\pi}{9}$
f(x)	1.73205	-1.73205	1.73205	-1
f(x) es	+	-	+	-

Entonces C^+ y C^- de $f(x) = 2\cos(3x-\pi) - 1$ en $[\pi, 2\pi]$, son :

$C^+ = \left[\pi, \frac{10}{9}\pi\right) \cup \left(\frac{15}{9}\pi, \frac{16}{9}\pi\right)$

y

$C^- = \left(\frac{10}{9}\pi, \frac{15}{9}\pi\right) \cup \left(\frac{16}{9}\pi, 2\pi\right]$

Calculemos los máximos y mínimos de $f(x) = 2\cos(3x-\pi) - 1$ en $[\pi, 2\pi]$

Máximos de $f(x) = 2\cos(3x-\pi) - 1$ en $[\pi, 2\pi]$:

$f(x) = 2\cos(3x-\pi) - 1$

Llamamos $\mathcal{H} = 3x - \pi$ $\Longrightarrow$ buscamos los máximos de $2\cos(\mathcal{H}) - 1$

Como el factor 2 genera una dilatación según las "y" de $\cos(\mathcal{H})$ y el -1 genera una traslación según las "y" los máximos y mínimos de $2\cos(\mathcal{H}) - 1$ se dan para los mismos x que para $\cos(\mathcal{H})$

Mirando el gráfico de $\cos(\mathcal{H})$ vemos que los máximos se dan para

$\mathcal{H} = k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Reemplazando $\mathcal{H} = 3x - \pi$, despejamos x :

$3x - \pi = k \cdot 2\pi \Longrightarrow 3x = \pi + k \cdot 2\pi \Longrightarrow x = \frac{\pi + k \cdot 2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

en

$x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2}{3}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ **se dan los máximos de $f(x) = 2\cos(3x-\pi) - 1$**

Veamos cuáles de ellas pertenecen a $[\pi, 2\pi]$ $\left(\frac{3}{3}\pi = \pi, \frac{6}{3}\pi = 2\pi\right)$

si k = 0 $\quad x = \frac{\pi}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$ **no** $\in [\pi, 2\pi]$

si k = 1 $\quad x = \frac{\pi}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi = \pi$ **sí** $\in [\pi, 2\pi]$

si k = 2 $\quad x = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$ **sí** $\in [\pi, 2\pi]$

si k = 3 $\quad x = \frac{\pi}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7}{3}\pi$ **no** $\in [\pi, 2\pi]$

Ahora con k < 0

si k = -1 $\quad x = \frac{\pi}{3} + (-1) \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\pi = -\frac{\pi}{3}$ **no** $\in [\pi, 2\pi]$

Por lo tanto, los máximos de $f(x) = 2\cos(3x - \pi) - 1$ **que pertenecen a** $[\pi, 2\pi]$ **son :**

$$x_M = \left\{\pi, \frac{5}{3}\pi\right\}$$

Mínimos de $f(x) = 2\cos(3x - \pi) - 1$ **en** $[\pi, 2\pi]$ **:**

$f(x) = 2\cos(3x - \pi) - 1$

Llamamos $\mathcal{H} = 3x - \pi \implies$ **buscamos los mínimos de** $2\cos(\mathcal{H}) - 1$

Como el factor 2 genera una dilatación según las "y" de $\cos(\mathcal{H})$ **y el** -1 **genera una traslación según las "y" los máximos y mínimos de** $2\cos(\mathcal{H}) - 1$ **se dan para los mismos x que para** $\cos(\mathcal{H})$

Mirando el gráfico de $\cos(\mathcal{H})$ **vemos que los mínimos se dan para**

$$\mathcal{H} = \pi + z \cdot 2\pi \quad , \quad z \in \mathbb{Z}$$

Reemplazando $\mathcal{H} = 3x - \pi$, **despejamos x :**

$$3x - \pi = \pi + z \cdot 2\pi \implies 3x = \pi + \pi + z \cdot 2\pi = 2\pi + z \cdot 2\pi \implies x = \frac{2\pi + z \cdot 2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi + z \cdot \frac{2}{3}\pi$$

en :

$$x = \frac{2}{3}\pi + z \cdot \frac{2}{3}\pi \, , \quad z \in \mathbb{Z}$$ **se dan los mínimos de** $f(x) = 2\cos(3x - \pi) - 1$

Veamos cuáles de ellas pertenecen a $[\pi, 2\pi]$ $\quad \left(\frac{3}{3}\pi = \pi, \ \frac{6}{3}\pi = 2\pi\right)$

si z = 0 $\quad x = \frac{2}{3}\pi + 0 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$ **no** $\in [\pi, 2\pi]$

si z = 1 $\quad x = \frac{2}{3}\pi + 1 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$ **sí** $\in [\pi, 2\pi]$

si z = 2 $\quad x = \frac{2}{3}\pi + 2 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi = \frac{6}{3}\pi = 2\pi$ **sí** $\in [\pi, 2\pi]$

Ahora con z < 0

si z = -1 $\quad x = \frac{2}{3}\pi + (-1)\cdot\frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi = 0$ $\qquad$ **no** $\in [\pi, 2\pi]$

