Integral indefinida

Definición de integral indefinida

Hasta ahora hemos visto cómo derivar una función dada. Desde aquí, trabajaremos "al revés": tendremos una función f (minúscula) que sabremos que es la derivada de otra función F (mayúscula), e intentaremos recuperar esta función F.

Ejemplo 1. Sea $f(x) = \cos(x)$. Hallar una función F de forma tal que $F'(x) = f(x)$.

Mirando la tabla de derivadas (ver explicaciones sobre reglas de derivación), encontramos que $(\operatorname{sen}(x))' = \cos(x)$. Luego, podemos tomar

$$\boxed{F(x) = \operatorname{sen}(x).}$$

Ejemplo 2. Sea $f(x) = x^3$. Hallar una función F de forma tal que $F'(x) = f(x)$.

Mirando la tabla de derivadas, podemos notar que, para que la derivada sea una función polinómica de grado 3, la función original debía ser de grado 4. Sin embargo, $(x^4)' = 4x^3$, que no es lo mismo que x^3. Pero cuando la diferencia es un número que está multiplicando, la solución es sencilla: Tomemos

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{4}x^4}$$

Verifiquemos:

$$F'(x) = \left(\frac{1}{4}x^4\right)' = \frac{1}{4}.(x^4)' = \frac{1}{4}.4x^3 = \frac{1}{\cancel{4}}.\cancel{4}x^3 = x^3.$$

En general, si queremos hallar F tal que $F'(x) = x^a$, con $a \neq -1$, podemos tomar

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{a+1}x^{a+1}, \quad \text{para } a \neq -1}$$

De esta forma,

$$F'(x) = \frac{1}{a+1}.(a+1)x^{(a+1-1)} = \frac{1}{\cancel{a+1}}.\cancel{(a+1)}x^{(a\cancel{+1-1})} = x^a.$$

Dada f, decimos que F es una ***primitiva*** o ***antiderivada*** de f si la derivada de F es f; es decir, si $F' = f$.

Pero dada f, ¿hay una única primitiva F? La respuesta es: **no**. Volviendo al Ejemplo 1, podríamos haber tomado

$$F(x) = \operatorname{sen}(x) + 7,$$

y habríamos obtenido el mismo resultado porque

$$(\operatorname{sen}(x) + 7)' = (\operatorname{sen}(x))' + (7)' = \cos(x) + 0 = \cos(x).$$

En realidad, podríamos haber tomado cualquier función de la forma

$$F(x) = \operatorname{sen}(x) + C,$$

con C un número cualquiera (una constante), y habríamos llegado a que $F'(x) = \cos(x)$:

$$(\operatorname{sen}(x) + C)' = (\operatorname{sen}(x))' + (C)' = \cos(x) + 0 = \cos(x).$$

En general, para cualquier función f, si F es una primitiva, entonces $F + C$ también será una primitiva para f, con C una constante. Y se puede demostrar que cualquier primitiva de f se puede escribir como una primitiva particular más una constante.

Al conjunto de primitivas de una función f se lo llama ***integral indefinida*** de f, se escribe

$$\int f(x)dx$$

y se lee "*integral de* $f(x)$ *diferencial* x". No nos detendremos en este curso a explicar la notación de las integrales. Usualmente escribimos

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

donde F es una primitiva de f (es decir, $F' = f$) y C es un número cualquiera, al que llamaremos ***constante de integración***.

Así, basándonos en la tabla de derivadas, podemos armar una tabla
con las integrales básicas:

$f(x)$	$\int f(x)dx$
x^a con $a \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$
$\cos(x)$	$\text{sen}(x) + C$
$\text{sen}(x)$	$-\cos(x) + C$

Algunas propiedades útiles para calcular integrales

- Si k es una constante,

  $$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

  Es decir, las constantes multiplicando "salen afuera" de la integral.

  Por ejemplo,

  $$\int 5e^x dx \underset{\substack{\downarrow \\ \text{5 es una constante} \\ \text{multiplicando}}}{=} 5\int e^x\,dx \underset{\substack{\downarrow \\ \text{la integral de } e^x \\ \text{está en la tabla}}}{=} 5e^x + C$$

- **Integral de la suma o resta:**

  $$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$
  $$\int (f(x)-g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.$$

  Es decir, la integral de la suma (o de la resta) es la suma (o la resta) de las integrales.

  Por ejemplo,

  $$\int \left(\frac{1}{x} + \text{sen}(x)\right)dx \underset{\substack{\downarrow \\ \text{integral de} \\ \text{la suma}}}{=} \int \frac{1}{x}dx + \int \text{sen}(x)dx \underset{\substack{\downarrow \\ \text{integrales} \\ \text{por tabla}}}{=} \ln(x) - \cos(x) + C$$

Ejemplo 3. Sea $f(x) = x^3 + 6x^2 + 1$. Hallar una función F de forma tal que $F'(x) = f(x)$ y $F(2) = 25$.

Primero buscamos todas las funciones que derivadas dan f. Es decir, buscamos el conjunto de primitivas de f, o la *integral indefinida de* f:

$$\int f(x)dx = \int (x^3 + 6x^2 + 1)dx = \int x^3\, dx + 6 \int x^2\, dx + \int 1\, dx = \frac{1}{4}x^4 + 6.\frac{1}{3}x^3 + x + C = \frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + x + C$$

Notemos que podemos pensar $1 = x^0$ y entonces $\int 1\, dx = \int x^0\, dx = \frac{1}{0+1}x^{0+1} + C = 1.x^1 + C = x + C$. También notemos que, al calcular la suma (o resta) de varias integrales, nos conviene sumar la constante de integración al final.

Entonces el conjunto de todas las funciones que derivadas dan f es

$$\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + x + C.$$

Buscamos aquella F de este conjunto que en $x = 2$ vale 25. Luego, tenemos que encontrar C para que

$$\frac{1}{4}.2^4 + 2.2^3 + 2 + C = \frac{1}{4}.16 + 2.8 + 2 + C = 4 + 16 + 2 + C = 22 + C = 25.$$

Operando, vemos que $C = 3$. Luego,

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{8}{3}x^3 + x + 3}$$

A diferencia de lo que sucedía con las derivadas, donde sabíamos cómo calcular la derivada de un producto, una división o una composición, con las integrales no tenemos reglas que nos permitan calcular la integral de cualquier función. Es por esto que contamos con métodos de integración que nos pueden auxiliar en ciertas situaciones. En este curso veremos los métodos de sustitución y de integración por partes.