
Comentarios teóricos y ejemplos

Resolución de Ejercicios Adicionales 13

Derivadas e Integrales – Práctica 5 y 6

desde el Ejercicio 13.1 hasta el 13.6 inclusive

+-+

EJERCICIOS ADICIONALES 13

13.1) Sea $f(x)=\dfrac{x-k}{x^2+5}$. Determinar el valor de $k\in\mathbb{R}$ para el cual f tiene un extremo local en $x=1$. Para el valor de k hallado determinar todos los máximos y mínimos locales de f.

$$f(x) = \frac{x-k}{x^2+5}$$

Hallar $k \in \mathbb{R}$ para que f tenga un extremo local en $x = 1$ y determinar todos los máximos y mínimos locales de f.

Para que f (x) tenga un extremo local en x = 1, x = 1 deberá ser punto crítico de f (x)

Busquemos los puntos críticos de f (x) que son aquellos para los que $f'(x) = 0$

Calculemos f' (x) :

$$f'(x) = \frac{[x-k]' \cdot (x^2+5) - (x-k)\cdot [x^2+5]'}{(x^2+5)^2} =$$

$$f'(x) = \frac{1\cdot (x^2+5) - (x-k)\cdot 2x}{(x^2+5)^2} = \frac{x^2+5-2x^2+2kx}{(x^2+5)^2} = \frac{-x^2+2kx+5}{(x^2+5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2+2kx+5}{(x^2+5)^2}$$

Como x = 1 tiene que ser extremo local $\Longrightarrow f'(1) = 0$

$$f'(1) = \frac{-(1)^2+2k\cdot(1)+5}{\left((1)^2+5\right)^2} = \frac{-1+2k+5}{(6)^2} = \frac{2k+4}{36} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2k+4 = 0 \Longrightarrow k = -2$$

Entonces

$k = -2$ para que $f(x)$ tenga un extremo local en $x = 1$

Con $k = -2$ es : $f(x)\ \frac{x-(-2)}{x^2+5}$

$$f(x)\ \frac{x-(-2)}{x^2+5} = \frac{x+2}{x^2+5}$$

$$y\ \ f'(x) = \frac{-x^2+2\,(-2)\,x+5}{(x^2+5)^2} = \frac{-x^2-4\,x+5}{(x^2+5)^2}$$

Busquemos todos los puntos críticos de $f(x)$ que son aquellos para los que

$f'(x) = 0$

$$\frac{-x^2-4\,x+5}{(x^2+5)^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -x^2-4\,x+5 = 0 \quad \text{multiplicando por } -1$$

$$\Longrightarrow\ x^2+4\,x-5 = 0$$

resolvemos la ecuación cuadrática $x^2 + 2\,x - 5 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} = \frac{-(4) \pm \sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot(-5)}}{2\cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{ó} \quad x_2 = \frac{-4-6}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

$$\Longrightarrow\ x_1 = 1 \quad \text{ó} \quad x_2 = -5$$

Los puntos críticos de $f(x)$ son $x = 1$ y $x = -5$

(recordar que habíamos elegido $k = -2$ para que $x = 1$ sea extremo local)

Como el $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $f(x)$ es "suavemente" continua (no pincha)

como también su derivada $f'(x) = \dfrac{-x^2-4\,x+5}{(x^2+5)^2}$

(el denominador nunca da cero)

usaremos el corolario del Teorema de Bolzano para determinar
máximos y mínimos de $f(x)$ e Intervalos de creciemiento y decrecimiento
a partir del análisis de $f'(x)$

Usaremos el resultado que si $f'(x)$ es positiva entonces $f(x)$ es creciente
para un x en un intervalo entre ceros de $f'(x)$ lo será
para todos los x del intervalo
dado que en ese intervalo entre ceros no puede cambiar de signo

Idem si $f'(x)$ es negativa en un intervalo entre ceros
entonces $f(x)$ es decreciente en dicho intervalo entre ceros de $f'(x)$