Por lo tanto, los mínimos de $f(x) = 2\cos(3x - \pi) - 1$ **que pertenecen a** $[\pi, 2\pi]$ **son :**

$$x_m = \left\{\frac{4}{3}\pi,\ 2\pi\right\}$$

$C^0 = \left\{\frac{10}{9}\pi,\ \frac{15}{9}\pi,\ \frac{16}{9}\pi\right\}$

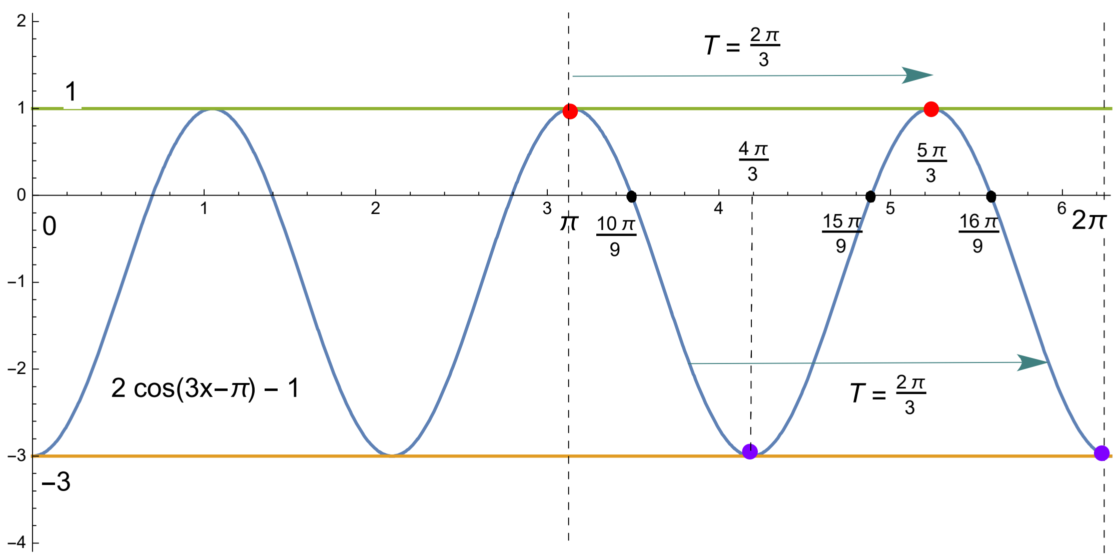
$x_M = \left\{\pi,\ \frac{5}{3}\pi\right\}$

$x_m = \left\{\frac{4}{3}\pi,\ 2\pi\right\}$

$T = \frac{2}{3}\pi$

Veamos un gráfico de $f(x) = 2\cos(3x - \pi) - 1$

```
Plot[{2 Cos[3 x - π] - 1, -3, 1}, {x, 0, 2 π}, PlotRange → {{0, 2 π}, {-4.1, 2.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
representa… coseno rango de representación cociente de aspecto



Ej 21 c) Hallar C^0, C^+, C^-, **máximos y mínimos e Imagen de f con gráfico aprox.**

$f(x) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad$ **en** $[-\pi, \pi]$

$f(x) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 4\cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$

+-+-+-+-+-+-+-+-+-

Nota : respecto a $\cos(x)$ **,** $f(x)$ **es una**

.- compresión según el eje x a la mitad lo que hace reducir el período a $T = \pi$

.- una traslación respecto de las "x" en $\frac{\pi}{4}$ **para la derecha**

.- una dilatación al cuádruple según las y

+-+-+-+-+-+-+-+-+-

Como A = 4 y |A| es la Amplitud ⟹ Amplitud = 4

y como no hay una traslación según el eje de la "y" será

Imagen (f) = [-4, 4]

----

como b = 2 y b se relaciona con el período T a partir de $|b| = \frac{2\pi}{T}$

tenemos $|2| = 2 = \frac{2\pi}{T} \implies T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Período de f (x) es T = π

Calculemos el C^0

$C^0 = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) = 0\}$

planteamos f (x) = 0

$f(x) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \implies \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

Si llamamos $\mathcal{H} = 2x - \frac{\pi}{2}$ tenemos que resolver la ecuación $\cos(\mathcal{H}) = 0$

es decir encontrar los ceros del coseno como paso intermedio

Mirando el gráfico de la función coseno

vemos que $\cos(\mathcal{H}) = 0$ para $\mathcal{H} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

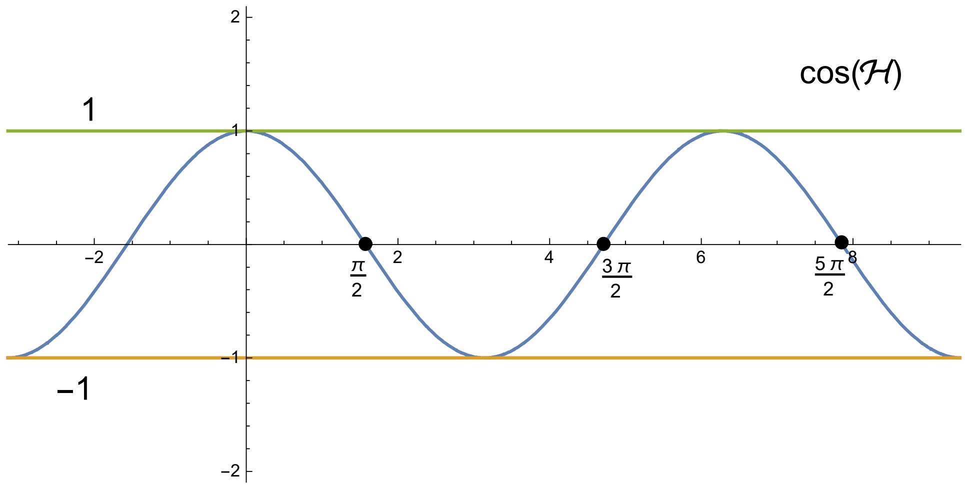
las soluciones de $\cos(\mathcal{H}) = 0$ en todo $\mathbb{R}$ es el conjunto infinito :

$S : \mathcal{H} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-

