+-

Resolución de ejercicios seleccionados - Práctica 6

Repaso para Final de Mate 51 - 1 er cuatrimestre de 2020

Qué hay que saber ?

+-

Repaso Práctica 6 :

Integrales

Estudiar teoría de los pdf ' s :

integral indefinida.pdf

Método de sustitución.pdf

Método de integración por partes.pdf

integral definida.pdf

Cálculo de áreas.pdf

Resolver Ejercicios : **1, 2, 3 b, 3 c, 3 g, 3 h, 4 a, 4 b, 4 e, 4 f, 4 g, 4 i, 4 q, 4 r, 5 b, 5 c, 5 d, 5 f, 6 a, 6 b, 6 e, 6 f, 7 c, 7 d, 10 b, 10 d, 10 f, 11 a, 11 e, 11 f, 11 h, 12 a, 13 a, 14, 15 a, 15 c, 15 e, 15 f, 16 b, 16 d, 16 f, 17 a, 17 c, 17 f y 18**

Resolver Ejercicios Surtidos Práctica 6 : **1, 3, 5, 6 a, 6 e, 6 f, 6 n, 7 y 8 b**

+-+

Comentarios teóricos previos :

TODO EL MUNDO DEBE SABER QUE BUSCAR UNA PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN ES CALCULAR LA INTEGRAL INDEFINIDA DE ESA FUNCIÓN

Llamaremos **Primitiva ó integral indefinida** de una función $f(x)$ a una función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$

"la derivada de F grande de x da como resultado f chica de x"

Notación - un nuevo símbolo :

Vamos a usar el símbolo $\int f(x)\,dx$ para hablar de integrales indefinidas ó Primitivas es decir :

$$F(x) = \int f(x)\,dx \quad \text{si y sólo si} \quad F'(x) = f(x)$$

$\int f(x)\,dx$ debe leerse como : "la integral de f(x) diferencial x"

como también se suele decir "integral de f(x) d x"

Ejemplo :

Calcular la primitiva o integral indefinida de f (x) = x

problema que se escribe así (reemplazamos f (x) por x) :

$F(x) = \int x\,dx$ **si y sólo si** $F'(x) = x$

Buscamos una F (x) tal que derivada dé el integrando x

Vemos que hay infinitas primitivas que al ser derivadas dan x

Por ejemplo, $\frac{1}{2}x^2$ **es una primitiva de f (x) = x dado que**

$\left[\frac{1}{2}x^2\right]' = x$

Es más si sumamos un número real constante a $\frac{1}{2}x^2$ **también es una primitiva de x**

es decir la derivada de $\left[\frac{1}{2}x^2 + C\right]' = x + 0 = x$ **, también da x.**

Entonces el resultado correcto de hallar primitiva de f (x) = x es

$F(x) = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$

co

Este resultado va a pasar siempre que calculemos integrales indefinidas :

Siempre dan como resultado tener una constante C arbitraria

constante

salvo que nos den un dato adicional para determinar el valor de C (tipo Ej. 2)

constante

Observación : calcular una integral indefinida de f (x) es el proceso inverso de derivar

Por ejemplo, al derivar, si tenía x^2 **, restaba un 1 al exponente y el exponente bajaba como factor : es decir** $\left[x^2\right]' = 2 \cdot x^{2-1} = 2 \cdot x^1 = 2x$

Ahora al calcular una integral indefinida de x por ejemplo, debo sumar un 1 al exponente y ajustar el factor que bajará al derivar es decir :

si tengo x $\longrightarrow$ **al integrar sumo 1 al exponente y obtengo** x^{1+1} **que es** x^2 **y como al derivar me va a bajar un 2 como factor le pongo un** $\frac{1}{2}$ **a la primitiva** $\Longrightarrow$ $\frac{1}{2}x^2$

Otra notación que quizás confunda un poco :

Sea g (x) una función derivable y g' (x) su derivada

entonces se cumple que :

$\int g'(x)\, dx = g(x) + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **por la definición misma de primitiva ó**

integral indefinida

Pasemos a resolver el Ej. 1 de la Práctica 6

+-+

PRÁCTICA 6

INTEGRALES

Ejercicio 1.-

a. Hallar una función g tal que

i. $g'(x) = x$ **ii.** $g'(x) = 3$

iii. $g'(x) = \operatorname{sen}(x)$ **iv.** $g'(x) = \cos(x)$

v. $g'(x) = e^x$ **vi.** $g'(x) = x^3$

vii. $g'(x) = x^5 + 2x$ **viii.** $g'(x) = 3 + e^x$

b. Hallar una primitiva de f.

i. $f(x) = 2\operatorname{sen}(x)$ **ii.** $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x}$

iii. $f(x) = 3x^2 + \sqrt{x}$ **iv.** $f(x) = -4e^x$

Ej 1 a) hallar una función g (x) tal que :

Ej 1 a) i) $g'(x) = x$

Buscamos una función g (x) tal que derivada dé x

Por lo que vimos anteriormente, tal $g(x) = \dfrac{1}{2} x^2 + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

porque $\left[\dfrac{1}{2} x^2 + C\right]' = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 0 = x^1 = x$

Escrito en notación complicada para que se vayan acostumbrando :

si $g'(x) = x$ **buscamos** $g(x) = \int g'(x)\, dx = \int x\, dx = \dfrac{1}{2} x^2 + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

Respuesta del 1 a) i) $g(x) = \dfrac{1}{2} x^2 + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

Ej 1 a) ii) $g'(x) = 3$

Buscamos una función $g(x)$ tal que derivada dé 3

entonces $g(x) = 3x + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ porque si la derivamos

$[3x + C]' = [3x]' + [C]' = 3[x]' + 0 = 3 \cdot 1 = 3$

Escrito en notación complicada para que se vayan acostumbrando :

si $g'(x) = 3$ buscamos $g(x) = \int g'(x)\,dx = \int 3\,dx = 3x + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

Respuesta del 1 a) ii) $g(x) = 3x + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

+-+-+-+-+-+-+-+

De este último resultado podemos observar 2 cosas :

Asi como al derivar, las constantes son transparentes a la derivación también lo son con la integracion :

(quiero decir que al derivar $[3x]' = 3[x]' = 3 \cdot x$ la constante 3 sale afuera de la derivación)

En el caso de la integración es similar;

$\int 3\,dx = 3\int 1\,dx = 3 \cdot x + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

además algo para recordar es que $\int 1\,dx = x + \tilde{C}$

Propiedad 1 :

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx \qquad k \in \mathbb{R}$$

Ej 1 a) iii) $g'(x) = \text{sen}(x)$

Buscamos una función $g(x)$ tal que derivada dé $\text{sen}(x)$

entonces $g(x) = -\cos(x) + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ porque si la derivamos

$[-\cos(x) + C]' = -[\cos(x)]' + [C]' = -(-\text{sen}(x)) + 0 = \text{sen}(x)$

Escrito en notación complicada para que se vayan acostumbrando :

si $g'(x) = \text{sen}(x)$ buscamos $g(x) = \int g'(x)\,dx = \int \text{sen}(x)\,dx \iff$

$g(x) = -\cos(x) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

porque si la derivamos

$[-\cos(x) + C]' = -[\cos(x)]' + [C]' = -(-\text{sen}(x)) + 0 = \text{sen}(x)$

Respuesta del 1 a) iii) $g(x) = -\cos(x) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

Ej 1 a) iv) $g'(x) = \cos(x)$

Buscamos una función g (x) tal que derivada dé cos (x)

entonces $g(x) = \text{sen}(x) + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **porque si la derivamos**

$[\text{sen}(x) + C]' = [\text{sen}(x)]' + [C]' = (\cos(x)) + 0 = \cos(x)$

Escrito en notación complicada para que se vayan acostumbrando :

si $g'(x) = \cos(x)$ **buscamos** $g(x) = \int g'(x)\,dx = \int \cos(x)\,dx \iff$

$g(x) = \text{sen}(x) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

porque si la derivamos

$[\text{sen}(x) + C]' = [\text{sen}(x)]' + [C]' = \cos(x) + 0 = \cos(x)$

Respuesta del 1 a) iv) $g(x) = \text{sen}(x) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

Ej 1 a) v) $g'(x) = e^x$

Buscamos una función g (x) tal que derivada dé e^x

entonces $g(x) = e^x + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **porque si la derivamos**

$[e^x + C]' = [e^x]' + [C]' = e^x + 0 = e^x$

Escrito en notación complicada para que se vayan acostumbrando :

si $g'(x) = \cos(x)$ **buscamos** $g(x) = \int g'(x)\,dx = \int e^x\,dx \iff$

$g(x) = e^x + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

porque si la derivamos

$[e^x + C]' = [e^x]' + [C]' = e^x + 0 = e^x$

Respuesta del 1 a) v) $g(x) = e^x + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

Ej 1 a) vi) $g'(x) = x^3$

Buscamos una función g (x) tal que derivada dé x^3

entonces $g(x) = \frac{1}{4} x^4 + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **porque si la derivamos**

$$\left[\frac{1}{4} x^4 + C\right]' = \frac{1}{4}\left[x^4\right]' + [C]' = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot x^3 + 0 = x^3$$

Escrito en notación complicada para que se vayan acostumbrando :

si $g'(x) = x^3$ **buscamos** $g(x) = \int g'(x)\, dx = \int x^3\, dx \iff$

$$g(x) = \frac{1}{4} x^4 + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

porque si la derivamos

$$\left[\frac{1}{4} x^4 + C\right]' = \frac{1}{4}\left[x^4\right]' + [C]' = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot x^3 + 0 = x^3$$

Respuesta del 1 a) vi) $g(x) = \frac{1}{4} x^4 + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

Nota; como regla general cuando tenemos que calcular la integral indefinida de un función de x elevado a una potencia entera o fraccionaria hacemos lo siguiente :

sumamos un 1 al exponente y el resultado del nuevo exponente lo ponemos

como factor en el denominador

Ejemplo : $\int x^p\, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **es claro que** $p \neq -1$ **para que valga la igualdad**

$\int x^4\, dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{x^5}{5} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{1}{5} x^5 + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **porque al derivar** $\frac{1}{5} x^5$ **baja el 5 se simplifica**

con el 5 del denominador y queda x^4 **y la** $\underbrace{C}_{\text{constante}}$ **constante da cero al derivar**

Ejemplo2 :

$$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

porque al derivar

$$\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C\right]' = \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]' + [C]' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1} + 0 = 1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

Sigamos con el Ej 1 a) vii) :

Antes escribamos esta otra propiedad :

Así como la derivada de una suma ó resta de funciones era igual
a la suma de las derivadas de cada función, esto es
$[f(x) \pm g(x)]' = [f(x)]' \pm [g(x)]'$

con las integrales pasa lo mismo

Propiedad 2 :

$$\int \{ f(x) \pm g(x) \} \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$$

Esta propiedad nos viene bien para las polinómicas :

$$\int \left(x^3 + 2x^2 - x\right) dx = \int x^3 \, dx + \int 2x^2 \, dx - \int x \, dx = \frac{1}{4} x^4 + \frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

Usemos esta propiedad para el Ej 1 a) vii) :

Ej 1 a) vii) $g'(x) = x^5 + 2x$

Buscamos una función g (x) tal que derivada dé $x^5 + 2x$

entonces $g(x) = \frac{1}{6} x^6 + x^2 + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **porque si la derivamos**

$$\left[\frac{1}{6} x^6 + x^2 + C\right]' = \frac{1}{6}\left[x^6\right]' + \left[x^2\right]' + [C]' = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot x^5 + 2x + 0 = x^5 + 2x$$

Escrito en notación de integrales para que se vayan acostumbrando :

si $g'(x) = x^5 + 2x$ **buscamos** $g(x) = \int g'(x) \, dx = \int \left(x^5 + 2x\right) dx \iff$

$$\iff g(x) = \int x^5 \, dx + \int 2x \, dx = \frac{1}{6} x^6 + 2 \int x \, dx = \frac{1}{6} x^6 + 2 \frac{x^2}{2} \, dx + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{1}{6} x^6 + x^2 + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

porque si la derivamos

$$\left[\frac{1}{6} x^6 + x^2 + C\right]' = \frac{1}{6}\left[x^6\right]' + \left[x^2\right]' + [C]' = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot x^5 + 2x + 0 = x^5 + 2x$$

Respuesta del 1 a) vii) $g(x) = \frac{1}{6} x^6 + x^2 + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

Nota : en este ejercicio aparecerían dos constantes, C_1 **de integrar primero**

$\int x^5 \, dx$ **y otra** C_2 **de integrar** $\int 2x \, dx$ **pero pueden agruparse en una única que**

terminamos llamando C y sería $C = \underbrace{C_1}_{\text{constante}} + \underbrace{C_2}_{\text{constante}}$

Ej 1 a) viii) $g'(x) = 3 + e^x$

Buscamos una función g (x) tal que derivada dé $3 + e^x$

entonces $g(x) = 3x + e^x + C$ **porque si la derivamos**
constante

$[3x + e^x + C]' = 3[x]' + [e^x]' + [C]' = 3 \cdot 1 + e^x + 0 = 3 + e^x$

Escrito en notación de integrales para que se vayan acostumbrando :

si $g'(x) = 3 + e^x$ buscamos $g(x) = \int g'(x)\,dx = \int (3 + e^x)\,dx \iff$

$\iff g(x) = \int 3\,dx + \int e^x\,dx = 3\int 1\,dx + e^x = 3 \cdot x + e^x + C = 3x + e^x + C$
constante cc

porque si la derivamos

$[3x + e^x + C]' = 3[x]' + [e^x]' + [C]' = 3 \cdot 1 + e^x + 0 = 3 + e^x$

Respuesta del 1 a) viii) $g(x) = 3x + e^x + C$
cc

+-+

Ej 1 b) hallar una primitiva de f (o sea hallar $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$)

Vean que nos cambiaron la notación, pero es lo mismo que antes

----

Ej 1 b) i) $f(x) = 2\,\text{sen}(x)$

Buscamos $F(x) = \int f(x)\,dx$

$F(x) = \int 2\,\text{sen}(x)\,dx = 2\int \text{sen}(x)\,dx = 2(-\cos(x)) + C$
cc

porque :

$F'(x) = [2(-\cos(x)) + C]' = 2(-1)[\cos(x)]' + [C]' =$

$= -2(-\text{sen}(x)) + 0 = 2\,\text{sen}(x) = f(x)$

Respuesta del 1 b) i) $F(x) = -2\cos(x)) + C$
constante

Ej 1 b) ii) $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$

Buscamos $F(x) = \int f(x)\,dx$ **una primitiva de f**

$F(x) = \int \left(x^3 + \frac{1}{x}\right) dx = \int x^3\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{4}x^4 + \ln|x| + C$
cc

porque :

$$F'(x) = \left[\frac{1}{4}x^4 + \ln|x| + C\right]' = \frac{1}{4}\cdot 4x^3 + \frac{1}{x} + 0 = x^3 + \frac{1}{x}$$

Respuesta del 1 b) ii) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \ln|x| + C$

cc

Lean debajo la explicación de porqué la primitiva de $\frac{1}{x}$ es el $\ln|x| + C$

constante

+-

Nota importante :

Recordemos la función módulo de x :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

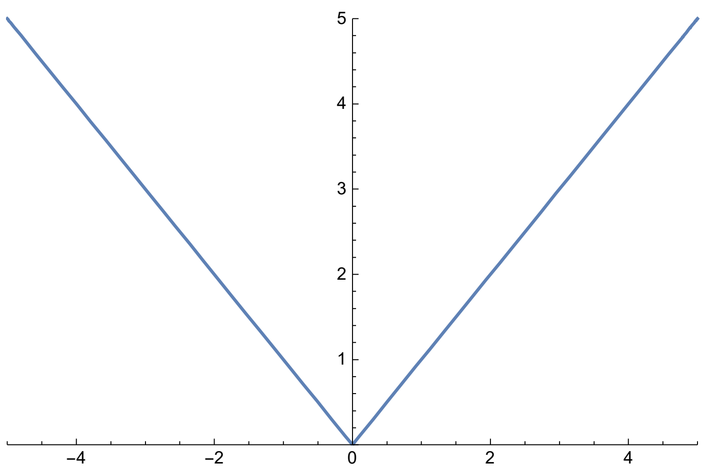
Por esta definición para calcular $|-2|$ usando la parte de abajo de la fórmula porque $x = -2$ es $-2 < 0$ da $-(-x) = -(-2) = 2 > 0$

Y si $x = 5$ entonces para calcular $|5|$ usamos la parte de arriba de la definición porque $x = 5$ es $5 > 0$ da $x = 5 > 0$

Y si $x = 0$ entonces $|0| = 0$

La función módulo de $x = |x|$ es derivable en todo x en $\mathbb{R}$ salvo en $x = 0$ porque ahí en $x = 0$ "pincha"

gráfico del $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

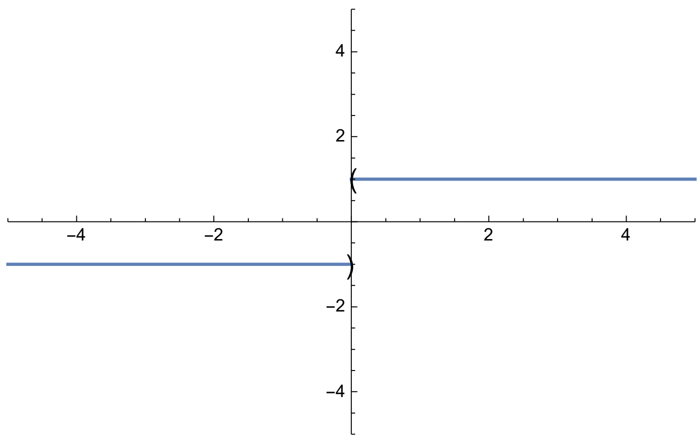


La derivada del módulo es :

$$[|x|]' = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

en $x = 0$ la derivada del módulo no está definida

gráfico de $[|x|]' = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$



+-

Observemos cuánto dá la derivada del $\ln |x|$:

$$[\ln |x|]' = \begin{cases} [\ln (x)]' & \text{si } x > 0 \\ [\ln (-x)]' & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{-x}(-1) & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

es decir :

$[\ln |x|]' = \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ pero entonces $\ln |x|$ es una primitiva de $\dfrac{1}{x}$

para todo $x \neq 0$ (y no sólo para los $x > 0$)

Éste es un resultado nuevo para Uds !