Intervalos de análisis de $f'(x) = \dfrac{-x^2-4x+5}{\left(x^2+5\right)^2} = \dfrac{-(x-1)(x+5)}{\left(x^2+5\right)^2}$:

$$f'(x) = \frac{-x^2-4x+5}{\left(x^2+5\right)^2} = \frac{-(x-1)(x+5)}{\left(x^2+5\right)^2}$$

en los intervalos $(-\infty, -5)$; $(-5, 1)$; $(1, +\infty)$

Análisis usando el corolario del Teorema de Bolzano para :

Tomemos $x = -6 \in (-\infty, -5)$:

$$\text{si } x = -6 \implies f'(-6) = \frac{-(-6-1)(-6+5)}{\left((-6)^2+5\right)^2} =$$

$$= \frac{-(-7)(-1)}{(36+5)^2} = \frac{-7}{(41)^2} < 0$$

entonces como no hay otros ceros de f' a la izquierda de -5 deberá ser

$f'(x) < 0 \;\; \forall \;\; x \in (-\infty, -5) \implies f(x)$ **es decreciente en** $(-\infty, -5)$

Tomemos $x = 0 \in (-5, 1)$:

$$\text{si } x = 0 \implies f'(0) = \frac{-(0-1)\cdot(0+5)}{\left(0^2+5\right)^2} = \frac{-(-1)\cdot(5)}{(5)^2} = \frac{1\cdot 5}{25} \implies$$

$$\implies f'(0) = \frac{5}{25} > 0$$

entonces como no hay otros ceros de f' entre -5 y 1 deberá ser

$f'(x) > 0 \;\; \forall \;\; x \in (-5, 1) \implies f(x)$ **es creciente en** $(-5, 1)$

Tomemos $x = 2 \in (1, +\infty)$:

$$\text{si } x = 2 \implies f'(2) = \frac{-(2-1)(2+5)}{\left(2^2+5\right)^2} =$$

$$= \frac{-(1)\ (7)}{(9)^2} = \frac{-7}{81} < 0$$

entonces como no hay otros ceros de f' a la derecha de 1 deberá ser

$f'(x) < 0 \quad \forall \quad x \in (1, +\infty) \implies f(x)$ es decreciente en $(1, +\infty)$

Análisis de la 1 era derivada para determinar máximos y mínimos de $f(x)$:

.- Como $f'(x) < 0$ a la izquierda de $x = -5$ y $f'(x) > 0$ a la derecha de $x = -5$ entonces en $x = -5$ hay un Mínimo local o relativo de $f(x)$

.- Como $f'(x) > 0$ a la izquierda de $x = 1$ y $f'(x) < 0$ a la derecha de $x = 1$ entonces en $x = 1$ hay un Máximo local o relativo de $f(x)$

Entonces :

$x = -5$ es un Mínimo local o relativo de $f(x)$

$x = 1$ es un Máximo local o relativo de $f(x)$

Construyamos una tabla representativa del comportamiento de $f'(x)$ y $f(x)$ en todo su dominio :

x	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f '(x)	< 0	0	> 0	0	< 0
f(x)	es decreciente	MÍN	es creciente	MÁX	es decreciente

$I^{\uparrow}$, $I^{\downarrow}$ Intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$:

$I^{\uparrow} = (-5, 1)$

$I^{\downarrow} = (-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$

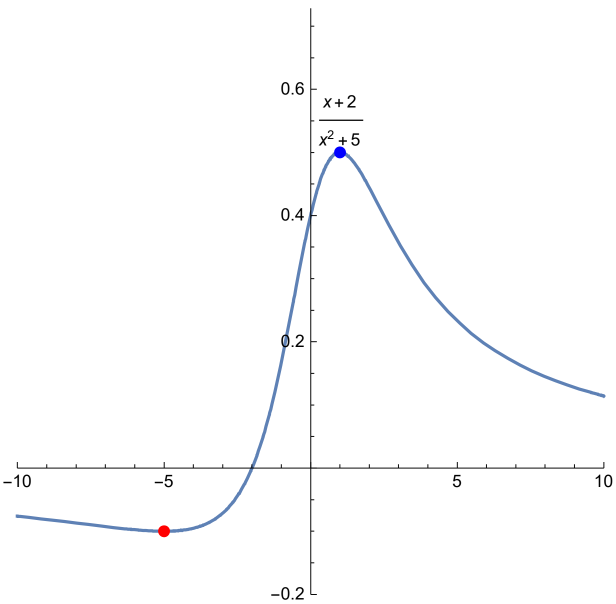
Gráfico de $f(x)$ y $f'(x)$

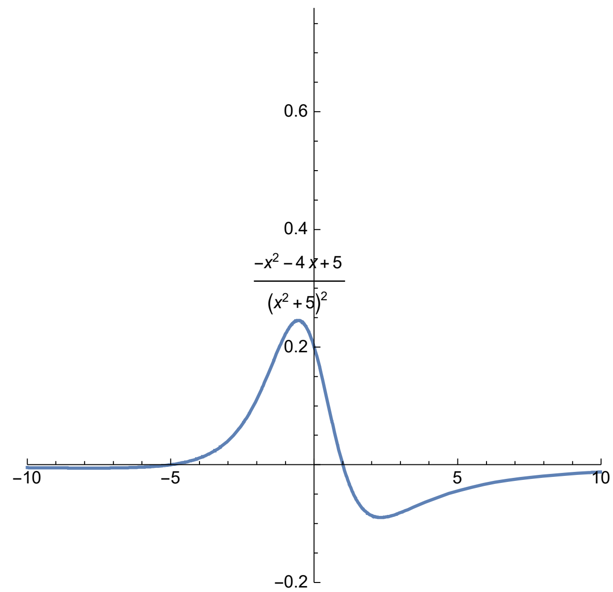
Gráfico1 : color azul : f (x) = $\dfrac{x+2}{x^2+5}$;

Gráfico2 : color azul : f' (x) = $\dfrac{-x^2-4x+5}{\left(x^2+5\right)^2}$;

x = -5 es Mínimo local o relativo y el valor mínimo es $-\dfrac{1}{10}$

x = 1 es Máximo local o relativo y el valor máximo es $\dfrac{1}{2}$





+-+

13.2) Calcular $\displaystyle\int\left(\frac{\ln x}{8x}+\frac{6}{\sqrt{x}}\right)dx$.

Conviene usar la propiedad de la suma de integrales :

$$\int\left(\frac{\ln(x)}{8x}+\frac{6}{\sqrt{x}}\right)dx = \int\frac{\ln(x)}{8x}dx + \int\frac{6}{\sqrt{x}}dx = \quad (*)$$

y calcular cada una por separado para al final sumar los resultados parciales

----

cálculo auxiliar :

Calculemos la 1 era integral indefinida :

$$\int\frac{\ln(x)}{8x}dx = \frac{1}{8}\int\ln(x)\,\frac{1}{x}dx$$

por sustitución, llamando :

$$u = \ln(x) \quad \Longrightarrow \quad du = u'\,dx = \frac{1}{x}\,dx \quad \Longrightarrow \quad du = \frac{1}{x}\,dx$$

sustituyendo :

$$\frac{1}{8}\int \ln(x)\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{8}\int u\,du = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\,u^2 + C_1 = \frac{1}{16}\,u^2 + C_1 = \frac{1}{16}\,(\ln(x))^2 + C_1$$

Entonces :

$$\int \frac{\ln(x)}{8\,x}\,dx = \frac{1}{8}\int \ln(x)\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{16}\,(\ln(x))^2 + C_1$$

Calculemos la 2 da integral indefinida :

$$\int \frac{6}{\sqrt{x}}\,dx = 6\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 6\cdot\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)}\,x^{-\frac{1}{2}+1} + C_2 = 6\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{1}{2}} + C_2 = 6\cdot 2\cdot x^{\frac{1}{2}} + C_2 =$$

Entonces :

$$\int \frac{6}{\sqrt{x}}\,dx = 12\sqrt{x} + C_2$$

Reemplazando en (*) :

$$\int \left(\frac{\ln(x)}{8\,x} + \frac{6}{\sqrt{x}}\right)dx = \int \frac{\ln(x)}{8\,x}\,dx + \int \frac{6}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{16}\,(\ln(x))^2 + C_1 + 12\sqrt{x} + C_2 = \frac{1}{16}\,(\ln(x))^2 + 12\sqrt{x} + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