```
Plot[{Cos[ℋ], -1, 1}, {ℋ, -π, 3 π}, PlotRange → {{-π, 3 π}, {-2.1, 2.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

repre⋯ coseno rango de representación cociente de aspecto



+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-

Para obtener x de f (x) tal que $4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

reemplazamos $\mathcal{H} = 2x - \frac{\pi}{2}$ **para luego despejar x :**

S :

$2x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad \Longrightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi = \pi + k \cdot \pi = (k+1) \cdot \pi \quad \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \quad x = \frac{(k+1) \cdot \pi}{2} = (k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$

Entonces $S = \left\{x \in \mathbb{R} : x = (k+1) \cdot \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Por lo tanto, el conjunto de ceros de $f(x) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ **en todo** $\mathbb{R}$ **es :**

$C^0 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = (k+1) \cdot \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Veamos cuáles de estas infinitas soluciones de ceros están en el intervalo

$[-\pi, \pi] \quad ([-180°, 180°]) \qquad -\pi = -\frac{2}{2}\pi \quad , \quad \pi = \frac{2}{2}\pi$

Para $\tilde{S}$ **en** $[-\pi, \pi]$

$x = (k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$

----

si k = 0 $\quad x = (0+1) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ sí $\in [-\pi, \pi]$

si k = 1 $\quad x = (1+1) \cdot \frac{\pi}{2} = 2\,\frac{\pi}{2} = \pi$ $\qquad$ sí $\in [-\pi, \pi]$

si k = 2 $\quad x = (2+1) \cdot \frac{\pi}{2} = 3\,\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$ $\qquad$ **no** $\in [-\pi, \pi]$

Ahora con $k < 0$

si $k = -1$ $\quad x = (-1+1) \cdot \frac{\pi}{2} = 0$ $\qquad$ sí $\in [-\pi, \pi]$

si $k = -2$ $\quad x = (-2+1) \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ sí $\in [-\pi, \pi]$

si $k = -3$ $\quad x = (-3+1) \cdot \frac{\pi}{2} = -2\,\frac{\pi}{2} = -\pi$ $\qquad$ sí $\in [-\pi, \pi]$

si $k = -4$ $\quad x = (-4+1) \cdot \frac{\pi}{2} = -3\,\frac{\pi}{2} = -\frac{3}{2}\pi$ $\qquad$ no $\in [-\pi, \pi]$

Por lo tanto, el conjunto de soluciones $\tilde{S}$ de f (x) en $[-\pi, \pi]$ es :

$$\tilde{S} = \left\{-\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$$

Finalmente el conjunto de ceros de $f(x) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ en $[-\pi, \pi]$ es :

$$C^0 = \left\{-\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$$

Cálculo del C^+ y C^-

Como $f(x) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ es continua

utilizaremos el corolario del Teo de Bolzano que afirma que entre dos ceros consecutivos

o bien $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$ en dicho intervalo entre raíces consecutivas

Tenemos los ceros o raíces entre $[-\pi, \pi]$:

$C^0 = \left\{-\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$ y $[-\pi, \pi]$ como Dom (f)

Entonces los intervalos entre raíces, de evaluación de f (x), serán :

$$\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right); \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right); \left(0, \frac{\pi}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

	$[-\pi, -\frac{\pi}{2})$	$(-\frac{\pi}{2}, 0)$	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi]$
X (tomamos el promedio del intervalo)	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
f(x)	4	- 4	4	- 4
f(x) es	+	-	+	-

Entonces C^+ y C^- de $f(x) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ en $[-\pi, \pi]$, son :

$$C^+ = \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

y

$$C^- = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

Calculemos los máximos y mínimos de $f(x) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ en $[-\pi, \pi]$

Máximos de $f(x) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ en $[-\pi, \pi]$:

$f(x) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

Llamamos $\mathcal{H} = 2x - \frac{\pi}{2}$ $\Longrightarrow$ buscamos los máximos de $4\cos(\mathcal{H})$

Como el factor 4 genera una dilatación según las "y" de $\cos(\mathcal{H})$ los máximos y mínimos de $4\cos(\mathcal{H})$ se dan para los mismos x que para $\cos(\mathcal{H})$

Mirando el gráfico de $\cos(\mathcal{H})$ vemos que los máximos se dan para

$$\mathcal{H} = k \cdot 2\pi \quad , \ k \in \mathbb{Z}$$

Reemplazando $\mathcal{H} = 2x - \frac{\pi}{2}$, despejamos x :

$$2x - \frac{\pi}{2} = k \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$$

entonces en :