Lo que deben recordar es :

$[\ln (x)]' = \dfrac{1}{x}$ vale para $x > 0$ porque se debe poder sacar el logaritmo

$[\ln |x|]' = \dfrac{1}{x}$ vale para todo $x \neq 0$ porque se puede sacar el logaritmo

Pero entonces :

$\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \ln |x| + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ porque debe poder considerar tanto los $x > 0$ como $x < 0$

(Observación : si no tomáramos el $\ln |x|$ nos estaríamos perdiendo la rama

de los x negativos de $\dfrac{1}{x}$, porque como el logaritmo está definido para argumentos

positivos, al poner el módulo, podemos tomar logaritmo a los $x > 0$ como a los $x < 0$)

+-

Ej 1 b) iii) $f(x) = 3x^2 + \sqrt{x}$

Buscamos $F(x) = \int f(x)\, dx$ una primitiva de f

$$F(x) = \int \left(3x^2 + \sqrt{x}\right) dx = 3\int x^2\,dx + \int \sqrt{x}\,dx = 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + \int x^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= x^3 + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \underset{\text{constante}}{C} = x^3 + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \underset{\text{constante}}{C} = x^3 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \underset{\text{constante}}{C} = x^3 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \underset{\text{cc}}{C}$$

porque :

$$F'(x) = \left[x^3 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C\right]' = 3x^2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 0 = 3x^2 + x^{\frac{1}{2}} = 3x^2 + \sqrt{x}$$

Respuesta del 1 b) iii) $F(x) = x^3 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \underset{\text{cc}}{C}$

Ej 1 b) iv) $f(x) = -4e^x$

Buscamos $F(x) = \int f(x)\,dx$ una primitiva de f

$$F(x) = \int -4e^x\,dx = -4\int e^x\,dx = -4e^x + \underset{\text{cc}}{C}$$

porque :

$$F'(x) = [-4e^x + C]' = -4[e^x]' + [C]' = -4e^x + 0 = -4e^x$$

Respuesta del 1 b) iv) $F(x) = -4e^x + \underset{\text{cc}}{C}$

+-+

Ejercicio 2.- Hallar la función g tal que

a. $g'(x) = 8x$ y $g(0) = 4$

b. $g'(x) = -x^3$ y $g(1) = 5$

c. $g'(x) = -2\cos(x)$ y $g(\frac{\pi}{2}) = 3$

En este ejercicio 2 el cálculo de g (x) es similar al Ej 1 pero como nos dan el dato adicional de que g evaluada en un x da un resultado podremos determinar el valor de $\underset{\text{constante}}{C}$

Hallar "la" función g tal que :

Ej 2 a) $g'(x) = 8x$ y $g(0) = 4$

Buscamos una función g (x) tal que derivada dé $8x$

entonces $g(x) = 8 \cdot \frac{x^2}{2} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 4x^2 + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **porque si la derivamos**

$$[4x^2 + C]' = 4[x^2]' + [C]' = 4 \cdot 2 \cdot x + 0 = 8x$$

Y como $g(0) = \color{red}{4}$ **evaluamos en** $x = 0$ **para determinar** $\underbrace{C}_{\text{co}}$

$$g(0) = 4 \cdot 0^2 + \underbrace{C}_{\text{const}\cdots} = 0 + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \color{red}{4} \implies \underbrace{C}_{\text{constar}} = 4$$

Entonces $g(x) = 4x^2 + 4$

Escrito en notación de integrales :

si $g'(x) = 8x$ **buscamos** $g(x) = \int g'(x)\,dx = \int 8x\,dx \iff$

$$\iff g(x) = 8\int x\,dx = 8 \cdot \frac{1}{2}x^2 + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 4x^2 + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

Y como $g(0) = \color{red}{4}$

$$g(x) = 4 \cdot 0^2 + \underbrace{C}_{\text{const}\cdots} = 0 + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \color{red}{4} \implies \underbrace{C}_{\text{consta}} = 4$$

Por lo tanto $g(x) = 4x^2 + 4$

Respuesta del 2 a) $g(x) = 4x^2 + 4$

Hallar "la" función g tal que :

Ej 2 b) $g'(x) = -x^3$ **y** $g(1) = 5$

Buscamos una función $g(x)$ **tal que derivada dé** $-x^3$

entonces $g(x) = -\frac{x^4}{4} + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **porque si la derivamos**

$$\left[-\frac{x^4}{4} + C\right]' = -\frac{1}{4}[x^4]' + [C]' = -\frac{1}{4} \cdot 4 \cdot x^3 + 0 = -x^3$$

Y como $g(1) = \color{red}{5}$ **evaluamos en** $x = 1$ **para determinar** $\underbrace{C}_{\text{co}}$

$$g(1) = -\frac{1^4}{4} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = -\frac{1}{4} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \color{red}{5} \implies \underbrace{C}_{\text{constante}} = 5 + \frac{1}{4} = \frac{21}{4}$$

Entonces $g(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{21}{4}$

Escrito en notación de integrales :

si $g'(x) = -x^3$ **buscamos** $g(x) = \int g'(x)\, dx = \int -x^3\, dx \iff$

$\iff g(x) = -\int x^3\, dx = -\frac{1}{4} x^4 + \underbrace{C}_{\text{co}}$

Y como $g(1) = {\color{red}5}$

$g(1) = -\frac{1}{4} 1^4 + \underbrace{C}_{\text{constante}} = -\frac{1}{4} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = {\color{red}5} \implies \underbrace{C}_{\text{constante}} = 5 + \frac{1}{4} = \frac{21}{4}$

Por lo tanto $g(x) = -\frac{1}{4} x^4 + \frac{21}{4}$

Respuesta del 2 b) $g(x) = -\frac{1}{4} x^4 + \frac{21}{4}$

Hallar "la" función g tal que :

Ej 2 c) $g'(x) = -2\cos(x)$ **y** $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

Buscamos una función $g(x)$ **tal que derivada dé** $-2\cos(x)$

entonces $g(x) = -2\,\text{sen}(x) + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **porque si la derivamos**

$[-2\,\text{sen}(x) + C]' = -2[\text{sen}(x)]' + [C]' = -2\cos(x) + 0 = -2\cos(x)$

Y como $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = {\color{red}3}$ **evaluamos en** $x = \frac{\pi}{2}$ **para determinar** $\underbrace{C}_{\text{cons}}$ **:**

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \underbrace{C}_{\text{constante}} = -2 \cdot 1 + \underbrace{C}_{\text{constante}} = {\color{red}3} \implies \underbrace{C}_{\text{constante}} = 3 + 2 = 5$

Entonces $g(x) = -2\,\text{sen}(x) + 5$

Escrito en notación de integrales :

si $g'(x) = -2\cos(x)$ **buscamos** $g(x) = \int g'(x)\, dx = \int -2\cos(x)\, dx \iff$

$\iff g(x) = -2\int \cos(x)\, dx = -2\,\text{sen}(x) + \underbrace{C}_{\text{co}}$

Y como $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = {\color{red}3}$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \underbrace{C}_{\text{constante}} = -2 \cdot 1 + \underbrace{C}_{\text{constante}} = {\color{red}3} \implies \underbrace{C}_{\text{constante}} = {\color{red}3} + 2 = 5$

Por lo tanto $g(x) = -2\,\text{sen}(x) + 5$

Respuesta del 2 c) $g(x) = -2\,\text{sen}(x) + 5$

+-+

Ejercicio 3.- Calcular las integrales.

a. $\int x^2 dx$ b. $\int x^{123} dx$

c. $\int (2+\sqrt{x})dx$ d. $\int (6x^2 + \text{sen}(x))dx$

e. $\int (x^3+2)dx$ f. $\int x^2(1+\sqrt{x})dx$

g. $\int (e^x + \frac{1}{x^4})dx$ h. $\int (3\cos(x) - 2\,\text{sen}(x))dx$

Ej 3 b) $\int x^{123}\,dx = \frac{x^{123+1}}{123+1} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{1}{124}\,x^{124} + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

$\left(\text{Verificación}: \left[\frac{1}{124}\,x^{124} + C\right]' = \frac{1}{124}\left[x^{124}\right]' + [C]' = \frac{1}{124}\cdot 124\cdot x^{123} + 0 = x^{123} \quad , \text{ Ok}\right)$

Ej 3 c) $\int \left(2+\sqrt{x}\right) dx = \int 2\,dx + \int \sqrt{x}\,dx = 2\int 1\,dx + \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = 2\,x + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \underbrace{C}_{\text{constan}} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \int \left(2+\sqrt{x}\right) dx = 2\,x + \frac{1}{\frac{3}{2}}\,x^{\frac{3}{2}} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 2\,x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

Por lo tanto

$\int \left(2+\sqrt{x}\right) dx = 2\,x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

$\left(\text{Verificación}: \left[2\,x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C\right]' = [2\,x]' + \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\,\right]' + [C]' = 2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}} + 0 =\right.$

$\left. = 2 + x^{\frac{1}{2}} = 2 + \sqrt{x} \quad , \text{ Ok}\right)$

Ej 3 g) $\int \left(e^x + \frac{1}{x^4}\right) dx = \int e^x\,dx + \int \frac{1}{x^4}\,dx = \int e^x\,dx + \int x^{-4}\,dx =$

$= e^x + \frac{1}{(-4+1)}\,x^{-4+1} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = e^x - \frac{1}{3}\,x^{-3} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = e^x - \frac{1}{3\,x^3} + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

Por lo tanto

$\int \left(e^x + \frac{1}{x^4}\right) dx = e^x - \frac{1}{3\,x^3} + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

$\left(\textbf{Verificación}: \left[e^x - \frac{1}{3\,x^3} + C\right]' = [e^x]' - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x^3}\right]' + [C]' =\right.$

$\left. = e^x - \frac{1}{3}\,(-3)\,x^{-3-1} + 0 = e^x + x^{-3-1} = e^x + x^{-4} = e^x + \frac{1}{x^4},\ \ \text{Ok}\right)$

Ej 3 h) $\int (3\cos(x) - 2\,\text{sen}(x))\,dx = \int 3\cos(x)\,dx - \int 2\,\text{sen}(x)\,dx =$

$= 3\int \cos(x)\,dx - 2\int \text{sen}(x)\,dx = 3\,\text{sen}(x) - 2\,(-\cos(x)) + C =$

$= 3\,\text{sen}(x) + 2\cos(x) + C$

Por lo tanto

$$\int (3\cos(x) - 2\,\text{sen}(x))\,dx = 3\,\text{sen}(x) + 2\cos(x) + C$$

$\left(\textbf{Verificación}: [3\,\text{sen}(x) + 2\cos(x) + C]' = [3\,\text{sen}(x)]' + [2\cos(x)]' + [C]' =\right.$

$\left. = 3[\text{sen}(x)]' + 2[\cos(x)]' + [C]' = 3\cos(x) + 2\,(-\text{sen}(x)),\ \ \text{Ok}\right)$

Estudien el Método de sustitución, teoría sugerida por la cátedra de Mate 51

+-+

Método de sustitución

Método de integración por sustitución

Recordemos cómo se calcula la derivada de la composición (Regla de la cadena):

Si F y g son funciones derivables, entonces

$$(F \circ g(x))' = (F(g(x)))' = F'(g(x)).g'(x).$$

Nos queda entonces que la derivada de F compuesta con g en un valor x es F' evaluada en $g(x)$ multiplicada por la derivada de g en x.

Integremos a un lado y al otro:

$$\int (F \circ g(x))' dx = \int F'(g(x)).g'(x) dx.$$

Obtenemos:

$$F \circ g(x) + C = \int F'(g(x)).g'(x) dx.$$

Luego, si queremos integrar $F'(g(x)).g'(x)$, nos basta con calcular F porque ya conocemos g.

El ***método de sustitución*** nos ayuda a integrar una función que proviene de haber derivado una composición de funciones, simplificando la notación a través de la sustitución de $g(x)$ por una nueva variable u, y $g'(x)dx$ por du

$$\int F'\Big(\overbrace{g(x)}^{u}\Big)\ \overbrace{g'(x)dx}^{du} = F\Big(\overbrace{g(x)}^{u}\Big) + C.$$

Nos sugiere que nos "olvidemos" de g y de g' y nos concentremos en hallar F.

Para comprender en qué consiste este método, veamos unos ejemplos:

Ejemplo 1. Calcular $\int 2x\sqrt{x^2+1}\, dx$.

La función $h(x) = 2x\sqrt{x^2+1}$ no está en tabla, y no es ni una suma ni una resta de funciones. Podríamos sacar el 2 que está multiplicando, pero esto no nos facilitaría la tarea.

Lo que podemos apreciar es que hay una composición: la función $g(x) = x^2+1$ está "adentro" de la función raíz cuadrada. Y, más aún, también vemos que está la derivada de g multiplicando: $g'(x) = 2x$. Si la función que está dentro de la integral viniera de la derivada de una composición, tenemos identificadas muchas partes:

$$(F \circ g(x))' = F'(g(x)).g'(x).$$

Nos faltaría identificar F' y deducir quién es F. Este método nos ayuda a simplificar la notación para poder finalizar el cálculo de la integral.

Vamos a sustituir $g(x)$ por una nueva variable que llamaremos u. Y sustituiremos $g'(x)dx$ por du.

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx \underset{\substack{u = x^2+1 \\ du = (x^2+1)'dx \\ = 2x\,dx}}{=} \int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}}du \underset{\substack{\text{integral} \\ \text{por tabla}}}{=} \frac{1}{\frac{1}{2}+1}u^{\frac{1}{2}+1}+C$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}}u^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C = \boxed{\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C}$$

Cuando terminamos de integrar, volvemos a la variable original (que en este caso es x).

Verifiquemos que realmente llegamos a la solución buscada. Para esto, tenemos que derivar y ver si nos da la función de adentro de la integral:

$$\left[\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C\right]' = \left[\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]' + [C]' = \frac{2}{3}\left[(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]' + 0 =$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{3}{2}-1}(x^2+1)' = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}.2x = \sqrt{x^2+1}.2x = 2x\sqrt{x^2+1}$$

como queríamos.

Ejemplo 2. Calcular $\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+7}\,dx$.

La función a integrar no está en tabla, no hay sumas ni restas, ni constantes que podamos "sacar afuera". A diferencia del ejemplo anterior, la composición aquí no es tan evidente. Pero el hecho de que haya una función polinómica de grado 3 y otra de grado 2 podría hacernos sospechar que la segunda puede estar relacionada con la derivada de la primera. Propongamos $u = x^3-3x^2+7$. Entonces $du = (x^3-3x^2+7)'dx = (3x^2-6x)dx = 3(x^2-2x)dx$. Y esta última expresión es el numerador, salvo por un 3 que está multiplicando. Para poder utilizar el método de sustitución, vamos a agregar este 3 de la siguiente manera:

$$\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+7}\,dx = \int 1.\frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+7}\,dx = \int \frac{3}{3}.\frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+7}\,dx = \int \frac{1}{3}.\frac{3(x^2-2x)}{x^3-3x^2+7}\,dx.$$

Ahora "sacamos afuera" el $\frac{1}{3}$ y aplicamos sustitución como antes:

$$\frac{1}{3}\int \frac{3(x^2-2x)}{x^3-3x^2+7}\,dx \underset{\substack{u = x^3-3x^2+7 \\ du = (x^3-3x^2+7)'dx \\ = 3(x^2-2x)dx}}{=} \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du \underset{\substack{\text{integral} \\ \text{por tabla}}}{=} \frac{1}{3}\ln(u)+C = \boxed{\frac{1}{3}\ln(x^3-3x^2+7)+C}$$

+ - +

Ejercicio 4.- Calcular aplicando el método de sustitución.

a. $\int \frac{x}{x^2+1}dx$ **b.** $\int 4\,\mathrm{sen}(4x)dx$

c. $\int \cos(4x)dx$ **d.** $\int \frac{1}{x+3}dx$

e. $\int x\sqrt{x^2+3}dx$ **f.** $\int \frac{dx}{(3x+1)^2}$

g. $\int \frac{\ln(x)}{x}dx$

h. $\int \frac{\cos(x)}{\text{sen}^5(x)}dx$

i. $\int e^{-6x}dx$

j. $\int \frac{\ln^3(x)}{x}dx$

k. $\int x^2\cos(x^3)dx$

l. $\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}dx$

m. $\int \frac{\ln(-2x+3)}{-4x+6}dx$

n. $\int \frac{4x^3+6x^2}{3x^4+6x^3-9}dx$

o. $\int x\sqrt{x+2}dx$

p. $\int x(3x+1)^5dx$

q. $\int xe^{x^2+5}dx$

r. $\int e^{\cos(x)}\,\text{sen}(x)dx$

Ej 4 Aplicando método de sustitución calcular las siguientes integrales

Ej 4 a)

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

el método de sustitución nos sugiere encontrar en el integrando una función u (x) y su derivada u' (x) a menos de alguna constante que pueda arreglarse

Si ello sucede bastará con sustituir la función de x por u y llamar a su diferencial

du = u' dx

La idea es tranformar la $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$ **en otra integral** $\int g(u)\,du$

en una nueva variable u que sea sencilla de resolver

fíjense que si elegimos $u = x^2+1 \implies du = u'\,dx = 2\,x\,dx$

pero en el integrando no aparece 2 x sino x

Entonces hacemos aparecer el 2 que falta multiplicando y dividiendo por 2 y arreglando el integrando convenientemente

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{2}\,\frac{2\,x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\,x\,dx}{x^2+1} =$$

llamando entonces $u = x^2+1$ **y** $du = 2\,x\,dx$ **sustituyendo en la nueva variable u :**

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} =$$

Pero esta integral tiene primitiva inmediata que es $\frac{1}{2}\ln|u| + \underbrace{C}_{\text{constante}}$

$$= \frac{1}{2}\ln|u| + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

volviendo a la variable x y como $u = x^2+1$ **me quedará :**

$$= \frac{1}{2} \ln \left|x^2 + 1\right| + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

por lo tanto :

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} \, dx = \frac{1}{2} \ln \left|x^2 + 1\right| + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

Verificación :

Si derivamos $\frac{1}{2} \ln \left|x^2 + 1\right| + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $\frac{x}{x^2 + 1}$

Veamos :

$$\left[\frac{1}{2} \ln \left|x^2 + 1\right| + C\right]' = \left[\frac{1}{2} \ln \left|x^2 + 1\right|\right]' + [C]' = \frac{1}{2} \left[\ln \left|x^2 + 1\right|\right]' + 0 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2 x = \frac{x}{x^2 + 1} \quad , \text{ ok}$$

Ej 4 b)

$$\int 4 \operatorname{sen} (4 x) \, dx$$

en este caso llamamos

$u = 4 x \implies$ y como $du = u' \, dx \implies du = u' \, dx = 4 \, dx$

sustituyendo quedará :

$$\int 4 \operatorname{sen} (4 x) \, dx = \int \operatorname{sen} (4 x) \, 4 \, dx = \int \operatorname{sen} (u) \, du = -\cos (u) + \underbrace{C}_{\text{constante}} = -\cos (4 x) + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

por lo tanto :

$$\int 4 \operatorname{sen} (4 x) \, dx = -\cos (4 x) + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

Verificación :

Si derivamos $-\cos (4 x) + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $4 \operatorname{sen} (4 x)$

Veamos :

$$[-\cos (4 x) + C]' = [-\cos (4 x)]' + [C]' = -[\cos (4 x)]' + 0 =$$

$$= -(-\operatorname{sen} (4 x)) \cdot 4 = 4 \operatorname{sen} (4 x) \quad , \text{ ok}$$

Ej 4 e)

$$\int x\,\sqrt{x^2+3}\;dx$$

llamemos $u = x^2 + 3$ y como $du = u'\,dx \implies du = 2\,x\,dx \implies \frac{1}{2}\,du = x\,dx$

sustituyendo quedará :

$$\int x\,\sqrt{x^2+3}\;dx = \int \sqrt{x^2+3}\;x\,dx = \int \sqrt{u}\;\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\;du =$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+1\right)}\,u^{\frac{1}{2}+1} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}\,u^{\frac{3}{2}} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\,u^{\frac{3}{2}} + \underbrace{C}_{\text{cons}} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{u^3} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+3\right)^3} + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

por lo tanto :

$$\int x\,\sqrt{x^2+3}\;dx = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+3\right)^3} + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