Por lo tanto :

$$\int \left(\frac{\ln(x)}{8\,x} + \frac{6}{\sqrt{x}}\right)dx = \frac{1}{16}\,(\ln(x))^2 + 12\sqrt{x} + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

Verificación :

la derivada de $\frac{1}{16}\,(\ln(x))^2 + 12\sqrt{x} + \underbrace{C}_{\text{constante}}$

debe dar como resultado el integrando $\frac{\ln(x)}{8\,x} + \frac{6}{\sqrt{x}}$

Veamos :

$$\left[\frac{1}{16}(\ln(x))^2 + 12\sqrt{x} + C\right]' = \left[\frac{1}{16}(\ln(x))^2\right]' + \left[12\sqrt{x}\right]' + [C]' =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} + 12\left[x^{\frac{1}{2}}\right]' + 0 =$$

$$= \frac{1}{8}\ln(x) \cdot \frac{1}{x} + 12 \cdot \frac{1}{2}\, x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{\ln(x)}{8x} + 6\, x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\ln(x)}{8x} + \frac{6}{\sqrt{x}} \quad , \quad \text{OK}$$

+-+

13.3) Calcular $\int 12x^2 \operatorname{sen}(x^3 + \pi)\, dx$.

$$\int 12\, x^2 \operatorname{sen}(x^3 + \pi)\, dx = 12 \int x^2 \operatorname{sen}(x^3 + \pi)\, dx = \quad (**)$$

Como en el argumento del seno aparece x^3 y en el numerador aparece x^2 usamos sustitución :

llamamos

$$u = x^3 + \pi \quad \Longrightarrow \quad du = u'\, dx = 3\, x^2\, dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{3}\, du = x^2\, dx$$

sustituyendo en (**) :

$$\int 12\, x^2 \operatorname{sen}(x^3 + \pi)\, dx = 12 \int x^2 \operatorname{sen}(x^3 + \pi)\, dx =$$

$$= 12 \int \operatorname{sen}(x^3 + \pi) \cdot x^2\, dx = 12 \int \operatorname{sen}(u) \cdot \frac{1}{3}\, du = \frac{12}{3} \int \operatorname{sen}(u)\, du = 4\,(-\cos(u) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

Entonces :

$$\int 12\, x^2 \operatorname{sen}(x^3 + \pi)\, dx = -4\cos(x^3 + \pi) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

Verificación :

la derivada de $\; -4\cos(x^3 + \pi) + \underbrace{C}_{\text{constante}}$

debe dar como resultado el integrando $12\, x^2 \operatorname{sen}(x^3 + \pi)$

Veamos :

$$\left[-4\cos(x^3 + \pi) + C\right]' = \left[-4\cos(x^3 + \pi)\right]' + [C]' =$$

$$= -4 \cdot \left[\cos(x^3 + \pi)\right]' + 0 = -4 \cdot \left(-\operatorname{sen}(x^3 + \pi)\right) \cdot 3\, x^2 = 12 \operatorname{sen}(x^3 + \pi) \cdot x^2 =$$

$$= 12\, x^2 \operatorname{sen}(x^3 + \pi) \quad , \quad \text{Ok}$$

+-+

13.4) Calcular $\int (x+2)\, e^{-x}\, dx$

$\int (x+2)\, e^{-x}\, dx$

en el integrando tenemos el producto de dos funciones

usaremos el método de integración por partes :

escribimos la fórmula de resolución que proviene de la derivada del producto de funciones

$\int f \cdot g'\, dx = f \cdot g - \int f' \cdot g\, dx$

el éxito del método de partes consiste en que la nueva integral a resolver

sea más sencilla que la original y eso se logrará si se elige $f = x + 2$

Veamos, llamando :

$f = x + 2 \quad \Longrightarrow \quad f' = 1$

$g' = e^{-x} \quad \Longrightarrow \quad g = \int e^{-x}\, dx = \ (*) = -e^{-x}$

----

cálculo auxiliar :

a su vez para encontrar g usamos sustitución :

llamamos $u = -x \quad \Longrightarrow \quad du = u'\, dx = -1\, dx \quad \Longrightarrow \quad du = -dx$

sustituyendo :