$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{se dan los máximos de } f(x) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Veamos cuáles de ellas pertenecen a $[-\pi, \pi]$ $\left(-\frac{4}{4}\pi = \pi, \ \frac{4}{4}\pi = \pi\right)$

si $k = 0$ $\quad x = \frac{\pi}{4} + 0 \cdot \pi = \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ sí $\in [-\pi, \pi]$

si $k = 1$ $\quad x = \frac{\pi}{4} + 1 \cdot \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5}{4}\pi$ $\qquad$ no $\in [-\pi, \pi]$

si $k = 2$ $\quad x = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \pi = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9}{4}\pi$ $\qquad$ no $\in [-\pi, \pi]$

Ahora con $k < 0$

si $k = -1$ $\quad x = \frac{\pi}{4} + (-1) \cdot \pi =$

$\frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi$ sí $\in [-\pi, \pi]$

si $k = -2$ $\quad x = \frac{\pi}{4} + (-2) \cdot \pi = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5}{4}\pi$ no $\in [-\pi, \pi]$

Por lo tanto, los máximos de $f(x) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ que pertenecen a $[-\pi, \pi]$ son :

$$x_M = \left\{-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}\right\}$$

Mínimos de $f(x) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ en $[-\pi, \pi]$:

$f(x) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

Llamamos $\mathcal{H} = 2x - \frac{\pi}{2}$ $\Longrightarrow$ buscamos los mínimos de $4\cos(\mathcal{H})$

Como el factor 4 genera una dilatación según las "y" de $\cos(\mathcal{H})$ los máximos y mínimos de $4\cos(\mathcal{H})$ se dan para los mismos x que para $\cos(\mathcal{H})$

Mirando el gráfico de $\cos(\mathcal{H})$ vemos que los mínimos se dan para

$\mathcal{H} = \pi + z \cdot 2\pi \quad , \ z \in \mathbb{Z}$

Reemplazando $\mathcal{H} = 2x - \frac{\pi}{2}$, despejamos x :

$2x - \frac{\pi}{2} = \pi + z \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi + z \cdot 2\pi = \frac{3}{2}\pi + z \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\frac{3}{2}\pi + z \cdot 2\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi + z \cdot \pi$

entonces en :

$x = \frac{3}{4}\pi + z \cdot \pi \ , \quad z \in \mathbb{Z}$ **se dan los mínimos de $f(x) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$**

Veamos cuáles de ellas pertenecen a $[-\pi, \pi]$ $\left(-\frac{4}{4}\pi = -\pi, \frac{4}{4}\pi = \pi\right)$

si $z = 0$ $\quad x = \frac{3}{4}\pi + 0 \cdot \pi = \frac{3}{4}\pi$ sí $\in [-\pi, \pi]$

si $z = 1$ $\quad x = \frac{3}{4}\pi + 1 \cdot \pi = \frac{3}{4}\pi + \pi = \frac{7}{4}\pi$ no $\in [-\pi, \pi]$

Ahora con $z < 0$

si $z = -1$ $\quad x = \frac{3}{4}\pi + (-1) \cdot \pi = \frac{3}{4}\pi - \pi = -\frac{\pi}{4}$ sí $\in [-\pi, \pi]$

si $z = -2$ $\quad x = \frac{3}{4}\pi + (-2) \cdot \pi = \frac{3}{4}\pi - 2\pi = -\frac{5}{4}\pi$ no $\in [-\pi, \pi]$

Por lo tanto, los mínimos de f (x) = 4 cos $\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$ **que pertenecen a** $[-\pi, \pi]$ **son :**

$$x_m = \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right\}$$

$C^0 = \left\{-\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$

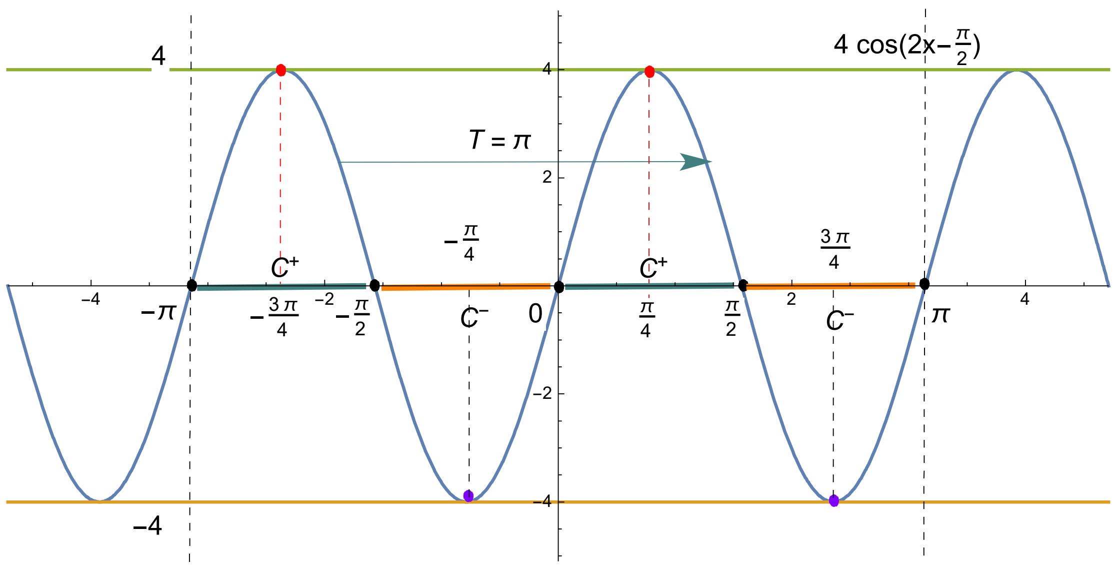
$x_M = \left\{-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}\right\}$