Verificación :

Si derivamos $\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+3\right)^3} + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ como resultado tenemos que obtener

el integrando $x\,\sqrt{x^2+3}$

Veamos :

$$\left[\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+3\right)^3} + C\right]' = \left[\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+3\right)^3}\right]' + [C]' = \frac{1}{3}\left[\left(x^2+3\right)^{\frac{3}{2}}\right]' + 0 =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\left(x^2+3\right)^{\frac{3}{2}-1}\cdot 2\,x = \frac{1}{2}\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2\,x = x\,\sqrt{x^2+3} \qquad ,\ \text{ok}$$

Ej 4 f)

$$\int \frac{dx}{\left(3\,x+1\right)^2}$$

llamemos $u = 3\,x + 1$ y como $du = u'\,dx \implies du = 3\,dx \implies \frac{1}{3}\,du = dx$

sustituyendo quedará :

$$\int \frac{dx}{(3x+1)^2} = \int \frac{1}{3}\,\frac{du}{u^2} = \frac{1}{3}\int u^{-2}\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(-2+1)}\,u^{-2+1} + \underset{\text{cons}}{C} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(-1)}\,u^{-1} + \underset{\text{constante}}{C} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{u} + \underset{\text{constante}}{C} = -\frac{1}{3(3x+1)} + \underset{\text{cc}}{C}$$

por lo tanto :

$$\int \frac{dx}{(3x+1)^2} = -\frac{1}{3\,(3x+1)} + \underset{\text{cc}}{C}$$

Verificación :

Si derivamos $-\dfrac{1}{3\,(3x+1)} + \underset{\text{constante}}{C}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $\dfrac{1}{(3x+1)^2}$

Veamos :

$$\left[-\frac{1}{3\,(3x+1)} + C\right]' = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(3x+1)}\right]' + [C]' = -\frac{1}{3}\left[(3x+1)^{-1}\right]' + 0 =$$

$$= -\frac{1}{3}\,(-1)\,(3x+1)^{-2}\cdot 3 = -\frac{1}{3}\,(-1)\,3\,(3x+1)^{-2} = \frac{1}{(3x+1)^2} \qquad \text{, ok}$$

Ej 4 g)

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$$

como $\dfrac{1}{x}$ **es la derivada del** $\ln(x)$ **conviene llamar**

$u = \ln(x)$ **y como** $du = u'\,dx \implies du = \dfrac{1}{x}\,dx$

sustituyendo quedará :

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int \ln(x)\,\frac{1}{x}\,dx = \int u\,du = \frac{1}{2}\,u^2 + \underset{\text{cons}}{C} =$$

$$= \frac{1}{2}\,(\ln(x))^2 + \underset{\text{constante}}{C} = \frac{1}{2}\ln^2(x) + \underset{\text{cc}}{C}$$

por lo tanto :

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln^2(x) + \underset{\text{cc}}{C}$$

Verificación :

Si derivamos $\frac{1}{2}\ln^2(x) + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $\frac{\ln(x)}{x}$

Veamos :

$$\left[\frac{1}{2}\ln^2(x) + C\right]' = \frac{1}{2}\left[\ln^2(x)\right]' + [C]' = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln(x)\,.\,\frac{1}{x} + 0 =$$

$$= \frac{\ln(x)}{x} \quad , \text{ ok}$$

Ej 4 i)

$$\int e^{-6x}\,dx$$

conviene llamar

$$u = -6x \quad \text{y como} \quad du = u'\,dx \implies du = -6\,dx \implies -\frac{1}{6}\,du = dx$$

sustituyendo quedará :

$$\int e^{-6x}\,dx = \int e^{u}\left(-\frac{1}{6}\right)du = \left(-\frac{1}{6}\right)\int e^{u}\,du =$$

$$= -\frac{1}{6}e^{u} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = -\frac{1}{6}e^{-6x} + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

por lo tanto :

$$\int e^{-6x}\,dx = -\frac{1}{6}e^{-6x} + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

Ej 4 q)

$$\int x\,e^{x^2+5}\,dx$$

llamamos $u = x^2 + 5$ **y como** $du = u'\,dx \implies du = 2\,x\,dx \implies \frac{1}{2}\,du = x\,dx$

sustituyendo :

$$\int x\ e^{x^2+5}\ dx = \int e^{x^2+5}\ x\,dx = \int e^{u}\ \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int e^{u}\ du = \frac{1}{2}\ e^{u} + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

volviendo a la variable x :

$$= \frac{1}{2}\ e^{x^2+5} + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

por lo tanto :

$$\int x\ e^{x^2+5}\ dx = \frac{1}{2}\ e^{x^2+5} + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

Verificación :

Si derivamos $\frac{1}{2}\ e^{x^2+5} + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $x\ e^{x^2+5}$

Veamos :

$$\left[\frac{1}{2}\ e^{x^2+5} + C\right]' = \frac{1}{2}\left[e^{x^2+5}\right]' + [C]' = \frac{1}{2}\ e^{x^2+5}\cdot 2\,x + 0 = e^{x^2+5}\cdot x = x\ e^{x^2+5}\ ,\ \ \text{ok}$$

Ej 4 r)

$$\int e^{\cos(x)}\ \text{sen}(x)\ dx$$

llamamos $u = \cos(x)$ **y como** $du = u'\,dx \implies du = -\text{sen}(x)\ dx$

$\implies\ -du = \text{sen}(x)\ dx$

sustituyendo :

$$\int e^{\cos(x)}\ \text{sen}(x)\ dx = \int e^{u}\ (-du) = -\int e^{u}\,du = -e^{u} + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

volviendo a la variable x :

$$= -e^{\cos(x)} + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

por lo tanto :

$$\int e^{\cos(x)}\ \text{sen}(x)\ dx = -e^{\cos(x)} + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

Verificación :

Si derivamos $\underbrace{-e^{\cos(x)} + C}_{\text{constante}}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $e^{\cos(x)}\,\mathrm{sen}(x)$

Veamos :

$$\left[-e^{\cos(x)} + C\right]' = -\left[e^{\cos(x)}\right]' + [C]' = -e^{\cos(x)}\,(-\mathrm{sen}(x)) + 0 = e^{\cos(x)}\,\mathrm{sen}(x) \quad , \quad \text{ok}$$

+-+

Para resolver el Ej 5 hace falta estudiar el Método de integración por partes

sugerido por la cátedra de Mate 51

Método de integración por partes

Recordemos cómo se calcula la derivada del producto de dos funciones:
Si f y g son funciones derivables,

$$(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x).$$

Integremos ambos miembros:

$$\int (f(x).g(x))' dx = \int [f'(x).g(x) + f(x).g'(x)]dx.$$

El miembro izquierdo nos da (por definición de integral indefinida), $f(x).g(x) + C$; y en el miembro derecho podemos escribir la integral de la suma como la suma de las integrales:

$$f(x).g(x) + C = \int f'(x).g(x)dx + \int f(x).g'(x)dx.$$

Si pasamos restando uno de los términos, obtenemos la siguiente expresión:

$$f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx + C = \int f(x).g'(x)dx.$$

De estas cuentas que acabamos de hacer surge el método de integración por partes que nos indica que

$$\boxed{\int f(x).g'(x)dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx}$$

Veamos en un ejemplo cómo nos es útil este método:

Ejemplo 1. Calcular $\int x\cos(x)dx$.

Esta integral no está en tabla, no tiene ninguna suma (o resta), no tiene ningún número que pueda "sacarse afuera", ni tiene ninguna composición evidente. Intentamos entonces calcularla utilizando el método de integración por partes. Entre los factores, x y $\cos(x)$, elegimos uno que llamaremos $f(x)$ y otro que jugará el rol de $g'(x)$. Tomemos $f(x) = x$ y $g'(x) = \cos(x)$. Para aplicar el método, tenemos que obtener $f'(x)$, que en este caso es $f'(x) = 1$; y $g(x)$, que es una primitiva de $g'(x)$, y en este caso vemos en la tabla que puede ser $g(x) = \text{sen}(x)$. Entonces nos queda:

$$\begin{array}{ccc} \int x\cos(x)dx & \underset{\substack{\downarrow \\ f(x)=x\to f'(x)=1 \\ g'(x)=\cos(x)\to g(x)=\text{sen}(x)}}{=} & x\,\text{sen}(x) - \int 1.\,\text{sen}(x)dx = x\,\text{sen}(x) - \int \text{sen}(x)dx \\ & \underset{\substack{\downarrow \\ \text{integral por tabla}}}{=} & x\,\text{sen}(x) - (-\cos(x)) + C = \boxed{x\,\text{sen}(x) + \cos(x) + C} \end{array}$$

Algunas observaciones:

- Este método nos reduce el cálculo de una integral al de otra más sencilla. En este ejemplo, pasamos de integrar $x\cos(x)$ a integrar $\text{sen}(x)$, que está en tabla.
- La constante de integración C la sumamos una vez que no tenemos que calcular más integrales. Hay otras formas correctas de tratar la suma de estas constantes, pero sumarla en esta instancia es una de las formas más convenientes.
- La función g puede ser \textbf{cualquier} primitiva de la función que llamamos g'. En general, conviene elegir aquella cuya constante de integración es cero.
- No hay una forma clásica de elegir qué función jugará el papel de f y cuál el de g'. A pesar de que existen algunas reglas prácticas que indican qué elección conviene hacer, la mejor manera de aprender a elegir es a través de la práctica, calculando muchas integrales. En este ejemplo, si hubiéramos elegido $f(x) = \cos(x)$ y $g'(x) = x$ habríamos llegado a una integral que tampoco sabemos resolver con los métodos anteriores:

$$\int x\cos(x)dx \underset{\substack{f(x)=\cos(x)\to f'(x)=-\operatorname{sen}(x) \\ g'(x)=x\to g(x)=\frac{x^2}{2}}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{x^2}{2}(-\operatorname{sen}(x)) - \int(-\operatorname{sen}(x))\frac{x^2}{2}dx$$

$$= -\frac{x^2}{2}\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{2}\int x^2\operatorname{sen}(x)dx$$

Ejemplo 2. Calcular $\int x^2 \operatorname{sen}(x)dx$.

Esta integral tampoco está en tabla, no tiene ninguna suma (o resta), no tiene ningún número que pueda "sacarse afuera", ni tiene ninguna composición evidente. Intentamos, nuevamente, resolverla utilizando el método de integración por partes, Entre los factores, x^2 y $\operatorname{sen}(x)$, elegimos uno que llamaremos $f(x)$ y otro que jugará el rol de $g'(x)$. Tomemos $f(x) = x^2$ y $g'(x) = \operatorname{sen}(x)$ (¿qué pasaba si lo tomábamos al revés?).

$$\int x^2\operatorname{sen}(x)dx \underset{\substack{f(x)=x^2\to f'(x)=2x \\ g'(x)=\operatorname{sen}(x)\to g(x)=-\cos(x)}}{\overset{\downarrow}{=}} x^2(-\cos(x)) - \int 2x(-\cos(x))dx = -x^2\cos(x) + 2\int x\cos(x)dx$$

Esta última integral que nos aparece no está en tabla, pero la calculamos en el ejemplo anterior (también utilizando el método de integración por partes), Así, utilizando el método de integración por parte dos veces, resolvemos nuestra integral original:

$$\int x^2\operatorname{sen}(x)dx \underset{\substack{f(x)=x^2\to f'(x)=2x \\ g'(x)=\operatorname{sen}(x)\to g(x)=-\cos(x)}}{\overset{\downarrow}{=}} -x^2\cos(x) + 2\int x\cos(x)dx$$

$$\underset{\substack{f(x)=x\to f'(x)=1 \\ g'(x)=\cos(x)\to g(x)=\operatorname{sen}(x)}}{\overset{\downarrow}{=}} -x^2\cos(x) + 2\left(x\operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x)dx\right)$$

$$= \boxed{-x^2\cos(x) + 2(x\operatorname{sen}(x) + \cos(x)) + C}$$

Ejemplo 3. Calcular $\int e^{3x}(5x+1)\,dx$.

La función adentro de esta integral no está en tabla pero, si distribuimos, es la integral de una suma. Sin embargo, separar esta suma no necesariamente nos va a simplificar las cuentas (esto se aprende después de mucha ejercitación).

Aunque vemos la composición de la función e^x con $h(x) = 3x$, no encontramos relación entre $5x+1$ y $(3x)' = 3$. Luego, podemos ver si se resuelve con el método de integración por partes. Vamos a tomar $f(x) = 5x+1$ y por lo tanto será $f'(x) = 5$. Y si tomamos $g'(x) = e^{3x}$ (que no está en la tabla), para hallar g tenemos que aplicar el método de sustitución, por la composición que acabamos de mencionar.

$$\int e^{3x}dx \underset{\substack{\downarrow \\ u=3x \\ du=3dx}}{=} \int \frac{3}{3}.e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{3x}+C$$

Entonces, para resolver nuestra integral procedemos de la siguiente manera:

$$\int e^{3x}(5x+1)dx \underset{\substack{\downarrow \\ f(x)=(5x+1)\to f'(x)=5 \\ g'(x)=e^{3x}\to g(x)=\frac{1}{3}e^{3x}}}{=} \frac{1}{3}(5x+1)e^{3x} - \int 5.\frac{1}{3}.e^{3x}dx = \frac{1}{3}(5x+1)e^{3x} - \frac{5}{3}\int e^{3x}dx \underset{\substack{\downarrow \\ \text{como arriba}}}{=}$$

$$\frac{1}{3}(5x+1)e^{3x} - \frac{5}{3}.\frac{1}{3}e^{3x} + C = \boxed{\frac{1}{3}(5x+1)e^{3x} - \frac{5}{9}e^{3x} + C}$$

+-+

Ejercicio 5.- Calcular aplicando el método de integración por partes.

a. $\int x\cos(x)dx$ **b.** $\int xe^x dx$

c. $\int x\sqrt{x+2}\,dx$ **d.** $\int x^9 \ln(x)dx$

e. $\int x^3 \ln\left(\frac{1}{x}\right)dx$ **f.** $\int x^2 e^{-x}dx$

g. $\int x^2 \operatorname{sen}(x)dx$ **h.** $\int (x^2+x)(x-2)^{-3}dx$

El método de integración por partes deducido de la derivación del producto de funciones sugiere encontrar en el integrando funciones u y v' que hacen que la integral a resolver se transforme en una más sencilla

Usaremos esta notación :

sean u, v dos funciones reales de x , derivables e integrables

entonces como $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$

si integramos en ambos miembros :

$$\int (u\cdot v)'\,dx = \int \left(u'\cdot v + u\cdot v'\right) dx = \int u'\cdot v\,dx + \int u\cdot v'\,dx \qquad (*)$$

del lado izquierdo de la igualdad, la integral es de resolución inmediata

por definición misma de primitiva ó integral indefinida

(la integral de la derivada de una función es la misma función)

$$\int (u \cdot v)' \, dx = u \cdot v + \underset{\text{co}}{C}$$

Reemplazando $\int (u \cdot v)' \, dx = u \cdot v + \underset{\text{constante}}{C}$ **: en**

$$\int (u \cdot v)' \, dx = \int u' \cdot v \, dx + \int u \cdot v' \, dx$$

$$= u \cdot v + \underset{\text{constante}}{C} = \int u' \cdot v \, dx + \int u \cdot v' \, dx$$

despejando $\int u \cdot v' \, dx$ **:**

el método de integración por partes sugiere entonces que :

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx + \underset{\text{co}}{C}$$

Apliquemos el método al Ej 5

Ej 5 b) Calcular

$$\int x \, e^x \, dx$$

en el integrando hay un producto de 2 funciones de x :

$x \quad y \quad e^x$

mirando las integrales del método de integración por partes :

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx + \underset{\text{co}}{C}$$

llamamos $u = x$ **y** $v' = e^x$ **entonces :**

si $u = x \quad \Longrightarrow \quad u' = 1$

si $v' = e^x \quad \Longrightarrow \quad v = \int e^x \, dx = e^x$

(las constantes de integración las juntamos todas en una $\underset{\text{constante}}{C}$ **única al final)**

reemplacemos todo esto para ver como queda la integración por partes :

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx + \underset{\text{co}}{C}$$

$$\int x \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - \int e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x + \underset{\text{co}}{C}$$

$$= e^x (x - 1) + \underset{\text{co}}{C}$$

por lo tanto :

$$\int x\ e^x\, dx = e^x\ (x - 1)\ + \underset{\text{cc}}{C}$$

Verificación :

Si derivamos $e^x\ (x - 1) + \underset{\text{constante}}{C}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $x \cdot e^x$

Veamos :

$$\left[e^x\ (x - 1)\ + C\ \right]' = \left[e^x\ (x - 1)\ \right]' + [C\ ]' =$$

$$= [e^x\ ]' \cdot\ (x - 1)\ + e^x \cdot\ \left[\ (x - 1)\right]' + 0 = e^x\ (x - 1)\ + e^x \cdot 1 =$$

$$= e^x \cdot x - e^x + e^x = x\ e^x \quad , \quad \text{ok}$$

Ej 5 c) Calcular

$$\int x\ \sqrt{x + 2}\ dx$$

en el integrando hay un producto de 2 funciones de x :

$x \quad y \quad \sqrt{x + 2}$

mirando las integrales del método de integración por partes :

$$\int u \cdot v'\ \ dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\ dx + \underset{\text{cc}}{C}$$

llamamos $u = x \quad y \quad v' = \sqrt{x + 2}$ **entonces :**

$$\text{si}\ \ u = x \qquad \Longrightarrow \quad u' = 1$$

$$\text{si}\ \ v' = \sqrt{x + 2} \quad \Longrightarrow \quad v = \int \sqrt{x + 2}\ dx = \int (x + 2)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2}{3}\ (x + 2)^{\frac{3}{2}}$$

(las constantes de integración las juntamos todas en una $\underset{\text{constante}}{C}$ **única al final)**

reemplacemos todo esto para ver como queda la integración por partes :

$$\int u \cdot v'\ \ dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\ dx + \underset{\text{cc}}{C}$$

$$\int x \cdot \sqrt{x + 2}\ \ dx = x \cdot \frac{2}{3}\ (x + 2)^{\frac{3}{2}} - \int 1 \cdot \frac{2}{3}\ (x + 2)^{\frac{3}{2}}\, dx\ =$$

$$= \frac{2}{3}\, x \cdot\ (x + 2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \int (x + 2)^{\frac{3}{2}}\, dx\ = \frac{2}{3}\, x \cdot\ (x + 2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}\ (x + 2)^{\frac{5}{2}} + \underset{\text{cons}}{C} =$$

$$= \frac{2}{3}\, x\ (x + 2)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}\ (x + 2)^{\frac{5}{2}} + \underset{\text{constante}}{C} = \frac{2}{3}\, x \sqrt{(x + 2)^3} - \frac{4}{15} \sqrt{(x + 2)^5} + \underset{\text{cc}}{C}$$

por lo tanto :

$$\int x\ \sqrt{x+2}\ dx = \frac{2}{3}\,x\,\sqrt{(x+2)^3} - \frac{4}{15}\,\sqrt{(x+2)^5} + C$$

cc

(Nota : en el medio del cálculo hemos usado método de sustitución
llamando $m = x + 2 \implies dm = 1\,dx$ etc etc)

Verificación :