$g = \int e^{-x}\, dx = \int e^{u}\, (-du) = -\int e^{u}\, du = -e^{u} = -e^{-x}$ **reemplazamos en (*)**

Reemplacemos f, g, f' y g' en la fórmula de partes :

$\int f \cdot g'\, dx = f \cdot g - \int f' \cdot g\, dx \quad \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \quad \int (x+2) \cdot e^{-x}\, dx = (x+2) \cdot (-e^{-x}) - \int 1 \cdot (-e^{-x})\, dx = -(x+2)\, e^{-x} + \int e^{-x}\, dx = \ (**)$

observen que la nueva integral a resolver es más sencilla que la original
ya que las potencias de x no están

Es más $\int e^{-x}\, dx$ **ya la hemos calculado en oportunidad de calcular g**

Entonces en (**) :

$$= -(x+2)\,e^{-x} + (-e^{-x}) + \underset{\text{constante}}{C} = -(x+2)\,e^{-x} - e^{-x} + \underset{\text{cons}}{C} =$$

$$= -e^{-x}\,(x+2+1) + \underset{\text{constante}}{C} = -e^{-x}\,(x+3) + \underset{\text{cc}}{C}$$

Por lo tanto :

$$\int (x+2)\cdot e^{-x}\,dx = -e^{-x}\,(x+3) + \underset{\text{cc}}{C}$$

Verificación :

la derivada de $-e^{-x}\,(x+3) + \underset{\text{constante}}{C}$

debe dar como resultado el integrando $(x+2)\cdot e^{-x}$

Veamos :

$$\left[-e^{-x}\,(x+3) + C\right]' = \left[-e^{-x}\,(x+3)\right]' + [C]' =$$

$$= [-e^{-x}]'\cdot(x+3) + (-e^{-x})\cdot[x+3]' + 0 = -e^{-x}\,(-1)\cdot(x+3) - e^{-x}\cdot 1 =$$

$$= e^{-x}\cdot(x+3) - e^{-x} = e^{-x}\,(x+3-1) = e^{-x}\,(x+2) \quad , \quad \text{Ok}$$

+-+

13.5) Calcular $\int x^7 \ln x\,dx$

$$\int x^7 \ln(x)\,dx$$

Para esta integral conviene usar partes y llamar $f = \ln(x)$

para que en la nueva integral a resolver aparezca $f' = \dfrac{1}{x}$ **y le baje un grado a** x^7

Por Partes :

escribimos la fórmula de resolución de integración por Partes
que proviene de la derivada del producto de funciones :

$$\int f\cdot g'\,dx = f\cdot g - \int f'\cdot g\,dx$$

Veamos, llamando :

$$f = \ln(x) \quad \Longrightarrow \quad f' = \frac{1}{x}$$

$$g' = x^7 \quad \Longrightarrow \quad g = \int x^7\, dx = \frac{1}{(7+1)} \cdot x^{7+1} = \frac{1}{8} \cdot x^8$$

----

reemplazando en la fórmula de integración por partes :

$$\int f \cdot g'\, dx = f \cdot g - \int f' \cdot g\, dx$$

$$\int \ln(x) \cdot x^7\, dx = \ln(x) \cdot \frac{1}{8} \cdot x^8 - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{8} \cdot x^8\, dx = \frac{1}{8} \cdot x^8 \ln(x) - \frac{1}{8} \int x^7\, dx =$$

$$= \frac{1}{8} x^8 \ln(x) - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} x^8 + \underbrace{C}_{\text{constante}} == \frac{1}{8} x^8 \ln(x) - \frac{1}{64} x^8 + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{1}{8} x^8 \left(\ln(x) - \frac{1}{8}\right) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

Por lo tanto :

$$\int x^7 \ln(x)\, dx = \frac{1}{8} x^8 \left(\ln(x) - \frac{1}{8}\right) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