$x_m = \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right\}$

$T = \pi$

Veamos un gráfico de f (x) = 4 cos $\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$

```
Plot[{4 Cos[2 x - π/2], -4, 4}, {x, -3/2 π, 3/2 π},
|represen··  |coseno
 PlotRange → {{-3/2 π, 3/2 π}, {-5.1, 5.1}}, AspectRatio → 0.5]
 |rango de representación                    |cociente de aspecto
```



Ej 21 d) Hallar C^0, C^+, C^-, **máximos y mínimos e Imagen de f con gráfico aprox.**

$f(x) = 2 \operatorname{sen}\left(3x-\frac{\pi}{2}\right) - 1$ **en** $[-\pi, \pi]$

$f(x) = 2 \operatorname{sen}\left(3x-\frac{\pi}{2}\right) - 1 = 2 \operatorname{sen}\left[3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right] - 1$

+-+-+-+-+-+-+-+-+-

Nota : respecto a sen (x) f (x) es una

.- compresión según el eje x a un tercio lo que hace reducir el período a $T = \frac{2\pi}{3}$

.- una traslación respecto de las "x" en $\frac{\pi}{4}$ para la derecha

.- una dilatación al doble según las y

.- una traslación respecto de las "y" en 1 hacia abajo

+-+-+-+-+-+-+-+-+-

Como A = 2 y |A| es la Amplitud ⟹ Amplitud = 2

y como hay una traslación según el eje de la "y" en 1 hacia abajo será

Imagen (f) = [-3, 1]

----

como b = 3 y b se relaciona con el período T a partir de $|b| = \frac{2\pi}{T}$

tenemos $|3| = 3 = \frac{2\pi}{T} \implies T = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

Período de f (x) es $T = \frac{2}{3}\pi$

Calculemos el C^0

$C^0 = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) = 0\}$

planteamos f (x) = 0

$f(x) = 2\,\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 0 \implies \text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \implies$

$\implies \text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Si llamamos $\mathcal{H} = 3x - \frac{\pi}{2}$ tenemos que resolver la ecuación $\text{sen}(\mathcal{H}) = \frac{1}{2}$

es decir encontrar los ceros del seno como paso intermedio

Mirando la tabla de valores de seno y coseno para arcos en el 1 er cuadrante

vemos que $\text{sen}(\mathcal{H}) = \frac{1}{2}$ para $\mathcal{H} = \frac{\pi}{6}$

Ahora bien, el seno es positivo para arcos en el 1 er cuadrante y en el 2 do cuadrante

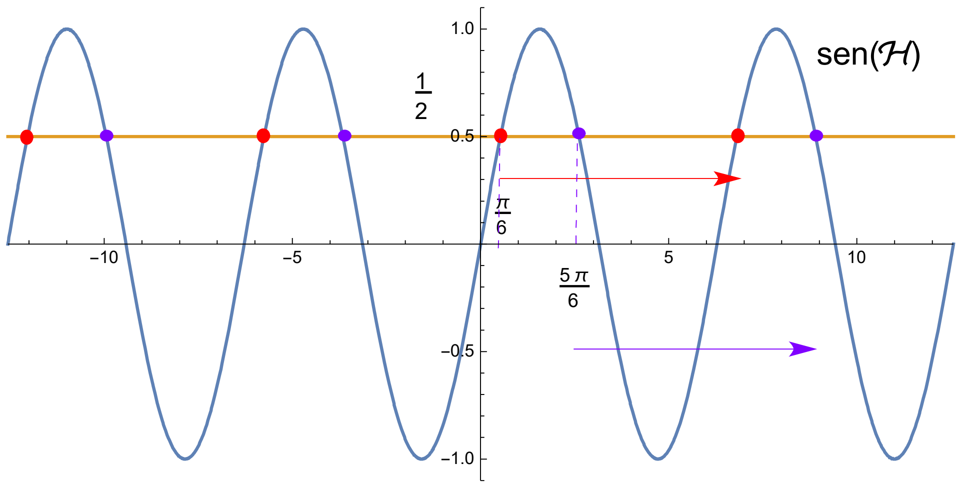
En el 1 er cuadrante, es como vimos por tabla $\mathcal{H} = \frac{\pi}{6}$

En el 2 do cuadrante será $\mathcal{H} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$

Entonces las soluciones de $\text{sen}(\mathcal{H}) = \frac{1}{2}$ son dos conjuntos infinitos :