Si derivamos $\frac{2}{3}\,x\,\sqrt{(x+2)^3} - \frac{4}{15}\,\sqrt{(x+2)^5} + C$ como resultado tenemos que obtener

constante

el integrando $x\ \sqrt{x+2}$

Veamos :

$$\left[\frac{2}{3}\,x\,\sqrt{(x+2)^3} - \frac{4}{15}\,\sqrt{(x+2)^5} + C\right]' = \left[\frac{2}{3}\,x\,(x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}\,(x+2)^{\frac{5}{2}}\right]' + [C]' =$$

$$= \left[\frac{2}{3}\,x\,(x+2)^{\frac{3}{2}}\right]' - \left[\frac{4}{15}\,(x+2)^{\frac{5}{2}}\right]' + 0 =$$

$$= \left[\frac{2}{3}\,x\right]' \cdot (x+2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\,x \cdot \left[(x+2)^{\frac{3}{2}}\right]' - \frac{4}{15}\left[(x+2)^{\frac{5}{2}}\right]' =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot (x+2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\,x \cdot \frac{3}{2} \cdot (x+2)^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{15} \cdot \frac{5}{2} \cdot (x+2)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot (x+2)^{\frac{3}{2}} + x \cdot (x+2)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} \cdot (x+2)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= x \cdot (x+2)^{\frac{1}{2}} = ,\ x\ \sqrt{x+2}\quad ,\quad \text{ok}$$

Ej 5 d) Calcular

$$\int x^9\ \ln(x)\ dx$$

en el integrando hay un producto de 2 funciones de x :

x^9 y $\ln(x)$

mirando las integrales del método de integración por partes :

$$\int u \cdot v'\ dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\ dx + C$$

cc

llamamos $u = \ln(x)$ y $v' = x^9$ entonces :

si $u = \ln(x) \implies u' = \frac{1}{x}$

si $v' = x^9 \implies v = \int x^9\,dx = \frac{1}{10}\,x^{10}$

(las constantes de integración las juntamos todas en una C única al final)

constante

reemplacemos todo esto para ver como queda la integración por partes :

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

$$\int \ln(x) \cdot x^9 \, dx = \ln(x) \cdot \frac{1}{10} x^{10} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{10} x^{10} \, dx =$$

$$= \frac{1}{10} x^{10} \ln(x) - \frac{1}{10} \int x^9 \, dx =$$

$$= \frac{1}{10} x^{10} \ln(x) - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} x^{10} + \underbrace{C}_{\text{cons}} =$$

$$= \frac{1}{10} x^{10} \ln(x) - \frac{1}{100} x^{10} + \underbrace{C}_{\text{cons}} =$$

$$= \frac{1}{10} x^{10} \left(\ln(x) - \frac{1}{10} \right) + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

por lo tanto :

$$\int x^9 \ln(x) \, dx = \frac{1}{10} x^{10} \left(\ln(x) - \frac{1}{10} \right) + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

Verificación :

Si derivamos $\frac{1}{10} x^{10} \left(\ln(x) - \frac{1}{10} \right) + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $x^9 \ln(x)$

Veamos :

$$\left[\frac{1}{10} x^{10} \left(\ln(x) - \frac{1}{10} \right) + C \right]' =$$

$$= \left[\frac{1}{10} x^{10} \right]' \cdot \left(\ln(x) - \frac{1}{10} \right) + \frac{1}{10} x^{10} \cdot \left[\left(\ln(x) - \frac{1}{10} \right) \right]' + [C]' =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot 10 x^9 \cdot \left(\ln(x) - \frac{1}{10} \right) + \frac{1}{10} x^{10} \cdot \left([\ln(x)]' - \left[\frac{1}{10} \right]' \right) + 0 =$$

$$= x^9 \cdot \left(\ln(x) - \frac{1}{10} \right) + \frac{1}{10} x^{10} \cdot \left(\frac{1}{x} - 0 \right) =$$

$$= x^9 \cdot \ln(x) - x^9 \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{10} x^{10} \cdot \left(\frac{1}{x} \right) =$$

$$= x^9 \cdot \ln(x) - \frac{1}{10} x^9 + \frac{1}{10} x^9 =$$

$$= x^9 \cdot \ln(x) \quad , \quad \text{ok}$$

Ej 5 f) Calcular

$$\int x^2\ e^{-x}\, dx$$

en el integrando hay un producto de 2 funciones de x :

$x^2 \quad y \quad e^{-x}$

mirando las integrales del método de integración por partes :

$$\int u \cdot v'\ dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\ dx + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

llamamos $u = x^2 \quad y \quad v' = e^{-x}$ **entonces :**

si $u = x^2 \quad \Longrightarrow \quad u' = 2\,x$

si $v' = e^{-x} \quad \Longrightarrow \quad v = \int e^{-x}\, dx = -e^{-x}$

(las constantes de integración las juntamos todas en una C única al final)
constante

reemplacemos todo esto para ver como queda la integración por partes :

$$\int u \cdot v'\ dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\ dx + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

$$\int x^2 \cdot e^{-x}\, dx = x^2 \cdot (-e^{-x}) - \int 2\,x \cdot (-e^{-x})\ dx =$$

$$= -x^2\, e^{-x} + 2 \int x\, e^{-x}\, dx = \qquad (*)$$

----

cálculo auxiliar :

calculemos por partes tambien $\int x\, e^{-x}\, dx$

$$\int f \cdot g'\ dx = f \cdot g - \int f' \cdot g\ dx + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

llamamos $f = x \quad y \quad g' = e^{-x}$ **entonces :**

si $f = x \quad \Longrightarrow \quad f' = 1$

si $g' = e^{-x} \quad \Longrightarrow \quad g = \int e^{-x}\, dx = -e^{-x}$ **(acá usamos sustitución)**

$$\left(u = -x \quad du = -1\, dx = -dx \quad \Longrightarrow \quad \int e^{-x}\, dx = \int e^{u}\ (-du) = -e^{u} = -e^{-x} \right)$$

reemplacemos todo esto para ver como queda la integración por partes del cálculo auxiliar :

(las constantes de integración las juntamos todas en una C única al final)
constante

$$\int f \cdot g' \, dx = f \cdot g - \int f' \cdot g \, dx$$

$$\int x \cdot e^{-x} \, dx = x \cdot (-e^{-x}) - \int 1 \cdot (-e^{-x}) \, dx$$

$$= -x \, e^{-x} + \int e^{-x} \, dx =$$

$$= -x \, e^{-x} + (-e^{-x}) = -e^{-x} (x+1)$$

----

reemplazando el cálculo auxiliar en (*)

$$= -x^2 e^{-x} + 2 \int x \, e^{-x} \, dx = \qquad (*)$$

$$= -x^2 e^{-x} + 2 \left(-e^{-x} (x+1)\right) + \underbrace{C}_{\text{cons}} =$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2 \, e^{-x} (x+1) + \underbrace{C}_{\text{constante}} = e^{-x} \left(-x^2 - 2x - 2\right) + \underbrace{C}_{\text{cons}} =$$

$$= -e^{-x} \left(x^2 + 2x + 2\right) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

por lo tanto :

$$\int x^2 \, e^{-x} \, dx = -e^{-x} \left(x^2 + 2x + 2\right) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

Verificación :

Si derivamos $-e^{-x} \left(x^2 + 2x + 2\right) + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $x^2 \, e^{-x}$

Veamos :

$$\left[-e^{-x} \left(x^2 + 2x + 2\right) + C\right]' = -\left[e^{-x} \left(x^2 + 2x + 2\right)\right]' + [C]' =$$

$$= -\left\{[e^{-x}]' \cdot \left(x^2 + 2x + 2\right) + e^{-x} \cdot \left[x^2 + 2x + 2\right]'\right\} + 0 =$$

$$= -\left\{-e^{-x} \cdot \left(x^2 + 2x + 2\right) + e^{-x} \cdot (2x + 2)\right\} =$$

$$= \left\{e^{-x} \cdot \left(x^2 + 2x + 2\right) - e^{-x} \cdot (2x + 2)\right\} =$$

$$= e^{-x} \left\{x^2 + 2x + 2 - 2x - 2\right\} =$$

$$= e^{-x} \left\{x^2\right\} = x^2 \, e^{-x} \quad , \quad \text{ok}$$

+-+

Ejercicio 6.- Calcular.

a. $\int x^{3/2}(x-3)^2\,dx$ **b.** $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln(x))}{x}\,dx$

c. $\int \left(x^3+5x^2+(5x-1)^3\right)dx$ **d.** $\int \ln(\operatorname{sen}(x))\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\,dx$

e. $\int \left(\frac{\cos(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}+1\right)dx$ **f.** $\int \left(x^2\cos(6x-2)+e^{2x}\right)dx$

Ej 6 Calcular las integrales :

Ej 6 a) $\int x^{\frac{3}{2}}\,(x-3)^2\,dx$

Usaremos integración por partes para ir bajándole el grado al exponente de

$(x-3)^2$

en el integrando hay un producto de 2 funciones de x :

$x^{\frac{3}{2}}$ **y** $(x-3)^2$

mirando las integrales del método de integración por partes :

$$\int u\cdot v'\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx + C$$

co

llamamos $u = x^2$ **y** $v' = \operatorname{sen}(x)$ **entonces :**

si $u = (x-3)^2 \implies u' = 2\,(x-3)$

si $v' = x^{\frac{3}{2}} \implies v = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1}\,x^{\frac{3}{2}+1} = \frac{1}{\frac{5}{2}}\,x^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}\,x^{\frac{5}{2}}$

(las constantes de integración las juntamos todas en una C única al final)

constante

reemplacemos todo esto para ver como queda la integración por partes :

$$\int u\cdot v'\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx + C$$

co

$$\int (x-3)^2\cdot x^{\frac{3}{2}}\,dx = (x-3)^2\cdot\frac{2}{5}\,x^{\frac{5}{2}} - \int 2\,(x-3)\cdot\frac{2}{5}\,x^{\frac{5}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{2}{5}\,(x-3)^2\cdot x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{5}\int (x-3)\cdot x^{\frac{5}{2}}\,dx = \qquad (*)$$

Vemos que el método de integración por partes está funcionando porque la integral que resta por calcular es más sencilla que la original

$\int (x-3)\cdot x^{\frac{5}{2}}\,dx$ **frente a** $\int x^{\frac{3}{2}}\,(x-3)^2\,dx$

Observen que $(x-3)$ bajó un grado y cuando apliquemos integración por partes nuevamente no estará en el integrando

----

cálculo auxiliar :

calculemos por partes también $\int (x-3) \cdot x^{\frac{5}{2}}\, dx$

$$\int f \cdot g' \, dx = f \cdot g - \int f' \cdot g \, dx + C$$

cc

llamamos $f = x - 3$ **y** $g' = x^{\frac{5}{2}}$ **entonces :**

si $f = x - 3 \implies f' = 1$

si $g' = x^{\frac{5}{2}} \implies g = \int x^{\frac{5}{2}} dx = \dfrac{1}{\frac{5}{2}+1} x^{\frac{5}{2}+1} = \dfrac{1}{\frac{7}{2}} x^{\frac{7}{2}} = \dfrac{2}{7} x^{\frac{7}{2}}$

reemplacemos todo esto para ver como queda la integración por partes del cálculo auxiliar :

(las constantes de integración las juntamos todas en una C única al final)

constante

$$\int f \cdot g' \, dx = f \cdot g - \int f' \cdot g \, dx$$

$$\int (x-3) \cdot x^{\frac{5}{2}} \, dx = (x-3) \cdot \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - \int 1 \cdot \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} dx =$$

$$= \frac{2}{7} (x-3) \cdot x^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{7} \int x^{\frac{7}{2}} dx =$$

$$= \frac{2}{7} (x-3) \cdot x^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{\frac{7}{2}+1} x^{\frac{7}{2}+1} =$$

$$= \frac{2}{7} (x-3) \cdot x^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{\frac{9}{2}} x^{\frac{9}{2}} = \frac{2}{7} (x-3) \cdot x^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{9} x^{\frac{9}{2}} =$$

$$= \frac{2}{7} (x-3) \cdot x^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{63} \cdot x^{\frac{9}{2}}$$

----

reemplazando el cálculo auxiliar en (*)

$$= \frac{2}{5} (x-3)^2 \cdot x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{5} \int (x-3) \cdot x^{\frac{5}{2}} dx = \qquad (*)$$

$$= \frac{2}{5} (x-3)^2 \cdot x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{5} \left(\frac{2}{7} (x-3) \cdot x^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{63} \cdot x^{\frac{9}{2}} \right) + C =$$

cons

$$= \frac{2}{5} (x-3)^2 \cdot x^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{35} (x-3) \cdot x^{\frac{7}{2}} + \frac{16}{315} \cdot x^{\frac{9}{2}} + C$$

cc

por lo tanto :

$$\int x^{\frac{3}{2}} (x-3)^2 dx = \frac{2}{5} (x-3)^2 \cdot x^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{35} (x-3) \cdot x^{\frac{7}{2}} + \frac{16}{315} \cdot x^{\frac{9}{2}} + C$$

cc

Verificación :

Si derivamos $\frac{2}{5}(x-3)^2 \cdot x^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{35}(x-3) \cdot x^{\frac{7}{2}} + \frac{16}{315} \cdot x^{\frac{9}{2}} + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $x^{\frac{3}{2}}(x-3)^2$

Veamos :

$$\left[\frac{2}{5}(x-3)^2 \cdot x^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{35}(x-3) \cdot x^{\frac{7}{2}} + \frac{16}{315} \cdot x^{\frac{9}{2}} + C\right]' =$$

$$= \frac{2}{5}\left[(x-3)^2 \cdot x^{\frac{5}{2}}\right]' - \frac{8}{35}\left[(x-3) \cdot x^{\frac{7}{2}}\right]' + \frac{16}{315}\left[x^{\frac{9}{2}}\right]' + [C]' =$$

$$= \frac{2}{5}\left\{\left[(x-3)^2\right]' \cdot x^{\frac{5}{2}} + (x-3)^2 \cdot \left[x^{\frac{5}{2}}\right]'\right\} - \frac{8}{35}\left\{\left[(x-3)\right]' \cdot x^{\frac{7}{2}} + (x-3) \cdot \left[x^{\frac{7}{2}}\right]'\right\} +$$

$$+ \frac{16}{315} \cdot \frac{9}{2} x^{\frac{7}{2}} + 0 =$$

$$= \frac{2}{5}\left\{2(x-3) \cdot x^{\frac{5}{2}} + (x-3)^2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right\} - \frac{8}{35}\left\{1 \cdot x^{\frac{7}{2}} + (x-3) \cdot \frac{7}{2} \cdot x^{\frac{5}{2}}\right\} + \frac{8}{35} x^{\frac{7}{2}} =$$

$$= \frac{4}{5}(x-3) \cdot x^{\frac{5}{2}} + (x-3)^2 \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{35} x^{\frac{7}{2}} - \frac{8}{35} \cdot \frac{7}{2} \cdot (x-3) \cdot x^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{35} x^{\frac{7}{2}} =$$

$$= \frac{4}{5}(x-3) \cdot x^{\frac{5}{2}} + (x-3)^2 \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{35} x^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5} \cdot (x-3) \cdot x^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{35} x^{\frac{7}{2}} =$$

$$= (x-3)^2 \cdot x^{\frac{3}{2}} \quad , \quad \text{Ok}$$

Ej 6 b) $\int \frac{\text{sen}(\ln(x))}{x} dx$

Como la derivada del $\ln(x)$ **es** $\frac{1}{x}$ **y el** $\ln(x)$ **aparece compuesta con** $\text{sen}(x)$

conviene usar método de sustitución

llamamos $u = \ln(x) \implies du = u' \, dx = \frac{1}{x} dx$

sustituyendo :

$$\int \frac{\text{sen}(\ln(x))}{x} dx = \int \text{sen}(\ln(x)) \frac{1}{x} dx = \int \text{sen}(u) \, du = -\cos(u) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

reemplazando $u = \ln(x)$

$$= -\cos(\ln(x)) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

por lo tanto :

$$\int \frac{\text{sen}(\ln(x))}{x}\,dx = -\cos(\ln(x)) + \underset{\text{cc}}{C}$$

Verificación :

Si derivamos $-\cos(\ln(x)) + \underset{\text{constante}}{C}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $\frac{\text{sen}(\ln(x))}{x}$

Veamos :

$[-\cos(\ln(x)) + C]' =$

$= -[\cos(\ln(x))]' + [C]' =$

$= -\left(-\text{sen}(\ln(x)) \cdot [\ln(x)]' + 0 =\right.$

$= \text{sen}(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x} =$

$= \frac{\text{sen}(\ln(x))}{x}$, Ok

Ej 6 e) $\int \left(\frac{\cos\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}} + 1\right) dx$

primero separamos en dos integrales :

$$\int \left(\frac{\cos\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}} + 1\right) dx = \int \frac{\cos\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}\,dx + \int (1)\,dx = \quad (***)$$

Resolvemos la 1 era integral :

$$\int \frac{\cos\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}\,dx$$

Observen que justo la derivada de $\sqrt{x}$ **es** $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

entonces conviene utilizar método de sustitución :

llamamos $u = \sqrt{x} + 1$ **como** $u' = \left[\sqrt{x}+1\right]' = \left[\sqrt{x}\right]' + [1]' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0$

$\Longrightarrow \quad du = u'\,dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \quad \Longrightarrow \quad 2\,du = \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

sustituyendo :

$$\int \frac{\cos\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}\,dx = \int \cos\left(\sqrt{x}+1\right)\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \cos(u)\,2\,du =$$

$$= 2 \int \cos(u)\, du = 2 \,\text{sen}(u) + \underset{\text{cc}}{C}$$

y como $u = \sqrt{x} + 1$ **reemplazando :**

$$= 2 \,\text{sen}\left(\sqrt{x} + 1\right) + \underset{\text{cc}}{C}$$

por lo tanto la 1 er integral da :

$$\int \frac{\cos\left(\sqrt{x} + 1\right)}{\sqrt{x}}\, dx = 2 \,\text{sen}\left(\sqrt{x} + 1\right) + C_1$$

Veamos de calcular la 2 da integral :

$$\int (1)\, dx = x + C_2$$

----

reemplazando los resultados de la 1 era integral y de la 2 da :

$$\int \frac{\cos\left(\sqrt{x} + 1\right)}{\sqrt{x}}\, dx + \int (1)\, dx = \quad (***)$$

$$= 2 \,\text{sen}\left(\sqrt{x} + 1\right) + C_1 + x + C_2 = 2 \,\text{sen}\left(\sqrt{x} + 1\right) + x + \underset{\text{cc}}{C}$$

por lo tanto :

$$\int \left(\frac{\cos\left(\sqrt{x} + 1\right)}{\sqrt{x}} + 1 \right) dx = 2 \,\text{sen}\left(\sqrt{x} + 1\right) + x + \underset{\text{cc}}{C}$$

Verificación :

Si derivamos $2 \,\text{sen}\left(\sqrt{x} + 1\right) + x + \underset{\text{constante}}{C}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $\dfrac{\cos\left(\sqrt{x} + 1\right)}{\sqrt{x}} + 1$