Verificación :

la derivada de $\frac{1}{8} x^8 \left(\ln(x) - \frac{1}{8}\right) + \underbrace{C}_{\text{constante}}$

debe dar como resultado el integrando $\ln(x) \cdot x^7$

Veamos :

$$\left[\frac{1}{8} x^8 \left(\ln(x) - \frac{1}{8}\right) + C\right]' = \left[\frac{1}{8} x^8 \left(\ln(x) - \frac{1}{8}\right)\right]' + [C]' =$$

$$= \left[\frac{1}{8} x^8\right]' \cdot \left(\ln(x) - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8} x^8 \cdot \left[\ln(x) - \frac{1}{8}\right]' + 0 =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot 8\, x^7 \cdot \left(\ln(x) - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8} x^8 \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= x^7 \cdot \left(\ln(x) - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8} x^7 = x^7 \cdot \ln(x) - \frac{1}{8} x^7 + \frac{1}{8} x^7 =$$

$= x^7 \cdot \ln(x)$, OK

+-+

13.6) práctica 6 – ej. 7 b)

Ej 7 b) de la Práctica 6

Hallar g tal que $g'(x) = x\sqrt{3x^2+9}$ con la condición $g(3) = 20$ para determinar $\underbrace{C}_{\text{co}}$

$$g(x) = \int g'(x)\,dx = \int x\sqrt{3x^2+9}\,dx$$

Por sustitución :

llamamos $u = 3x^2 + 9$

$$\Longrightarrow\ du = u'\,dx = 6x\,dx \quad \Longrightarrow\ \frac{1}{6}du = x\,dx$$

sustituyendo :

$$\int x\sqrt{3x^2+9}\,dx = \int \sqrt{3x^2+9}\ \ x\,dx = \int \sqrt{u}\ \frac{1}{6}du = \frac{1}{6}\int u^{\frac{1}{2}}du =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}u^{\frac{1}{2}+1} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}u^{\frac{3}{2}} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{1}{9}u^{\frac{3}{2}} + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

volviendo a la variable x como $u = 3x^2 + 9$

$$= \frac{1}{9}\left(3x^2+9\right)^{\frac{3}{2}} + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

Entonces $g(x) = \frac{1}{9}\left(3x^2+9\right)^{\frac{3}{2}} + \underbrace{C}_{\text{co}}$

Como $g(3) = 20$

$$g(3) = \frac{1}{9}\left(3(3)^2+9\right)^{\frac{3}{2}} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 20 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ \frac{1}{9}(27+9)^{\frac{3}{2}} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 20 \quad \Longrightarrow\ \frac{1}{9}(36)^{\frac{3}{2}} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 20 \quad \Longrightarrow\ \frac{1}{9}\sqrt{(36)^3} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 20 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ \frac{1}{9}\left(\sqrt{(36)}\right)^3 + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 20 \quad \Longrightarrow\ \frac{1}{9}(2\cdot 3)^3 + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 20 \quad \Longrightarrow\ \frac{1}{9}\cdot 2^3\cdot 3^3 + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 20 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ 2^3\cdot 3 + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 20 \quad \Longrightarrow\ 8\cdot 3 + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 20 \quad \Longrightarrow\ 24 + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 20 \quad \Longrightarrow\ \underbrace{C}_{\text{constante}} = 20 - 24 = -4$$

Por lo tanto

$$g(x) = \frac{1}{9}\sqrt{\left(3x^2+9\right)^3} - 4 \ \ \textbf{verifica}\ \ g'(x) = x\sqrt{3x^2+9}\ \ \text{y}\ \ g(3) = 20$$

Verificación :

la derivada de $\frac{1}{9}\sqrt{\left(3\,x^2+9\right)^3}-4$

debe dar como resultado el integrando $x\sqrt{3\,x^2+9}$

Veamos :

$$\left[\frac{1}{9}\sqrt{\left(3\,x^2+9\right)^3}-4\right]' = \left[\frac{1}{9}\sqrt{\left(3\,x^2+9\right)^3}\right]' + [-4]' =$$

$$= \frac{1}{9}\left[\left(3\,x^2+9\right)^{\frac{3}{2}}\right]' + 0 = \frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}\left(3\,x^2+9\right)^{\frac{3}{2}-1}\cdot 6\,x = \frac{1}{6}\left(3\,x^2+9\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 6\,x =$$

$$= x\sqrt{3\,x^2+9}$$, OK

+-+