$S_1: \mathcal{H} = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad, k \in \mathbb{Z} \quad$ ó $\quad S_2: \mathcal{H} = \frac{5}{6}\pi + z \cdot 2\pi \quad, z \in \mathbb{Z}$

```
Plot[{Sin[ℋ], 1/2}, {ℋ, -4 π, 4 π}, PlotRange → {{-4 π, 4 π}, {-1.1, 1.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
represes··· seno rango de representación cociente de aspecto



Para obtener los x de f (x) tal que $\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

reemplazamos $\mathcal{H} = 3x - \frac{\pi}{2}$ **para luego despejar x :**

En S_1 **:**

$$3x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad 3x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi = \frac{(3+1)}{6}\pi + k \cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi}{3} = \frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

Entonces $S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Veamos el conjunto S_2

En S_2 **:**

$$3x - \frac{\pi}{2} = \frac{5}{6}\pi + z \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad 3x = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{6}\pi + z \cdot 2\pi = \frac{(3+5)}{6}\pi + z \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi + z \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{\frac{4}{3}\pi + z \cdot 2\pi}{3} = \frac{4}{9}\pi + z \cdot \frac{2}{3}\pi$$

Entonces $S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{4}{9}\pi + z \cdot \frac{2}{3}\pi,\ z \in \mathbb{Z}\right\}$

Por lo tanto,

$$S = S_1 \bigcup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{4}{9}\pi + z \cdot \frac{2}{3}\pi,\ z \in \mathbb{Z}\right\}$$

Este es el conjunto de ceros de $f(x) = 2\,\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ en todo $\mathbb{R}$

$$C^0 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{4}{9}\pi + z \cdot \frac{2}{3}\pi,\ \ z \in \mathbb{Z}\right\}$$

Veamos cuáles de estas infinitas soluciones de ceros están en el intervalo $[-\pi, \pi]$ $([-180°, 180°])$

$[-\pi, \pi]$ $([-180°, 180°])$ $\quad -\pi = -\frac{9}{9}\pi \ ,\quad \pi = \frac{9}{9}\pi$

Para $\tilde{S_1}$ en $[-\pi, \pi]$

$x = \frac{2}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

----

si $k = 0 \quad x = \frac{2}{9}\pi + 0 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{9}\pi$ $\qquad$ sí $\in [-\pi, \pi]$

si $k = 1 \quad x = \frac{2}{9}\pi + 1 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{9}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{(2+6)}{9}\pi = \frac{8}{9}\pi$ $\qquad$ sí $\in [-\pi, \pi]$

si $k = 2 \quad x = \frac{2}{9}\pi + 2 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{9}\pi + \frac{4}{3}\pi = \frac{(2+12)}{9}\pi = \frac{14}{9}\pi$ $\qquad$ no $\in [-\pi, \pi]$

Ahora con $k < 0$

si $k = -1 \quad x = \frac{2}{9}\pi + (-1) \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{9}\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{(2-6)}{9}\pi = -\frac{4}{9}\pi$ $\qquad$ sí $\in [-\pi, \pi]$

si $k = -2 \quad x = \frac{2}{9}\pi + (-2) \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{9}\pi - \frac{4}{3}\pi = \frac{(2-12)}{9}\pi = -\frac{10}{9}\pi$ $\qquad$ no $\in [-\pi, \pi]$

Por lo tanto, el conjunto de soluciones $\tilde{S_1}$ de $f(x)$ en $[\pi, 2\pi]$ es :

$\tilde{S_1} = \left\{-\frac{4}{9}\pi, \frac{2}{9}\pi, \frac{8}{9}\pi\right\}$

Para $\tilde{S_2}$ en $[-\pi, \pi]$ $\quad [-\pi, \pi]$ $([180°, 360°])$ $\quad -\pi = \frac{9}{9}\pi \ ,\quad \pi = \frac{9}{9}\pi$

$x = \frac{4}{9}\pi + z \cdot \frac{2}{3}\pi$

si $z = 0 \quad x = \frac{4}{9}\pi + 0 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{9}\pi$ $\qquad$ sí $\in [-\pi, \pi]$

si $z = 1 \quad x = \frac{4}{9}\pi + 1 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{9}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{(4+6)}{9}\pi = \frac{10}{9}\pi$ $\qquad$ no $\in [-\pi, \pi]$

Ahora con $z < 0$