Veamos :

$$\left[2 \,\text{sen}\left(\sqrt{x} + 1\right) + x + C\right]' =$$

$$= 2\left[\text{sen}\left(\sqrt{x} + 1\right)\right]' + [x]' + [C]' =$$

$$= 2 \cos\left(\sqrt{x} + 1\right) \cdot \left[\sqrt{x} + 1\right]' + 1 + 0 =$$

$$= 2 \cos\left(\sqrt{x} + 1\right) \cdot \left(\left[\sqrt{x}\right]' + [1]'\right) + 1 =$$

$$= 2\cos\left(\sqrt{x}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+0\right)+1 =$$

$$= 2\cos\left(\sqrt{x}+1\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+1 =$$

$$= \cos\left(\sqrt{x}+1\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}+1 =$$

$$= \frac{\cos\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}+1 \quad , \qquad \text{Ok}$$

Ej 6 f) Calcular $\int\left(x^2\cos\left(6x-2\right)+e^{2x}\right)dx$

1 ero separamos en suma de integrales para resolver por separado cada una de ellas

$$\int\left(x^2\cos\left(6x-2\right)+e^{2x}\right)dx = \int x^2\cos\left(6x-2\right)dx + \int e^{2x}dx$$

La 2 da integral sale fácil usando sustitución :

llamamos $u = 2x \implies du = u'\,dx = 2\,dx \implies \frac{1}{2}du = dx$

sustituyendo :

$$\int e^{2x}dx = \int e^u\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C_2 =$$

reemplazando $u = 2x$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} + C_2$$

Calculemos la 1 era integral : $\int x^2\cos\left(6x-2\right)dx$

tendremos que usar integración por partes 2 veces :

para ir bajándole el grado al exponente de x^2

en el integrando hay un producto de 2 funciones de x :

x^2 y $\cos\left(6x-2\right)$

mirando las integrales del método de integración por partes :

$$\int u\cdot v'\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx + C$$

llamamos $u = x^2$ y $v' = \cos\left(6x-2\right)$ entonces :

si $u = x^2 \implies u' = 2x$

si $v' = \cos\left(6x-2\right) \implies v = \int\cos\left(6x-2\right)dx =$ (*)

para calcular v necesitamos usar sustitución :

llamamos $w = 6x-2 \implies dw = w'\,dx = 6\,dx \implies \frac{1}{6}dw = dx$

sustituyendo :

$$v = \int \cos(6x-2)\,dx = \int \cos(w)\,\frac{1}{6}\,dw = \frac{1}{6}\,\text{sen}(w) = \frac{1}{6}\,\text{sen}(6x-2)$$

Reemplacemos todos estos resultados para ver como queda la integración por partes :

$$\int u \cdot v'\,dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\,dx + C$$

$$\int x^2 \cdot \cos(6x-2)\,dx = x^2 \cdot \frac{1}{6}\,\text{sen}(6x-2) - \int 2x \cdot \frac{1}{6}\,\text{sen}(6x-2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}\,x^2 \cdot \text{sen}(6x-2) - \frac{1}{3}\int x \cdot \text{sen}(6x-2)\,dx = \quad (\text{integral 1 era})$$

Vemos que el método de integración por partes está funcionando porque la

integral que resta por calcular es más sencilla que la original

$$\int x \cdot \text{sen}(6x-2)\,dx$$

Usamos método de integración por partes nuevamente :

$$\int f \cdot g'\,dx = f \cdot g - \int f' \cdot g\,dx + C$$

llamamos $f = x$ **y** $g' = \text{sen}(6x-2)$

si $f = x \implies f' = 1$

si $g' = \text{sen}(6x-2) \implies g = \int \text{sen}(6x-2)\,dx = \quad (\&\&)$

para calcular g necesitammos usar sustitución como antes :

llamamos $z = 6x-2 \implies dz = z'\,dx = 6\,dx \implies \frac{1}{6}\,dz = dx$

sustituyendo para resolver (&&) :

$$g = \int \text{sen}(6x-2)\,dx = \int \text{sen}(z)\,\frac{1}{6}\,dz = \frac{1}{6}\,(-\cos(z)) = -\frac{1}{6}\cos(6x-2)$$

Reemplacemos en las integrales de partes :

$$\int f \cdot g'\,dx = f \cdot g - \int f' \cdot g\,dx + C$$

$$\int x \cdot \text{sen}(6x-2)\,dx = x\left(-\frac{1}{6}\cos(6x-2)\right) - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{6}\cos(6x-2)\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\,x \cdot \cos(6x-2) + \frac{1}{6}\int \cos(6x-2)\,dx = \quad (\%\%)$$

pero la integral $\int \cos(6x-2)\,dx$ **ya la calculamos antes en** (*)

y daba $\int \cos(6x-2)\,dx = \frac{1}{6}\,\text{sen}(6x-2)$

reemplazando en (%%) :

$$= -\frac{1}{6}\,x\cdot\cos\left(6\,x-2\right)+\frac{1}{6}\int\cos\left(6\,x-2\right)\,dx = \quad (\%\%)$$

$$= -\frac{1}{6}\,x\cdot\cos\left(6\,x-2\right)+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\,\mathrm{sen}\left(6\,x-2\right) =$$

$$= -\frac{1}{6}\,x\cdot\cos\left(6\,x-2\right)+\frac{1}{36}\cdot\mathrm{sen}\left(6\,x-2\right)\ +C$$

cc

Juntando todos los resultados para la integral 1 era :

$$\int x^2\cos\left(6\,x-2\right)\,dx = \frac{1}{6}\,x^2\cdot\mathrm{sen}\left(6\,x-2\right)\ -\frac{1}{3}\int x\cdot\mathrm{sen}\left(6\,x-2\right)\,dx\ =$$

$$= \frac{1}{6}\,x^2\cdot\mathrm{sen}\left(6\,x-2\right)\ -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{6}\,x\cdot\cos\left(6\,x-2\right)+\frac{1}{36}\cdot\mathrm{sen}\left(6\,x-2\right)\ +C\right)\ =$$

consta

$$= \frac{1}{6}\,x^2\cdot\mathrm{sen}\left(6\,x-2\right)\ +\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\,x\cdot\cos\left(6\,x-2\right)-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{36}\cdot\mathrm{sen}\left(6\,x-2\right)+C_1\ =$$

$$= \frac{1}{6}\,x^2\cdot\mathrm{sen}\left(6\,x-2\right)\ +\frac{1}{18}\,x\cdot\cos\left(6\,x-2\right)\ -\frac{1}{108}\cdot\mathrm{sen}\left(6\,x-2\right)\ +C_1\ =$$

por lo tanto, el resultado de la 1 era integral es :

$$\int x^2\cos\left(6\,x-2\right)\,dx = \frac{1}{6}\,x^2\cdot\mathrm{sen}\left(6\,x-2\right)\ +\frac{1}{18}\,x\cdot\cos\left(6\,x-2\right)\ -\frac{1}{108}\cdot\mathrm{sen}\left(6\,x-2\right)\ +C_1$$

----------------o----------------

En definitiva sumando los resultados de la 1 era integral y de la 2 da integral tenemos :

$$\int\left(x^2\cos\left(6\,x-2\right)+e^{2\,x}\right)\,dx = \int x^2\cos\left(6\,x-2\right)\,dx\ +\int e^{2\,x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}\,x^2\cdot\mathrm{sen}\left(6\,x-2\right)\ +\frac{1}{18}\,x\cdot\cos\left(6\,x-2\right)\ -\frac{1}{108}\cdot\mathrm{sen}\left(6\,x-2\right)\ +\frac{1}{2}\,e^{2\,x}+C$$

cc

por lo tanto

$$\int\left(x^2\cos\ (6\,x-2)\ +e^{2\,x}\right)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\,x^2\cdot\mathrm{sen}\ (6\,x-2)\ \ +\frac{1}{18}\,x\cdot\cos\ (6\,x-2)\ -\frac{1}{108}\cdot\mathrm{sen}\ (6\,x-2)\ +\frac{1}{2}\,e^{2\,x}+C$$

cc

Verificación :

Si derivamos $\frac{1}{6}\,x^2\cdot\mathrm{sen}\left(6\,x-2\right)\ +\frac{1}{18}\,x\cdot\cos\left(6\,x-2\right)\ -\frac{1}{108}\cdot\mathrm{sen}\left(6\,x-2\right)\ +\frac{1}{2}\,e^{2\,x}+C$

cons

como resultado tenemos que obtener

el integrando $x^2\cos\left(6\,x-2\right)+e^{2\,x}$

Veamos :

$$\left[\frac{1}{6}x^2\cdot \text{sen}\,(6x-2)+\frac{1}{18}x\cdot\cos\,(6x-2)-\frac{1}{108}\cdot\text{sen}\,(6x-2)+\frac{1}{2}e^{2x}+C\right]'=$$

$$=\frac{1}{6}\left[x^2\cdot\text{sen}\,(6x-2)\right]'+\frac{1}{18}\left[x\cdot\cos\,(6x-2)\right]'-\frac{1}{108}\left[\text{sen}\,(6x-2)\right]'+\frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]'+[C]'=$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\left[x^2\right]'\,\text{sen}\,(6x-2)+x^2\left[\text{sen}\,(6x-2)\right]'\right\}+\frac{1}{18}\left\{[x]'\cos\,(6x-2)+x\left[\cos\,(6x-2)\right]'\right\}-$$

$$-\frac{1}{108}\left\{\cos\,(6x-2)\cdot 6\right\}+\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2+0=$$

$$=\frac{1}{6}\left\{2x\,\text{sen}\,(6x-2)+x^2\cos\,(6x-2)\cdot 6\right\}+\frac{1}{18}\left\{1\cdot\cos\,(6x-2)+x\left(-\text{sen}\,(6x-2)\cdot 6\right\}-\right.$$

$$-\frac{1}{18}\cos\,(6x-2)+e^{2x}=$$

$$=\frac{1}{3}x\,\text{sen}\,(6x-2)+\frac{1}{6}\cdot 6\cdot x^2\cos\,(6x-2)+\frac{1}{18}\cos\,(6x-2)-\frac{1}{18}\cdot 6x\,\text{sen}\,(6x-2)-$$

$$-\frac{1}{18}\cos\,(6x-2)+e^{2x}=$$

$$=\frac{1}{3}x\,\text{sen}\,(6x-2)+x^2\cos\,(6x-2)+\frac{1}{18}\cos\,(6x-2)-\frac{1}{3}x\,\text{sen}\,(6x-2)-$$

$$-\frac{1}{18}\cos\,(6x-2)+e^{2x}=$$

$$=x^2\cos\,(6x-2)+e^{2x}\qquad,\qquad \text{Ok}$$

+-+

Ejercicio 7.- Hallar la función g tal que

a. $g'(x)=\dfrac{4x^3-6x+2}{x^4-3x^2+2x+1}$ y $g(1)=5$

b. $g'(x)=x\sqrt{3x^2+9}$ y $g(3)=20$

c. $g'(x)=xe^x$ y $g(0)=4$

d. $g'(x)=\ln(\sqrt{x+2})$ y $g(-1)=3$

Ej 7 c) $g'(x)=x\,e^x$ con la condición $g(0)=4$ para determinar C

$$g(x)=\int g'(x)\,dx=\int x\,e^x\,dx$$

Por partes :

mirando las integrales del método de integración por partes :

$$\int u\cdot v'\,dx=u\cdot v-\int u'\cdot v\,dx+C$$

llamamos $u=x$ y $v'=e^x$ entonces :

si $u=x\implies u'=1$

si $v' = e^x \implies v = \int e^x\,dx = e^x$

Reemplacemos todos estos resultados para ver como queda la integración por partes :

$$\int u \cdot v'\,dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\,dx + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

$$\int x \cdot e^x\,dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x\,dx = x \cdot e^x - \int e^x\,dx = x \cdot e^x - e^x + \underbrace{C}_{\text{cons}} =$$

$$= e^x\,(x-1) + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

Entonces $g(x) = e^x\,(x-1) + \underbrace{C}_{\text{co}}$

Como $g(0) = 4$

$$g(0) = e^x\,(x-1) + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 4 \implies$$

$$\implies e^0\,(0-1) + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 4 \implies 1 \cdot (-1) + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 4 \implies -1 + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 4 \implies$$

$$\implies \underbrace{C}_{\text{constante}} = 4 + 1 \implies \underbrace{C}_{\text{consta}} = 5$$

Por lo tanto

$$g(x) = e^x\,(x-1) + 5$$

Ej 7 d) $g'(x) = \ln\left(\sqrt{x+2}\right)$ con la condición $g(-1) = 3$ para determinar $\underbrace{C}_{\text{co}}$

$$g(x) = \int g'(x)\,dx = \int \ln\left(\sqrt{x+2}\right)dx$$

truco mágico :

multiplicamos por $1 = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}}$ en el integrando

$$\int \ln\left(\sqrt{x+2}\right)dx = \int 1 \cdot \ln\left(\sqrt{x+2}\right)dx = \int \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}} \cdot \ln\left(\sqrt{x+2}\right)dx =$$

Por sustitución :

llamemos $u = \sqrt{x+2} \implies du = u'\,dx = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}\,dx \implies 2\,du = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx$

sustituyendo :

$$\int \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}} \cdot \ln\left(\sqrt{x+2}\right)dx = \int \sqrt{x+2}\,\ln\left(\sqrt{x+2}\right)\frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx =$$

$$= \int u \cdot \ln(u)\,2\,du = 2\int u \cdot \ln(u)\,du = \quad (*)$$

----

cálculo auxiliar

calculemos por partes $\int u \cdot \ln(u)\, du$

mirando las integrales del método de integración por partes :

$$\int f \cdot g' \, dx = f \cdot g - \int f' \cdot g \, dx + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

llamamos $f = \ln(u)$ **y** $g' = u$ **entonces :**

$$\text{si } f = \ln(u) \implies f' = \frac{1}{u}$$

$$\text{si } g' = u \implies g = \int u \cdot du = \frac{1}{2} u^2$$

Reemplacemos todos estos resultados para ver como queda la integración por partes :

$$\int f \cdot g' \, dx = f \cdot g - \int f' \cdot g \, dx + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

$$\int \ln(u) \cdot u \, du = \ln(u) \cdot \frac{1}{2} u^2 - \int \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{2} u^2 \, du =$$

$$= \frac{1}{2} u^2 \cdot \ln(u) - \frac{1}{2} \int u \, du = \frac{1}{2} u^2 \cdot \ln(u) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} u^2 + \underbrace{C}_{\text{cons}} =$$

$$= \frac{1}{2} u^2 \cdot \ln(u) - \frac{1}{4} u^2 + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{1}{2} u^2 \left(\ln(u) - \frac{1}{2} \right) + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

Reemplazando en (*) :

$$= 2 \int u \cdot \ln(u)\, du = \qquad (*)$$

$$= 2 \left\{ \frac{1}{2} u^2 \left(\ln(u) - \frac{1}{2} \right) + \underbrace{C}_{\text{constante}} \right\} = u^2 \left(\ln(u) - \frac{1}{2} \right) + K$$

Como $u = \sqrt{x+2}$ **reemplazamos para volver a la variable** x **:**

$$= \left(\sqrt{x+2} \right)^2 \left(\ln\left(\sqrt{x+2} \right) - \frac{1}{2} \right) + K = (x+2) \left(\ln\left(\sqrt{x+2} \right) - \frac{1}{2} \right) + K$$

Entonces $g(x) = \int g'(x)\, dx = \int \ln\left(\sqrt{x+2} \right) dx = (x+2) \left(\ln\left(\sqrt{x+2} \right) - \frac{1}{2} \right) + K$

Como $g(-1) = 3$ **determinemos K**

$$g(-1) = (x+2) \left(\ln\left(\sqrt{x+2} \right) - \frac{1}{2} \right) + K = 3 \implies$$

$\Longrightarrow \quad (-1+2)\left(\ln\left(\sqrt{-1+2}\right)-\frac{1}{2}\right)+K=3 \quad \Longrightarrow \quad 1\cdot\left(\ln\left(\sqrt{1}\right)-\frac{1}{2}\right)+K=3 \quad \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \quad \left(\ln(1)-\frac{1}{2}\right)+K=3 \quad \Longrightarrow \quad \left(0-\frac{1}{2}\right)+K=3 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{2}+K=3 \quad \Longrightarrow \quad K=3+\frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \quad K=\frac{7}{2}$

Por lo tanto

$$g(x)=(x+2)\left(\ln\left(\sqrt{x+2}\right)-\frac{1}{2}\right)+\frac{7}{2}$$

+-+

Para resolver el Ejercicio 10 necesitamos un poco de teoría

Comentarios teóricos :

Hasta ahora venimos calculando integrales indefinidas cuyo resultado llamamos Primitiva

Por ejemplo, si $f(x)=x$, una primitiva es $\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+\underbrace{C}_{\text{constante}}=F(x)$

En realidad como $\underbrace{C}_{\text{constante}}$ a priori no está definida son infinitas posibilidades para $F(x)$ y todas ellas cumplen que $F'(x)=f(x)$

A partir de ahora se introduce un nuevo concepto de integral : la integral definida

Estudien esto sugerido por la cátedra de Mate 51

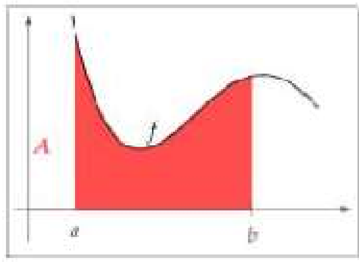
+-+

Integral definida

Definición de integral definida

Sea f una función continua **que toma valores positivos o cero** en un intervalo $[a, b]$. La ***integral definida*** de f entre a y b (que se nota $\int_a^b f(x)dx$ y se lee "integral entre a y b de $f(x)$ diferencial x") es el área de la región comprendida entre el gráfico de f y el eje x en el intervalo $[a, b]$. A a y a b se los llama límites de integración.

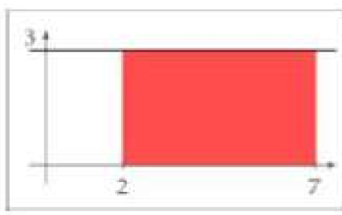
En el siguiente gráfico, si A es el área sombreada en rojo,



resulta que

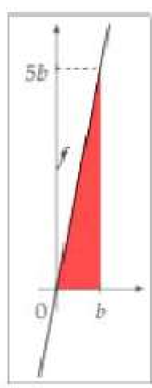
$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Por ejemplo, si f es la función constante $f(x) = 3$, entonces $\int_2^7 f(x)dx$ resulta el área del rectángulo de base 5 y altura 3 que se muestra en la figura



y, por lo tanto, $\int_2^7 f(x)dx = 5.3 = 15.$

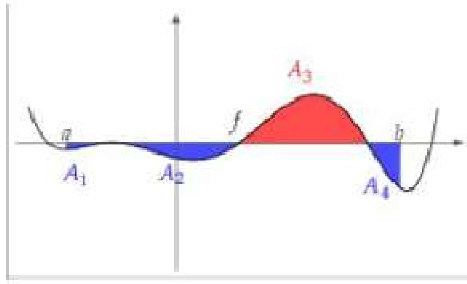
Consideremos ahora la función $f(x) = 5x$ y calculemos, para un valor $b > 0$, $\int_0^b 5x\,dx$.



Como la función cumple que es positiva o cero en el intervalo en cuestión, la integral coincide con el área del triángulo que se muestra en la figura de base b y altura $5b$ que vale $\frac{b.5b}{2}$, es decir

$$\int_0^b 5x\,dx = \frac{5}{2}b^2.$$

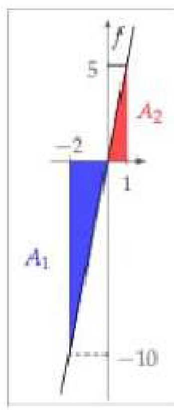
En el caso en que la función f tome **valores positivos, negativos o cero** en el intervalo $[a, b]$, la ***integral definida*** de f entre a y b es la suma de las áreas de las regiones que determina el gráfico de la función f y el eje x **por arriba** del eje x **menos** la suma de las áreas de las regiones que determina el gráfico de la función f y el eje x **por debajo** del eje x. Es decir, en el
siguiente gráfico, si f es la función y A_1, A_2, A_3 y A_4 son las áreas correspondientes



entonces

$$\int_a^b f(x)dx = -A_1 - A_2 + A_3 + A_4$$

Por ejemplo, dada la función $f(x) = 5x$, calculemos $\int_{-2}^{1} 5x\,dx$.



Si miramos el gráfico, el área que queda por debajo del eje x es $A_1 = \frac{2.10}{2} = 10$ y el área que queda por arriba del eje x es $A_2 = \frac{1.5}{2} = \frac{5}{2}$. Entonces

$$\int_{-2}^{1} 5x\,dx = -A_1 + A_2 = -10 + \frac{5}{2} = -\frac{15}{2}.$$

En general para calcular integrales definidas no utilizaremos fórmulas de áreas sino una regla muy útil.

Regla de Barrow

La **regla de Barrow** nos permite calcular integrales definidas:

Sea F una primitiva (cualquiera) de f. Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Por ejemplo, si queremos calcular $\int_{-2}^{1} 5x\,dx$ usando la regla de Barrow, primero tenemos que buscar una primitiva de $f(x) = 5x$:

$$\int 5x\,dx = 5.\int x\,dx = 5.\frac{x^2}{2} + C$$

Tomamos cualquier primitiva de f, por ejemplo $F(x) = 5.\frac{x^2}{2}$ (cuando elegimos $C = 0$).

Entonces, la regla de Barrow dice que

$$\int_{-2}^{1} 5x\,dx = F(1) - F(-2) = 5.\frac{1^2}{2} - 5.\frac{(-2)^2}{2} = \frac{5}{2} - 10 = -\frac{15}{2}$$

que es el mismo resultado que habíamos obtenido antes calculando la integral como resta de áreas.

Supongamos que elegimos otra primitiva de f, por ejemplo $G(x) = 5.\frac{x^2}{2} + 1$ (cuando elegimos $C = 1$). En este caso, la regla de Barrow nos asegura que

$$\int_{-2}^{1} 5x\,dx = G(1) - G(-2) = 5.\frac{1^2}{2} + 1 - (5.\frac{(-2)^2}{2} + 1) = \frac{7}{2} - 11 = -\frac{15}{2}.$$

Notar que, no importa qué primitiva elijamos, la integral definida da lo mismo.

Una notación usual para la resta $F(b) - F(a)$ es

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Por ejemplo, $5.\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1} = 5.\frac{1^2}{2} - 5.\frac{(-2)^2}{2} = -\frac{15}{2}$.

Ejemplo. Calcular $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)dx$.

Para poder aplicar la regla de Barrow, tenemos que calcular una primitiva de $\operatorname{sen}(x)$:

$$\int \operatorname{sen}(x)dx = -\cos(x) + C.$$

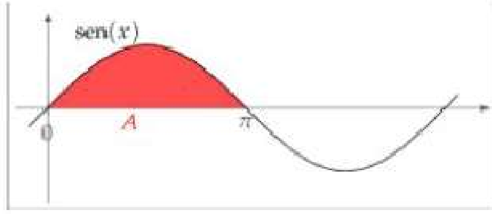
Ahora elegimos una primitiva de $\operatorname{sen}(x)$, por ejemplo $-\cos(x)$ si tomamos $C = 0$. La regla de Barrow nos asegura que

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2,$$

es decir

$$\boxed{\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)dx = 2.}$$

Notar que, como la función seno es positiva o cero en el intervalo $[0; \pi]$, lo que calculamos en el ejemplo anterior es el área A sombreada en la siguiente figura:



A continuación enunciaremos algunas propiedades útiles para las integrales definidas:

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
- $\int_a^b (k.f(x))dx = k\int_a^b f(x)dx$ para k número real fijo.
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Ejemplo. Sabiendo que $\int_{-1}^4 (2.f(x)+3)dx = 5$, calcular $\int_{-1}^4 f(x)dx$.

Por las propiedades anteriores, sabemos que

$$\int_{-1}^4 (2.f(x)+3)dx = \int_{-1}^4 2.f(x)dx + \int_{-1}^4 3\,dx = 2.\int_{-1}^4 f(x)dx + \int_{-1}^4 3\,dx.$$

Podemos calcular esta última integral por medio de la regla de Barrow: como $3x$ es una primitiva de 3, resulta que

$$\int_{-1}^4 3\,dx = 3x\Big|_{-1}^4 = 3.4 - 3.(-1) = 15.$$

Luego tenemos que

$$5 = \int_{-1}^4 (2.f(x)+3)dx = 2.\int_{-1}^4 f(x)dx + 15.$$

Despejando en la igualdad anterior, tenemos que

$$\frac{5-15}{2} = \int_{-1}^4 f(x)dx$$

con lo que

$$\boxed{\int_{-1}^4 f(x)dx = -5.}$$

+ - +

Ejercicio 10.- Usando la regla de Barrow, calcular las siguientes integrales definidas.

a. $\int_{-1}^{2} 4x\,dx$ **b.** $\int_{1}^{4} \sqrt{x}\,dx$

c. $\int_{0}^{\pi/2} \cos(t)\,dt$ **d.** $\int_{0}^{\pi} \cos(t)\,dt$

e. $\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}(u)\,du$ **f.** $\int_{-1}^{1} e^{-x+1}\,dx$

Ej 10 b)

$$\int_1^4 \sqrt{x}\ dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\ dx = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+1\right)}\ x^{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_1^4 = \frac{1}{\frac{3}{2}}\ x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^4 = \frac{2}{3}\ x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^4 = \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\left(\sqrt{4}\right)^3 - 1\right) = \frac{2}{3}\left(2^3 - 1\right) = \frac{2}{3}\left(8 - 1\right) = \frac{2}{3}\ (7) = \frac{14}{3}$$

por lo tanto :

$$\int_1^4 \sqrt{x}\ dx = \frac{14}{3}$$

Ej 10 d)

$$\int_0^{\pi} \cos\ (t)\ dt = \operatorname{sen}\ (t)\ \Big|_0^{\pi} = \operatorname{sen}\ (\pi) - \operatorname{sen}\ (0) = 0 - 0 = 0$$

Por lo tanto :

$$\int_0^{\pi} \cos\ (t)\ dt = 0$$

Ej 10 f)

$$\int_{-1}^{1} e^{-x+1}\ dx = \quad (*)$$

------

usamos sustitución para calcular la integral indefinida o sea la primitiva :

$$\int e^{-x+1}\ dx$$

llamamos $u = -x + 1 \implies du = u'\ dx = (-1)\ dx \implies -du = dx$

sustituyendo :

$$\int e^{u}\ (-du) = -\int e^{u}\ du = -e^{u} = -e^{-x+1}$$

entonces $\int e^{-x+1}\ dx = -e^{-x+1}$

la primitiva obtenida $-e^{-x+1}$ la llevamos para usar Barrow en (*)

$$\int_{-1}^{1} e^{-x+1}\, dx = -e^{-x+1}\Big|_{-1}^{1} = -\left\{e^{-1+1} - e^{-(-1)+1}\right\} = -\left\{e^{0} - e^{2}\right\} = -\left\{1 - e^{2}\right\} = e^{2} - 1$$

Por lo tanto :

$$\int_{-1}^{1} e^{-x+1}\, dx = e^{2} - 1$$

+-+

Ejercicio 11.- Usando la regla de Barrow, calcular las siguientes integrales definidas.

a. $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{x}(x+1)^{2}dx$ **b.** $\displaystyle\int_{0}^{e-1} \frac{dt}{t+1}$

c. $\displaystyle\int_{0}^{3} (x^{2}+2)\sqrt{x+1}dx$ **d.** $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} (1-\cos(2x))^{3}\,\mathrm{sen}(2x)dx$

e. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos(u)}{\mathrm{sen}^{2}(u)}du$ **f.** $\displaystyle\int_{0}^{1} (e^{2x}-e^{-2x})dx$

g. $\displaystyle\int_{1}^{4} \left(\frac{(\ln x)^{2}}{x}+x\right)dx$ **h.** $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} (t-\pi)\cos(t)dt$

Ej 11 Usar Barrow para calcular las integrales definidas :

Ej 11 a)

$$\int_{-1}^{1} e^{x}\,(x+1)^{2}\, dx$$

------

usamos integración por partes para calcular la integral indefinida
o sea la primitiva :

$$\int e^{x}\,(x+1)^{2}\, dx$$

Por partes :

mirando las integrales del método de integración por partes :

$$\int u\cdot v'\ dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\ dx + C$$

llamamos $u = (x+1)^{2}$ **y** $v' = e^{x}$ **entonces :**

si $u = (x+1)^{2} \implies u' = 2\,(x+1)$

si $v' = e^{x} \implies v = \int e^{x}\, dx = e^{x}$

Reemplacemos todos estos resultados para ver como queda la integración por partes :

$$\int u \cdot v' \; dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \; dx + C$$

$$\int (x+1)^2 \cdot e^x \, dx = (x+1)^2 \cdot e^x - \int 2\,(x+1) \cdot e^x \, dx =$$

$$= (x+1)^2 \cdot e^x - 2 \int (x+1) \cdot e^x \, dx = \qquad (**)$$

Vemos que el método de integración por partes está funcionando porque en la nueva integral a calcular le pudimos bajar el exponente a $(x+1)^2$

cálculo auxiliar :

calculemos $\int (x+1) \cdot e^x \, dx$ para luego reemplazar en (**)

$$\int (x+1) \cdot e^x \, dx$$

por partes nuevamente :

mirando las integrales del método de integración por partes :

$$\int f \cdot g' \; dx = f \cdot g - \int f' \cdot g \; dx + C$$

llamamos $f = (x+1)$ y $g' = e^x$ entonces :

si $f = (x+1) \;\Longrightarrow\; f' = 1$

si $g' = e^x \;\Longrightarrow\; g = \int e^x \, dx = e^x$

Reemplacemos todos estos resultados para ver como queda la integración por partes :

$$\int f \cdot g' \; dx = f \cdot g - \int f' \cdot g \; dx + C$$

$$\int (x+1) \cdot e^x \, dx = (x+1) \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx =$$

$$= (x+1) \cdot e^x - \int e^x \, dx = (x+1) \cdot e^x - e^x = e^x\,(x+1-1) = e^x\,x = x\,e^x$$

entonces : $\int (x+1) \cdot e^x \, dx = x\,e^x$

----

reemplacemos en (**)

$$\int (x+1)^2 \cdot e^x \, dx = (x+1)^2 \cdot e^x - 2 \int (x+1) \cdot e^x \, dx =$$

$$= (x+1)^2 \cdot e^x - 2\,(x\,e^x) = (x+1)^2 \cdot e^x - 2\,x\,e^x =$$

$$= e^x \left\{ (x+1)^2 - 2\,x \right\} = e^x \left\{ x^2 + 2\,x + 1 - 2\,x \right\} = e^x \left\{ x^2 + 1 \right\}$$

Por lo tanto la integral indefinida es :

$$\int (x+1)^2 \cdot e^x \, dx = e^x \left(x^2 + 1 \right)$$

Con esta primitiva vamos a aplicar Regla de Barrow :

$$\int_{-1}^{1} e^x (x+1)^2 dx = e^x (x^2+1) \Big|_{-1}^{1} = e^1 (1^2+1) - e^{-1} ((-1)^2+1) =$$

$$= e (2) - e^{-1} (2) = 2 (e - e^{-1}) = 2 \left(e - \frac{1}{e}\right)$$

Por lo tanto :

$$\int_{-1}^{1} e^x (x+1)^2 dx = 2 \left(e - \frac{1}{e}\right)$$

Ej 11 e)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\mathrm{sen}^2(u)} du$$

------

usamos sustitución para calcular la integral indefinida o sea la primitiva :

$$\int \frac{\cos(u)}{\mathrm{sen}^2(u)} du$$

llamamos $w = \mathrm{sen}(u) \implies w' = \cos(u)$

$\implies dw = w' du = \cos(u) du \implies dw = \cos(u) du$

sustituyendo :

$$\int \frac{\cos(u)}{\mathrm{sen}^2(u)} du = \int \frac{1}{\mathrm{sen}^2(u)} \cos(u) du = \int \frac{1}{w^2} dw = \int w^{-2} dw =$$

$$= (-1) w^{-1} = -\frac{1}{w} = -\frac{1}{\mathrm{sen}(u)}$$

Entonces

$$\int \frac{\cos(u)}{\mathrm{sen}^2(u)} du = -\frac{1}{\mathrm{sen}(u)}$$

Con esta primitiva reemplazamos para usar Barrow :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\mathrm{sen}^2(u)} du = -\frac{1}{\mathrm{sen}(u)} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left\{\frac{1}{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \frac{1}{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right\} =$$

$$= -\left\{\frac{1}{1} - \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right\} = -\left\{1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right\} = -\left\{1 - \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right\} = -\left\{1 - \frac{2\sqrt{2}}{2}\right\} =$$

$$= -\left\{1 - \sqrt{2}\right\} = \sqrt{2} - 1$$

Por lo tanto :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\operatorname{sen}^2(u)}\, du = \sqrt{2} - 1$$

Ej 11 f)

$$\int_0^1 \left(e^{2x} - e^{-2x}\right) dx = \int_0^1 e^{2x}\, dx - \int_0^1 e^{-2x}\, dx \qquad (**)$$

Calculemos una primitiva de la integral indefinida de la 1 a integral

$$\int e^{2x}\, dx$$

usamos sustitución :

llamamos $u = 2x \Longrightarrow u' = 2$

$$\Longrightarrow du = u'\, dx = 2\, dx \Longrightarrow du = 2\, dx \Longrightarrow \frac{1}{2} du = dx$$

sustituyendo :

$$\int e^{2x}\, dx = \int e^u \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int e^u\, du = \frac{1}{2} e^u = \frac{1}{2} e^{2x}$$

Entonces

$$\int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} e^{2x}$$

Con esta primitiva reemplazamos para usar Barrow en la 1 era integral :

$$\int_0^1 e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left\{e^{2\cdot 1} - e^{2\cdot 0}\right\} = \frac{1}{2}\left\{e^2 - e^0\right\} = \frac{1}{2}\left\{e^2 - 1\right\}$$

Calculemos una primitiva de la integral indefinida de la 2 da integral

$$\int e^{-2x}\, dx$$

usamos sustitución :

llamamos $u = -2x \Longrightarrow u' = -2$

$$\Longrightarrow du = u'\, dx = -2\, dx \Longrightarrow du = -2\, dx \Longrightarrow -\frac{1}{2} du = dx$$

sustituyendo :

$$\int e^{-2x}\, dx = \int e^u \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{2} \int e^u\, du = -\frac{1}{2} e^u = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

Entonces

$$\int e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

Con esta primitiva reemplazamos para usar Barrow en la 2 da integral :

$$\int_0^1 e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}\left\{e^{-2\cdot 1} - e^{-2\cdot 0}\right\} = -\frac{1}{2}\left\{e^{-2} - e^{0}\right\} = -\frac{1}{2}\left\{e^{-2} - 1\right\}$$

Finalmente reemplazamos en (**)

$$\int_0^1 \left(e^{2x} - e^{-2x}\right)dx = \int_0^1 e^{2x}\,dx - \int_0^1 e^{-2x}\,dx = \qquad (**)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{e^{2} - 1\right\} - \left(-\frac{1}{2}\left\{e^{-2} - 1\right\}\right) = \frac{1}{2}\left\{e^{2} - 1\right\} + \frac{1}{2}\left\{e^{-2} - 1\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{2} + \frac{1}{2}e^{-2} - 1$$

Por lo tanto :

$$\int_0^1 \left(e^{2x} - e^{-2x}\right)dx = \frac{1}{2}e^{2} + \frac{1}{2}e^{-2} - 1$$

Ej 11 h)

$$\int_0^{2\pi} (t-\pi)\cos(t)\,dt = \int_0^{2\pi} t\cos(t)\,dt - \int_0^{2\pi} \pi\cos(t)\,dt \qquad (*)$$

Calculemos una primitiva de la 1 era integral :

Por partes :

$$\int t\cos(t)\,dt$$

mirando las integrales del método de integración por partes :

$$\int u\cdot v'\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx + C$$

llamamos $u = t$ y $v' = \cos(t)$ entonces :

si $u = t \Longrightarrow u' = 1$

si $v' = \cos(t) \Longrightarrow v = \int \cos(t)\,dt = \mathrm{sen}(t)$

Reemplacemos todos estos resultados para ver como queda la integración por partes :

$$\int u\cdot v'\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx + C$$

$$\int t\cdot\cos(t)\,dt = t\cdot\mathrm{sen}(t) - \int 1\cdot\mathrm{sen}(t)\,dt = t\cdot\mathrm{sen}(t) - (-\cos(t))$$

$$= t\cdot\mathrm{sen}(t) + \cos(t)$$

Entonces

$$\int t\ \cos(t)\ dt = t\ \text{sen}(t) + \cos(t)$$

Con esta primitiva reemplazamos para usar Barrow en la 1 era integral :

$$\int_0^{2\pi} t\ \cos(t)\ dt = t\ \text{sen}(t) + \cos(t)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \{2\pi\ \text{sen}(2\pi) + \cos(2\pi) - (0\cdot\text{sen}(0) + \cos(0))\} =$$

$$= \{2\pi\cdot 0 + 1 - (0+1)\} = \{0 + 1 - (0+1)\} = 0$$

Entonces

$$\int_0^{2\pi} t\ \cos(t)\ dt = 0$$

Calculemos una primitiva de la 2 da integral en (*)

$$\int \pi\ \cos(t)\ dt$$

$$\int \pi\ \cos(t)\ dt = \pi \int \cos(t)\ dt = \pi\ \text{sen}(t)$$

Con esta primitiva reemplazamos para usar Barrow :

$$\int_0^{2\pi} \pi\ \cos(t)\ dt = \pi\ \text{sen}(t)\Big|_0^{2\pi} = \pi\{\text{sen}(2\pi) - \text{sen}(0)\} =$$

$$= \pi\{0-0\} = 0$$

Entonces :

$$\int_0^{2\pi} \pi\ \cos(t)\ dt = 0$$

Con estos resultados para la 1 era y 2 da integral reemplazamos en (*)

$$\int_0^{2\pi} (t-\pi)\ \cos(t)\ dt = \int_0^{2\pi} t\ \cos(t)\ dt - \int_0^{2\pi} \pi\ \cos(t)\ dt = \qquad (*)$$

$$= \int_0^{2\pi} t\ \cos(t)\ dt - \int_0^{2\pi} \pi\ \cos(t)\ dt = 0 - 0 = 0$$

Por lo tanto :

$$\int_0^{2\pi} (t-\pi)\ \cos(t)\ dt = 0$$

+-+

Ejercicio 12.-

a. Sabiendo que $\int_1^3 f(x)dx = 5$, calcular $\int_1^3 (f(x)+2x)dx$.

b. Sabiendo que $\int_{-2}^1 (f(t)-3)dt = -2$, calcular $\int_{-2}^1 f(t)dt$.