si $z = -1 \quad x = \frac{4}{9}\pi + (-1) \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{9}\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{(4-6)}{9}\pi = -\frac{2}{9}\pi$ $\qquad$ sí $\in [-\pi, \pi]$

si z = -2 $\quad x = \frac{4}{9}\pi + (-2)\cdot\frac{2}{3}\pi = \frac{4}{9}\pi - \frac{4}{3}\pi = \frac{(4-12)}{9}\pi = -\frac{8}{9}\pi$ $\quad$ **sí** $\in [-\pi, \pi]$

si z = -3 $\quad x = \frac{4}{9}\pi + (-3)\cdot\frac{2}{3}\pi = \frac{4}{9}\pi - \frac{6}{3}\pi = \frac{(4-18)}{9}\pi = -\frac{14}{9}\pi$ $\quad$ **no** $\in [-\pi, \pi]$

Por lo tanto, el conjunto de soluciones $\tilde{S_2}$ **de f (x) en** $[-\pi, \pi]$ **es :**

$$\tilde{S_2} = \left\{-\frac{8}{9}\pi,\ -\frac{2}{9}\pi,\ \frac{4}{9}\pi\right\}$$

Finalmente el conjunto de ceros de $f(x) = 2\,\mathrm{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ **en** $[-\pi, \pi]$ **es :**

$$C^0 = \left\{-\frac{8}{9}\pi,\ -\frac{4}{9}\pi,\ -\frac{2}{9}\pi,\ \frac{2}{9}\pi,\ \frac{4}{9}\pi,\ \frac{8}{9}\pi\right\}$$

Cálculo del C^+ **y** C^-

Como $f(x) = 2\,\mathrm{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ **es continua**

utilizaremos el corolario del Teo de Bolzano que afirma que entre dos ceros consecutivos

o bien $f(x) > 0$ **o** $f(x) < 0$ **en dicho intervalo entre raíces consecutivas**

Tenemos los ceros o raíces entre $[-\pi, \pi]$ **:**

$C^0 = \left\{-\frac{8}{9}\pi, -\frac{4}{9}\pi, -\frac{2}{9}\pi, \frac{2}{9}\pi, \frac{4}{9}\pi, \frac{8}{9}\pi\right\}$ **y** $[-\pi, \pi]$ **como Dom (f)**

Entonces los intervalos entre raíces, de evaluación de f (x), serán :

$\left[-\pi, -\frac{8}{9}\pi\right)$; $\left(-\frac{8}{9}\pi, -\frac{4}{9}\pi\right)$; $\left(-\frac{4}{9}\pi, -\frac{2}{9}\pi\right)$;

$\left(-\frac{2}{9}\pi, \frac{2}{9}\pi\right)$; $\left(\frac{2}{9}\pi, \frac{4}{9}\pi\right)$; $\left(\frac{4}{9}\pi, \frac{8}{9}\pi\right)$; $\left(\frac{8}{9}\pi, \pi\right]$

	$[-\pi, -\frac{8\pi}{9})$	$(-\frac{8\pi}{9}, -\frac{4\pi}{9})$	$(-\frac{4\pi}{9}, -\frac{2\pi}{9})$	$(-\frac{2\pi}{9}, \frac{2\pi}{9})$	$(\frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9})$	$(\frac{4\pi}{9}, \frac{8\pi}{9})$	$(\frac{8\pi}{9}, \pi]$
X (tomamos el promedio del intervalo)	$-\frac{17\pi}{18}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{18}$
f(x)	0.732051	-3	1	-3	1	-3	0.732051
f(x) es	+	-	+	-	+	-	+

Entonces C^+ **y** C^- **de** $f(x) = 2\,\mathrm{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ **en** $[-\pi, \pi]$ **, son :**

$$C^+ = \left[-\pi, -\frac{8}{9}\pi\right) \cup \left(-\frac{4}{9}\pi, -\frac{2}{9}\pi\right) \cup \left(\frac{2}{9}\pi, \frac{4}{9}\pi\right) \cup \left(\frac{8}{9}\pi, \pi\right]$$

y

$C^- = \left(-\frac{8}{9}\pi, -\frac{4}{9}\pi\right) \cup \left(-\frac{2}{9}\pi, \frac{2}{9}\pi\right) \cup \left(\frac{4}{9}\pi, \frac{8}{9}\pi\right)$

Calculemos los máximos y mínimos de $f(x) = 2\operatorname{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ en $[-\pi, \pi]$

Máximos de $f(x) = 2\operatorname{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ en $[-\pi, \pi]$:

$f(x) = 2\operatorname{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

Llamamos $\mathcal{H} = 3x - \frac{\pi}{2}$ $\Longrightarrow$ buscamos los máximos de $2\operatorname{sen}(\mathcal{H}) - 1$

Como el factor 2 genera una dilatación según las "y" de cos $(\mathcal{H})$ y el -1 genera una traslación según las "y" los máximos y mínimos de $2\operatorname{sen}(\mathcal{H}) - 1$ se dan para los mismos x que para sen $(\mathcal{H})$

Mirando el gráfico de sen $(\mathcal{H})$ vemos que los máximos se dan para

$$\mathcal{H} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Reemplazando $\mathcal{H} = 3x - \frac{\pi}{2}$, despejamos x :

$$3x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad 3x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\pi + k \cdot 2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

en

$$x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2}{3}\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{se dan los máximos de } f(x) = 2\operatorname{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$$