Ej 12 a)

Se sabe que $\int_1^3 f(x)\,dx = 5 \implies$ Calcular $\int_1^3 (f(x) + 2x)\,dx$

Aplicando propiedades de la integral definida :

$$\int_1^3 (f(x) + 2x)\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx + \int_1^3 2x\,dx = 5 + \int_1^3 2x\,dx$$

Solo falta calcular $\int_1^3 2x\,dx$:

$$\int_1^3 2x\,dx = 2\int_1^3 x\,dx = 2\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_1^3 = x^2\Big|_1^3 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$$

Entonces :

$$\int_1^3 (f(x) + 2x)\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx + \int_1^3 2x\,dx = 5 + \int_1^3 2x\,dx = 5 + 8 = 13$$

Por lo tanto :

$$\int_1^3 (f(x) + 2x)\,dx = 13$$

+-

Ejercicio 13.-

a. Hallar $a \in \mathbb{R}$ tal que $\int_1^a \frac{4}{x^2}dx = \frac{16}{5}$.

b. Hallar $a \in \mathbb{R}$ tal que $\int_0^4 (3\sqrt{x} + ax)dx = 0$.

Ej 13 a)

hallar $a \in \mathbb{R}$ sabiendo que $\int_1^a \frac{4}{x^2}\,dx = \frac{16}{5}$

Resolvemos la integral definida $\int_1^a \frac{4}{x^2}\,dx$

$$\int_1^a \frac{4}{x^2}\,dx = 4\int_1^a x^{-2}\,dx = 4\cdot\frac{1}{(-2+1)}x^{-2+1}\Big|_1^a = -4\cdot x^{-1}\Big|_1^a =$$

$= -4 \cdot \left.\frac{1}{x}\right|_1^a = -4 \left\{\frac{1}{a} - \frac{1}{1}\right\} = -4 \left\{\frac{1-a}{a}\right\}$

Como $\int_1^a \frac{4}{x^2}\, dx = \frac{16}{5} \implies -4\left\{\frac{1-a}{a}\right\} = \frac{16}{5}$ **despejamos a**

$-20\,(1-a) = 16\,a \implies -20 + 20\,a = 16\,a \implies 20\,a - 16\,a = 20 \implies$ **wd**

$\implies 4\,a = 20 \implies a = 5$

Por lo tanto

si $\int_1^a \frac{4}{x^2}\, dx = \frac{16}{5}$ **debe ser** $a = 5$

+-+

Para resolver los ejercicios de acá en adelante es necesario que estudien

la teoría de cálculo de áreas como lo sugiere la cátedra de Mate 51

Cálculo de áreas

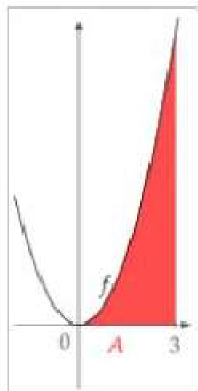
Una de las aplicaciones de la regla de Barrow para el cálculo de integrales definidas es el cálculo de áreas.

Cálculo de área entre el gráfico de una función y el eje x

Ya vimos que, si la función f es positiva o cero en el intervalo $[a;b]$, la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función f entre los límites a y b.

Ejemplo. Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función $f(x)=x^2$ para $0 \leq x \leq 3$.

El área pedida es la sombreada en el siguiente gráfico:



Como la función f es positiva o cero en el intervalo $[0;3]$ (de hecho, la función f es positiva o cero para todos los reales), el área A pedida está dada por

$$A=\int_0^3 x^2 dx.$$

Para calcular la integral, podemos usar la regla de Barrow. Como $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ es una primitiva de $f(x)=x^2$ tenemos que

$$\int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^3 = \frac{1}{3}3^3 - \frac{1}{3}0^3 = 9$$

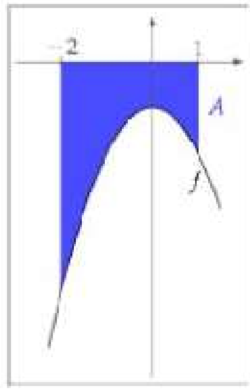
con lo cual

$$\boxed{A=9.}$$

Si la función f es negativa o cero en el intervalo $[a;b]$, la integral definida da el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función f pero con el signo cambiado. Por lo tanto, para calcular el área, bastará con cambiar el signo de la integral definida.

Ejemplo. Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función $f(x)=-x^2-1$ para $-2 \leq x \leq 1$.

En el siguiente gráfico aparece sombreada la región en cuestión:



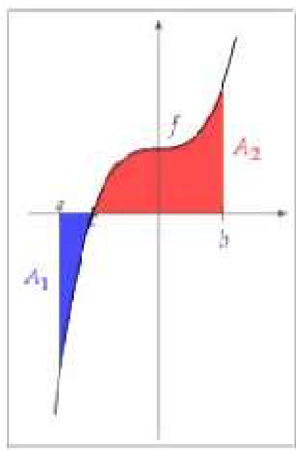
La función f toma valores negativos en todos los reales, con lo cual el área A buscada es

$$A = -\int_{-2}^{1} (-x^2 - 1)dx = \int_{-2}^{1} (x^2 + 1)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Big|_{-2}^{1}$$
$$= \left(\frac{1}{3}1^3 + 1\right) - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 + (-2)\right) = \frac{4}{3} + \frac{14}{3} = 6.$$

Es decir,

$$\boxed{A = 6.}$$

Si se quiere calcular el área de la región comprendida entre el gráfico de una función f y el eje x para $a \leq x \leq b$, en el caso en que la función f tome valores positivos y negativos en el intervalo $[a; b]$, se deben estudiar los cambios de signo de la función. Por ejemplo, si queremos calcular el área de la región sombreada en la figura



debemos calcular el punto c donde la función corta el eje x (es decir, donde la función vale cero) y calcular la integral definida entre a y c con signo negativo, más la integral definida entre c y b con signo positivo.

Es decir, el área A a calcular será

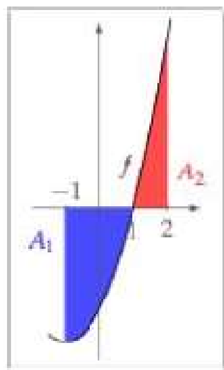
$$A = A_1 + A_2 = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Ejemplo. Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ para $-1 \leq x \leq 2$.

Veamos primero si el gráfico de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ corta al eje x para algún valor entre -1 y 2.

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.(-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

es decir, las dos raíces de la cuadrática son 1 y -3. Hagamos un gráfico aproximado para ver cuál es el área pedida:



Entonces, el área a calcular es

$$A = A_1 + A_2 = -\int_{-1}^{1}(x^2 + 2x - 3)dx + \int_1^2 (x^2 + 2x - 3)dx.$$

Para calcular las integrales definidas en cuestión, usamos la regla de Barrow. Primero calculamos las primitivas de $f(x) = x^2 + 2x - 3$:

$$\int (x^2 + 2x - 3)\, dx = \int x^2\, dx + 2\int x\, dx - 3\int 1\, dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 - 3x + C = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + C.$$

Ahora, elegimos una primitiva (por ejemplo, con $C = 0$) y la evaluamos

$$A = -\left(\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right)\Big|_{-1}^{1}\right) + \left(\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right)\Big|_1^2\right) =$$
$$= -\left((\frac{1}{3} + 1 - 3) - (-\frac{1}{3} + 1 + 3)\right) + \left((\frac{1}{3}2^3 + 2^2 - 3.2) - (\frac{1}{3} + 1 - 3)\right) = -(-\frac{16}{3}) + \frac{7}{3}.$$

Es decir, el área pedida es

$$\boxed{A = \frac{23}{3}.}$$

Ejemplo. Calcular el área de la región encerrada entre el eje x y el gráfico de la función $f(x) = x^3 - 4x$.

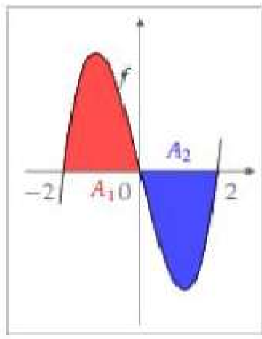
Calculamos los valores de x para los cuales $f(x) = 0$, es decir, donde el gráfico de f corta al eje x.

$$x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x.(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = 2 \text{ ó } x = -2.$$

Para ver qué signos toma la función dada en los intervalos delimitados por las raíces, podemos usar el corolario del Teorema de Bolzano ya que la función es continua:

x	-2	$(-2,0)$	0	$(0,2)$	2
$f(x)$	0	$+$	0	$-$	0
pues		$f(-1)=3$		$f(1)=-3$	

Luego, en un gráfico aproximado de f sombreamos el área a calcular (en azu el área debajo del eje y en rojo el área arriba del eje):



Es decir, el área a calcular está dada por

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\, dx - \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\, dx.$$

Calculamos ahora una primitiva de $x^3 - 4x$ y aplicamos la regla de Barrow, y nos queda

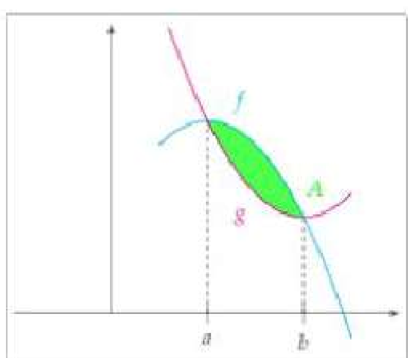
$$A = \left(\left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right)\Big|_{-2}^{0} \right) - \left(\left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right)\Big|_{0}^{2} \right) = \left(0 - \left(\frac{1}{4}(-2)^4 - 2(-2)^2\right)\right) - \left(\left(\frac{1}{4}2^4 - 2.2^2\right) - 0 \right) = 4 - (-4)$$

con lo que

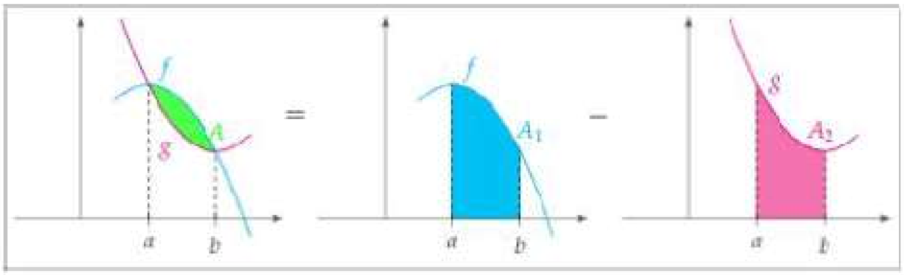
$$\boxed{A = 8.}$$

Cálculo de área entre el gráfico de dos funciones

Supongamos que tenemos dos funciones f y g que toman valores positivos y queremos calcular el área de la región encerrada entre sus gráficos, Veamos primero el caso del siguiente gráfico:



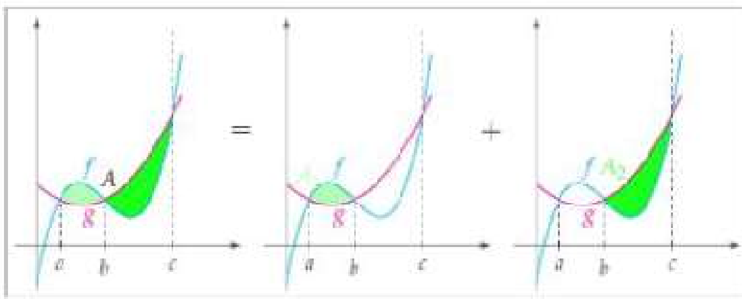
En este caso, $A_1 = \int_a^b f(x)dx$ nos da el área encerrada entre el gráfico de f y el eje x para $a \le x \le b$ y $A_2 = \int_a^b g(x)dx$ nos da el área encerrada entre el gráfico de g y el eje x para $a \le x \le b$. El área A resulta ser la diferencia entre estas dos áreas:



Por lo tanto, el área A buscada es

$$A = A_1 - A_2 = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

Veamos ahora otro ejemplo:



En este caso, el área pedida A es la suma de dos áreas. Usando lo que vimos antes, la primera está dada por $A_1 = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$ y la otra está dada por $A_2 = \int_b^c (g(x) - f(x))\, dx$. Por lo tanto, tenemos que

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx + \int_b^c (g(x) - f(x))\, dx.$$

Para calcular en general el área de la región encerrada entre los gráficos de dos funciones f y g, sin importar si son positivas, negativas o cero, tenemos que buscar los valores de x para los cuales $f(x) = g(x)$. Una vez calculados estos valores, para cada par de valores a y b consecutivos, nos fijamos qué función es mayor en el intervalo $(a; b)$. Si $f(x) > g(x)$ en el intervalo $(a; b)$, el área está dada por $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$. Si $f(x) < g(x)$ en el intervalo $(a; b)$, el área está dada por $\int_a^b (g(x) - f(x))dx$. Una vez calculada el área para cada intervalo, el área total se obtiene sumando las áreas obtenidas.

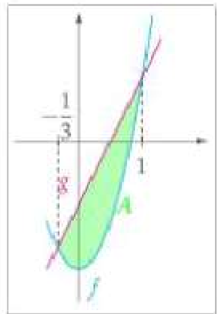
Observamos que determinar si $f(x) > g(x)$ o $f(x) < g(x)$ es equivalente a ver si $f(x) - g(x) > 0$ o $f(x) - g(x) < 0$, es decir, estudiar la positividad o negatividad de la función $f - g$. Entonces, si f y g son funciones continuas en un intervalo $(a; b)$ en el cual sus gráficos no se intersecan (y, por lo tanto, $f(x) - g(x) \neq 0$ para todo $x \in (a; b)$), por el corolario del Teorema de Bolzano, para ver cuál de ellas es mayor en todo el intervalo, bastará comparar los valores que toman en un punto cualquiera de $(a; b)$.

Ejemplo. Calcular el área de la región encerrada entre los gráficos de $f(x) = 3x^2 - 2$ y $g(x) = 2x - 1$.

Primero calculamos valores de x para los cuales $f(x) = g(x)$:

$$3x^2 - 2 = 2x - 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ó } x = -\frac{1}{3}.$$

Es decir, los valores de x que delimitan el área son $x = -\dfrac{1}{3}$ y $x = 1$. Para ver qué función es mayor en el intervalo $(-\dfrac{1}{3}; 1)$, por el corolario del Teorema de Bolzano, basta ver qué función es mayor en un punto del intervalo. Por ejemplo, tomemos el valor 0: $f(0) = -2$ y $g(0) = -1$, por lo que $f(x) < g(x)$ en el intervalo $(-\dfrac{1}{3}; 1)$. Un gráfico aproximado de la situación es el siguiente:



Entonces, el área a calcular es

$$A = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} \left(2x - 1 - (3x^2 - 2)\right) dx =$$

$$= \int_{-\frac{1}{3}}^{1} \left(-3x^2 + 2x + 1\right) dx = \left(-x^3 + x^2 + x\right)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{1} = (-1 + 1 + 1) - \left(-(-\frac{1}{3})^3 + (-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{1}{3})\right)$$

con lo que

$$\boxed{A = \frac{32}{27}.}$$

Ejemplo. Calcular el área de la región encerrada entre los gráficos de $f(x) = 4x^3$ y $g(x) = 4x$.

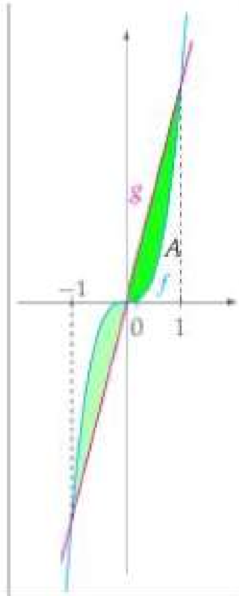
Primero calculamos los valores de x donde los gráficos de las funciones se cortan:

$$4x^3 = 4x \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = 1 \text{ ó } x = -1.$$

Ahora vamos a usar el corolario de Teorema de Bolzano para hacer una tabla que muestre qué pasa con f y g en cada intervalo delimitado por estos valores de x:

x	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1
f	-4	$f(-0,5) = -0,5$	0	$f(0,5) = 0,5$	4
g	-4	$g(-0,5) = -2$	0	$g(0,5) = 2$	4
luego		$f > g$		$f < g$	

Podemos hacer ahora un gráfico aproximado de la situación:



Entonces, el área de la región encerrada entre los gráficos resulta ser

$$A = \int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))\, dx + \int_{0}^{1} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{-1}^{0} \left(4x^3 - 4x\right) dx + \int_{0}^{1} \left(4x - 4x^3\right) dx$$
$$= (x^4 - 2x^2)\Big|_{-1}^{0} + (2x^2 - x^4)\Big|_{0}^{1} = 0 - (1 - 2) + (2 - 1) - 0$$

con lo que

$$\boxed{A = 2.}$$

Usando integrales definidas podemos calcular también áreas delimitadas por gráficos funciones pero entre dos valores de la abscisa x.

Ejemplo. Calcular el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 2x^2$ para $0 \leq x \leq 2$.

Como siempre, primero calculamos los valores de x donde los gráficos de las funciones se cortan:

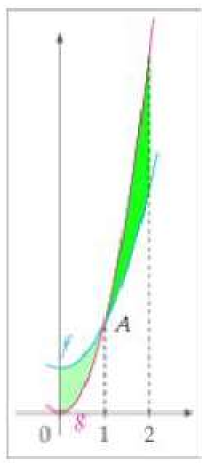
$$x^2 + 1 = 2x^2 \Leftrightarrow -x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ó } x = 1.$$

Como el área que nos interesa está dada por los valores de x entre 0 y 2, de los valores obtenidos sólo nos interesa $x = 1$.

Hagamos una tabla para ver cómo se comportan f y g en el intervalo $[0; 2]$:

x	$[0; 1)$	1	$(1; 2]$
f	$f(0) = 1$	$f(1) = 2$	$f(2) = 5$
g	$g(0) = 0$	$g(1) = 2$	$g(2) = 8$
luego	$f > g$		$f < g$

Podemos ver esta situación en el siguiente gráfico:



Luego, el área total pedida será:

$$A = \int_0^1 \left(-x^2 + 1\right) dx + \int_1^2 \left(x^2 - 1\right) dx.$$

Calculando primitivas para $-x^2 + 1$ y $x^2 - 1$ y usando la regla de Barrow, tenemos que

$$A = \left(-\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\Big|_1^2 = -\frac{1}{3}1^3 + 1 - 0 + \frac{1}{3}2^3 - 2 - \left(\frac{1}{3}1^3 - 1\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)$$

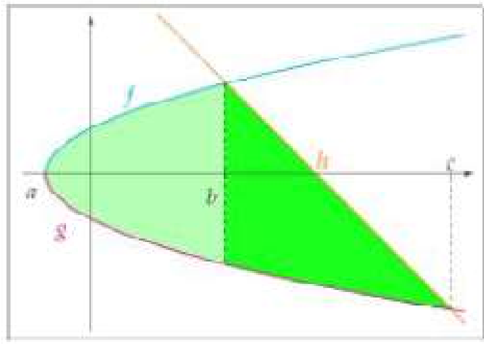
con lo que el área pedida será

$$\boxed{A = 2.}$$

Con las herramientas que contamos ahora, podemos calcular áreas de regiones delimitadas por gráficos de funciones en otras situaciones.