Veamos cuáles de ellas pertenecen a $[-\pi, \pi]$ $\quad \left(-\frac{3}{3}\pi = -\pi, \frac{3}{3}\pi = \pi\right)$

si k = 0 $\quad x = \frac{\pi}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$ $\quad$ sí $\in [-\pi, \pi]$

si k = 1 $\quad x = \frac{\pi}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi = \pi$ $\quad$ sí $\in [-\pi, \pi]$

si k = 2 $\quad x = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$ $\quad$ no $\in [-\pi, \pi]$

Ahora con k < 0

si k = -1 $\quad x = \frac{\pi}{3} + (-1) \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\pi = -\frac{\pi}{3}$ $\quad$ sí $\in [-\pi, \pi]$

si k = -2 $\quad x = \frac{\pi}{3} + (-2) \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3} - \frac{4}{3}\pi = -\pi$ $\quad$ sí $\in [-\pi, \pi]$

si k = -3 $\quad x = \frac{\pi}{3} + (-3) \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3} - \frac{6}{3}\pi = -\frac{5}{3}\pi$ $\quad$ no $\in [-\pi, \pi]$

Por lo tanto, los máximos de $f(x) = 2\cos(3x - \pi) - 1$ que pertenecen a $[-\pi, \pi]$ son :

$$x_M = \left\{-\pi,\ -\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3},\ \pi\right\}$$

Mínimos de $f(x) = 2\,\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ en $[-\pi, \pi]$:

$f(x) = 2\,\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

Llamamos $\mathcal{H} = 3x - \frac{\pi}{2}$ $\Longrightarrow$ buscamos los mínimos de $2\,\text{sen}(\mathcal{H}) - 1$

Como el factor 2 genera una dilatación según las "y" de sen $(\mathcal{H})$ y el -1 genera una traslación según las "y" los máximos y mínimos de $2\,\text{sen}(\mathcal{H}) - 1$ se dan para los mismos x que para sen $(\mathcal{H})$

Mirando el gráfico de sen $(\mathcal{H})$ vemos que los mínimos se dan para

$$\mathcal{H} = -\frac{\pi}{2} + z \cdot 2\pi \quad , \quad z \in \mathbb{Z}$$

Reemplazando $\mathcal{H} = 3x - \frac{\pi}{2}$, despejamos x :

$$3x - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + z \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad 3x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + z \cdot 2\pi = z \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{z \cdot 2\pi}{3} = z \cdot \frac{2}{3}\pi$$

en :

$$x = z \cdot \frac{2}{3}\pi \ , \quad z \in \mathbb{Z} \quad \text{se dan los mínimos de } f(x) = 2\,\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$$

Veamos cuáles de ellos pertenecen a $[-\pi, \pi]$ $\left(-\frac{3}{3}\pi = -\pi,\ \frac{3}{3}\pi = 2\pi\right)$

si $z = 0$ $\quad x = 0 \cdot \frac{2}{3}\pi = 0\,\pi = 0$ $\qquad$ sí $\in [-\pi, \pi]$

si $z = 1$ $\quad x = 1 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$ $\qquad$ sí $\in [-\pi, \pi]$

si $z = 2$ $\quad x = 2 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$ $\qquad$ no $\in [-\pi, \pi]$

Ahora con $z < 0$

si $z = -1$ $\quad x = (-1) \cdot \frac{2}{3}\pi = -\frac{2}{3}\pi$ $\qquad$ sí $\in [-\pi, \pi]$

si $z = -2$ $\quad x = (-2) \cdot \frac{2}{3}\pi = -\frac{4}{3}\pi$ $\qquad$ no $\in [-\pi, \pi]$

Por lo tanto, los mínimos de $f(x) = 2\,\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ que pertenecen a $[-\pi, \pi]$ son :

$$x_m = \left\{-\frac{2}{3}\pi\ ,\ 0\ ,\ \frac{2}{3}\pi\right\}$$

$C^0 = \left\{-\frac{8}{9}\pi, -\frac{4}{9}\pi, -\frac{2}{9}\pi, \frac{2}{9}\pi, \frac{4}{9}\pi, \frac{8}{9}\pi\right\}$ **y** $[-\pi, \pi]$**, como Dom (f) .**

$x_M = \left\{-\pi, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi\right\}$

$x_m = \left\{-\frac{2}{3}\pi, 0, \frac{2}{3}\pi\right\}$

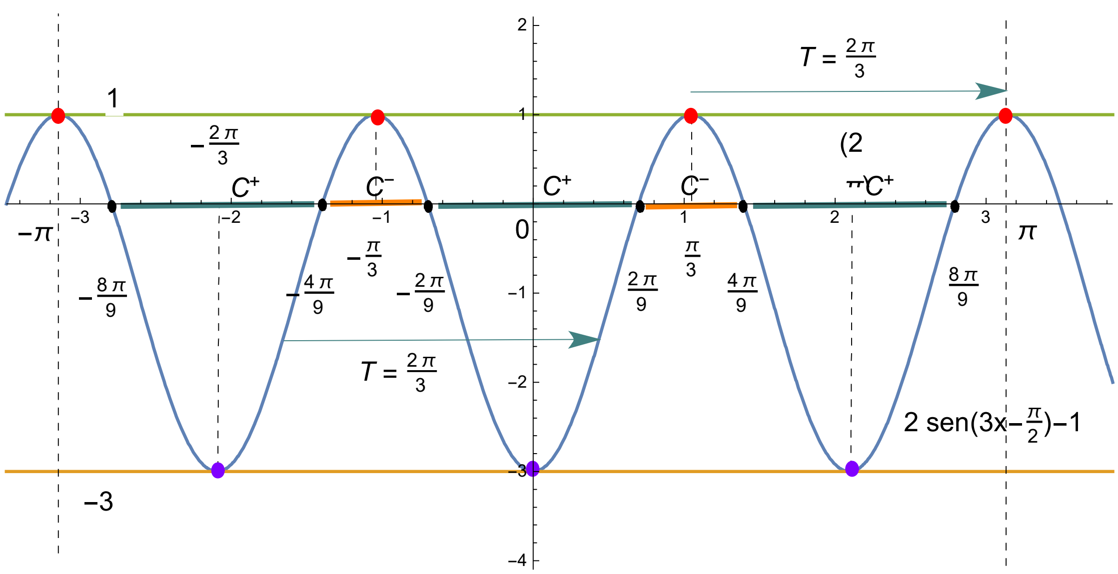
$T = \frac{2}{3}\pi$

Iamgen (f) = [-3, 1]

Veamos un gráfico de f (x) = 2 sen $\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

```
Plot[{2 Sin[3 x - π/2] - 1, -3, 1}, {x, -10/9 π, 11/9 π},
```
represen·· seno

```
 PlotRange → {{-10/9 π, 11/9 π}, {-4.1, 2.1}}, AspectRatio → 0.5]
```
rango de representación cociente de aspecto



+-+