Ejemplo. Calcular el área de la región delimitada por los gráficos de $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = -\sqrt{x+1}$ y $h(x) = -x + 5$.

En este caso conviene hacer un gráfico primero para entender la situación:



Para calcular esta área, podemos pensar en partirla en dos: primero, calcular el área encerrada por los gráficos de f y g desde la abscisa a del punto en que se cortan hasta b donde f y h valen lo mismo; luego, calcular el área desde ese valor b hasta c, que es la abscisa del punto donde se cortan los gráficos de h y g y finalmente, sumar estas dos áreas.

Primero busquemos los valores de a, b y c en cuestión.

El valor a es la abscisa del punto donde f y g coinciden:

$$\sqrt{x+1} = -\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

El valor b es la abscisa del punto donde el gráfico de f se corta con el de h:

$$\sqrt{x+1} = -x+5 \Leftrightarrow x+1 = (-x+5)^2 \text{ y } -x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x+1 = x^2-10x+25 \text{ y } 5 \geq x$$
$$\Leftrightarrow 0 = x^2-11x+24 \text{ y } 5 \geq x \Leftrightarrow (x=3 \text{ o } x=8) \text{ y } 5 \geq x \Leftrightarrow x=3.$$

El valor c es la abscisa del punto donde el gráfico de h se corta con el de g:

$$-\sqrt{x+1} = -x+5 \Leftrightarrow x+1 = (-x+5)^2 \text{ y } -x+5 \leq 0 \Leftrightarrow x+1 = x^2-10x+25 \text{ y } 5 \leq x$$
$$\Leftrightarrow 0 = x^2-11x+24 \text{ y } 5 \leq x \Leftrightarrow (x=3 \text{ o } x=8) \text{ y } 5 \leq x \Leftrightarrow x=8.$$

Con todo esto, tenemos que el área buscada será

$$A = \int_{-1}^{3} (f(x)-g(x))\,dx + \int_{3}^{8} (h(x)-g(x))\,dx =$$
$$\int_{-1}^{3} \left(\sqrt{x+1}-(-\sqrt{x+1})\right) dx + \int_{3}^{8} \left(-x+5-(-\sqrt{x+1})\right) dx$$
$$= \int_{-1}^{3} 2\sqrt{x+1}\,dx + \int_{3}^{8} \left(-x+5+\sqrt{x+1}\right)\,dx$$

Calculando las primitivas correspondientes (¡queda como ejercicio para el lector!) y aplicando la regla de Barrow tenemos que

$$A = \left(\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{-1}^{3} + \left(-\frac{1}{2}x^2+5x+\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{3}^{8} = \frac{32}{3} - 0 + 26 - \frac{95}{6}$$

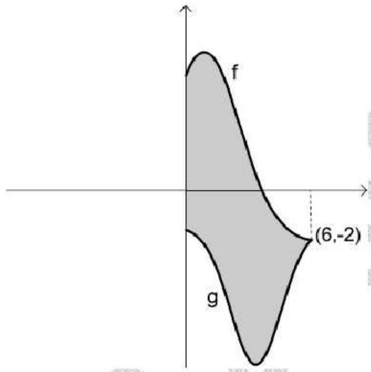
con lo que el área buscada es

$$\boxed{A = \frac{125}{6}.}$$

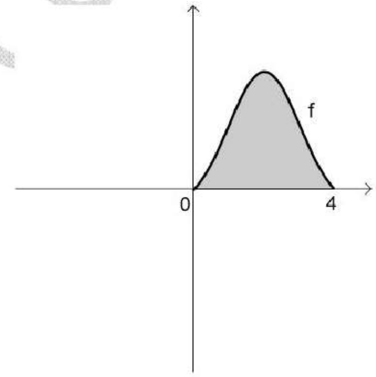
+-+

Ejercicio 14.- Expresar, usando integrales definidas, el área de las regiones sombreadas.

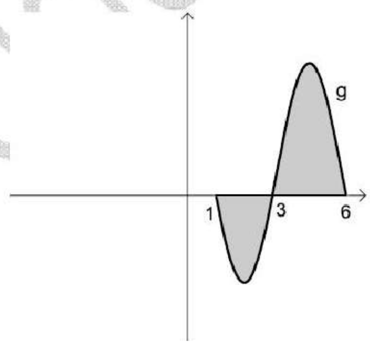
a.



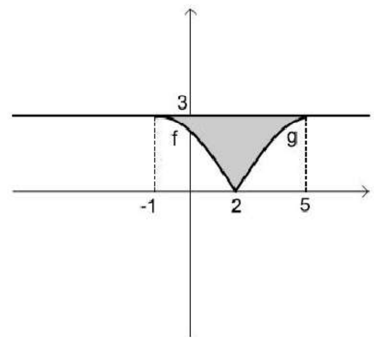
b.



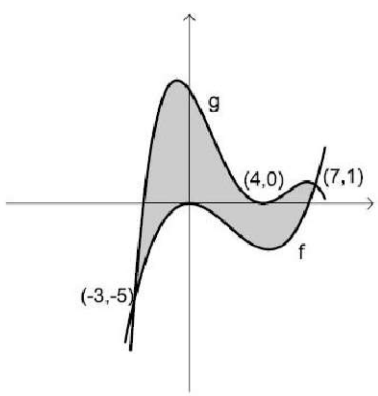
c.



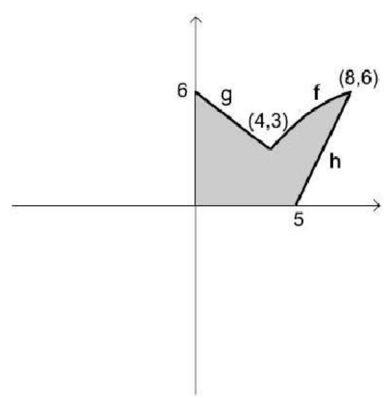
d.



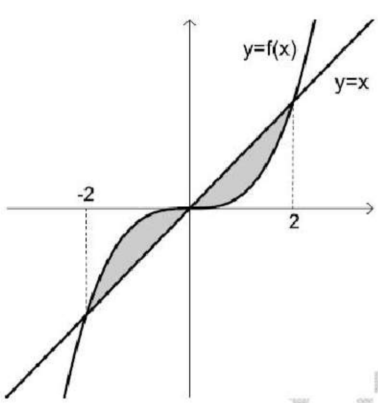
e.



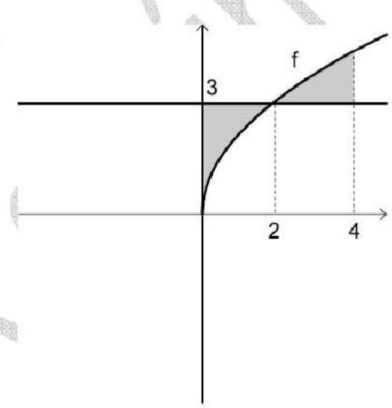
f.



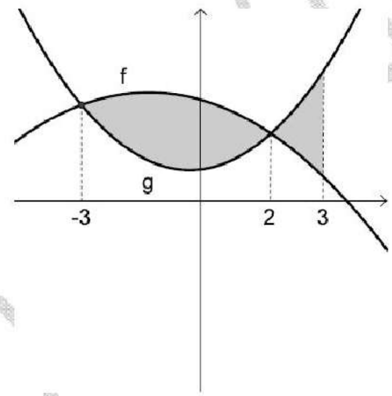
g.



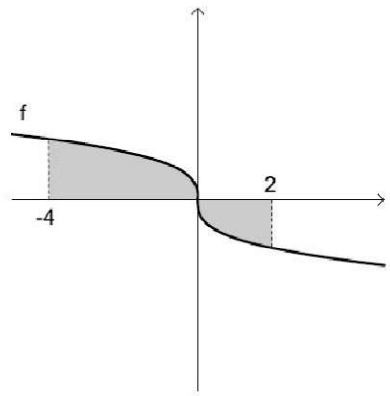
h.



i.



j.



Ej 14

De acuerdo a lo visto en la teoría de cálculo de áreas y como las áreas son siempre positivas, tenemos :

1) Si $f(x) > 0$ en $[a, b]$ el área encerrada entre $f(x)$ y el eje x es :

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

2) Si $f(x) < 0$ en $[a, b]$ el área encerrada entre $f(x)$ y el eje x es :

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

3) Si $f(x) > g(x)$ en $[a, b]$ el área encerrada entre $f(x)$ y $g(x)$ es :

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Ej 14 a)

De acuerdo al gráfico y como $f(x) > g(x)$ entre $x = 0$ y $x = 6$ el área sombreada es :

$$A = \int_0^6 [f(x) - g(x)]\,dx$$

Ej 14 b)

De acuerdo al gráfico y como $f(x) > 0$ entre $x = 0$ y $x = 4$ el área sombreada es :

$$A = \int_0^4 f(x)\,dx$$

Ej 14 c)

De acuerdo al gráfico el área sombreada está formada por la suma de A_1 y A_2
como $g(x) < 0$ entre $x = 1$ y $x = 3$ el área A_1 se obtiene integrando $-g(x)$
como $g(x) > 0$ entre $x = 3$ y $x = 6$ el área A_2 se obtiene integrando $g(x)$

Por lo tanto el área sombreada es :

$$A = A_1 + A_2 = -\int_1^3 g(x)\,dx + \int_3^6 g(x)\,dx$$

Ej 14 d)

De acuerdo al gráfico el área sombreada está formada por A_1 y A_2 :

A_1 es la que se forma entre la recta horizontal $y = 3$ y $f(x)$ entre $x = -1$ y $x = 2$

A_2 es la que se forma entre la recta horizontal $y = 3$ y $g(x)$ entre $x = 2$ y $x = 5$

Entonces :

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-1}^2 [3 - f(x)]\,dx + \int_2^5 [3 - g(x)]\,dx$$

Ej 14 e)

De acuerdo al gráfico y como $g(x) > f(x)$ entre $x = -3$ y $x = 7$
el área sombreada es :

$$A = \int_{-3}^7 [g(x) - f(x)]\,dx$$

Ej 14 f)

De acuerdo al gráfico el área sombreada está formada por A_1, A_2 y A_3

A_1 es la que se forma entre $g(x)$ y el eje x entre $x = 0$ y $x = 4$

A_2 es la que se forma entre $f(x)$ y el eje x entre $x = 4$ y $x = 5$

A_3 es la que se forma entre $f(x)$ y $h(x)$ entre $x = 5$ y $x = 8$

Entonces el área sombreada es $A = A_1 + A_2 + A_3$:

$$A = \int_0^4 g(x)\,dx + \int_4^5 f(x)\,dx + \int_5^8 [f(x) - h(x)]\,dx$$

Ej 14 g)

De acuerdo al gráfico el área sombreada está formada por A_1 y A_2

A_1 es la que se forma entre f (x) y la recta y = x entre x = -2 y x = 0
pues f (x) > x para - 2 ≤ x ≤ 0

A_2 es la que se forma entre la recta y = x y f (x) entre x = 0 y x = 2
pues x > f (x) para 0 ≤ x ≤ 2

Entonces el área sombreada es $A = A_1 + A_2$:

$$A = \int_{-2}^{0} [f(x) - x]\, dx + \int_{0}^{2} [x - f(x)]\, dx$$

Ej 14 h)

De acuerdo al gráfico el área sombreada está formada por A_1 y A_2

A_1 es la que se forma entre la recta y = 3 y f (x) entre x = 0 y x = 2
pues 3 ≥ f (x) para - 2 ≤ x ≤ 0

A_2 es la que se forma entre f (x) y la recta y = 3 entre x = 2 y x = 4
pues f (x) ≥ 3 para 0 ≤ x ≤ 2

Entonces el área sombreada es $A = A_1 + A_2$:

$$A = \int_{0}^{2} [3 - f(x)]\, dx + \int_{2}^{4} [f(x) - 3]\, dx$$

Ej 14 i)

De acuerdo al gráfico el área sombreada está formada por A_1 y A_2

A_1 es la que se forma entre f (x) y g (x) entre x = -3 y x = 2
pues f (x) ≥ g (x) para - 3 ≤ x ≤ 2

A_2 es la que se forma entre g (x) y f (x) entre x = 2 y x = 3
pues g (x) ≥ f (x) para 2 ≤ x ≤ 3

Entonces el área sombreada es $A = A_1 + A_2$:

$$A = \int_{-3}^{2} [f(x) - g(x)]\, dx + \int_{2}^{3} [g(x) - f(x)]\, dx$$

Ej 14 j)

De acuerdo al gráfico el área sombreada está formada por A_1 y A_2

A_1 es la que se forma entre la recta f (x) y el eje x entre x = -4 y x = 0
pues f (x) ≥ 0 para - 4 ≤ x ≤ 0

Como f (x) ≤ 0 para x entre x = 0 y x = 2 para calcular A_2
habrá que cambiar el signo de f (x)

Entonces el área sombreada es $A = A_1 + A_2$:

$$A = \int_{-4}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} -f(x)\,dx = \int_{-4}^{0} f(x)\,dx - \int_{0}^{2} f(x)\,dx$$

+-+

Ejercicio 15.- Calcular el área de la región encerrada entre:

a. el gráfico de $f(x)=x^2+2x-3$ y el eje x.

b. el gráfico de $f(x)=x^3-3x^2-10x$ y el eje x.

c. los gráficos de $f(x)=-x+4$ y $g(x)=x^2+2x$.

d. los gráficos de $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=-x+6$ y el eje x.

e. los gráficos de $f(x)=x^3-1$ y $g(x)=4x-1$.

f. los gráficos de $f(x)=2x^2+6x-5$ y $g(x)=x^2-3x+5$.

Ej 15 Calcular el área encerrada por las curvas y ejes

Ej 15 a)

área encerrada entre el gráfico de $f(x) = x^2 + 2x - 3$ y el eje x

Para hacer el gráfico de $f(x)$ que es una parábola recordemos que :

$$x_v = \frac{-b}{2a} \;;\; y_v = f(x_v)$$

$$x_v = \frac{-2}{2\cdot 1} = -1 \implies y_v = f(x_v) \implies y_v = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$

El vértice de $f(x)$ es $V = (x_v, y_v) = (-1, -4)$

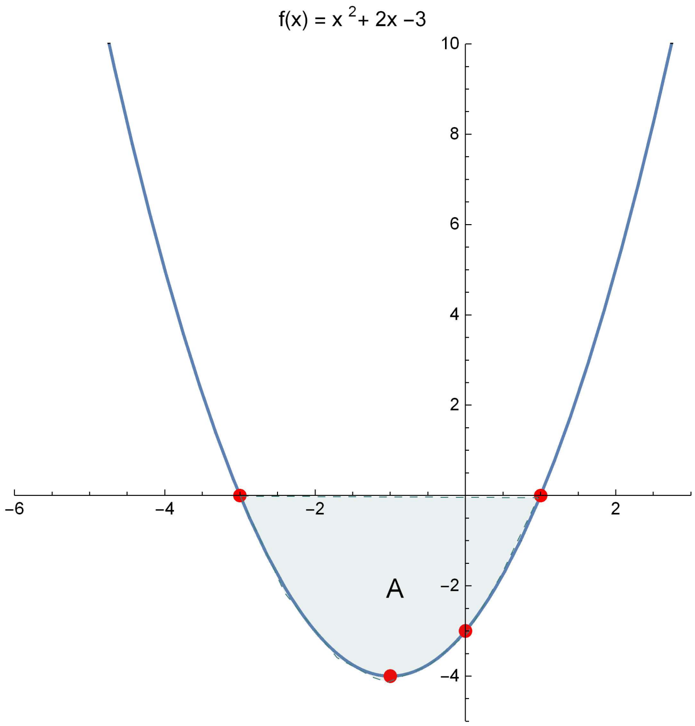
Las raíces ó ceros de $f(x)$ son las que verifican $f(x) = 0 \implies x^2 + 2x - 3 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \implies$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \implies x_1 = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ ó } x_2 = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$C^0 = \{-3, 1\}$

Hagamos un gráfico de $f(x)$ para ver cuál es el área encerrada a calcular



Como vemos en el gráfico el área encerrada A está delimitada por el eje x y f (x) entre las raíces x = - 3 y x = 1

Como f (x) < 0 el área encerrada por f (x) y el eje x será :

$$A = \int_{-3}^{1} -f(x)\,dx = -\int_{-3}^{1} f(x)\,dx = -\int_{-3}^{1} \left(x^2 + 2x - 3\right) dx =$$

$$= -\int_{-3}^{1} \left(x^2 + 2x - 3\right) dx = -\left\{\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right\}\Bigg|_{-3}^{1} =$$

$$= -\left\{\frac{1^3}{3} + 1^2 - 3\cdot 1 - \left(\frac{(-3)^3}{3} + (-3)^2 - 3(-3)\right)\right\} =$$

$$= -\left\{\frac{1}{3} + 1 - 3 - \left(\frac{-27}{3} + 9 + 9\right)\right\} = -\left\{\frac{1}{3} - 2 - \left(-9 + 9 + 9\right)\right\} =$$

$$= -\left\{\frac{-5}{3} - 9\right\} = -\frac{-32}{3} = \frac{32}{3} > 0$$

Entonces :

$$A = \frac{32}{3}$$

Ej 15 c)

área encerrada entre el gráfico de f (x) = - x + 4 y g (x) = x^2 + 2 x

Haremos el análisis de f (x) y g (x) para hacer los gráficos :

----

1 ero determinaremos los puntos de intersección entre f y g

que serán aquellos en donde f (x) = g (x)

$$f(x) = g(x) \implies -x + 4 = x^2 + 2x \implies 0 = x^2 + 3x - 4$$

resolvamos la ecuación cuadrática $x^2 + 3x - 4 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} \Longrightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \Longrightarrow x_1 = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ ó } x_2 = \frac{-3-5}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

entonces $x_1 = 1$ ó $x_2 = -4$

$x_1 = 1$ ó $x_2 = -4$ son las abscisas de los puntos de intersección entre f y g

obtengamos las ordenadas de los puntos

reemplazando en $f(x) = -x + 4$

$y_1 = f(x_1) = -1 + 4 = 3 \Longrightarrow P_1 = (1, 3)$

ahora con x_2

reemplazando en $f(x) = -x + 4$

$y_2 = f(x_2) = -(-4) + 4 = 8 \Longrightarrow P_2 = (-4, 8)$

Hasta ahora sabemos que f y g se cortan en $x = -4$ y en $x = 1$

------x-- - -----------x--

-4 1

Como el área encerrada entre dos curvas es la integral de la diferencia entre

las funciones falta determinar en cuáles intervalos $f(x) > g(x)$ y en

cuáles otros intervalos es $f(x) < g(x)$

Observen que si $f(x) > g(x) \Longrightarrow f(x) - g(x) > 0$

Analicemos entonces los conjuntos de positividad y de negatividad
de la diferencia entre f y g en los intervalos determinados por los
puntos de intersección de las dos funciones

Intervalos de análisis para $f(x) - g(x)$:

$(-\infty, -4)$; $(-4, 1)$; $(1, +\infty)$

Como $f(x)$ y $g(x)$ son continuas también lo será la diferencia $f(x) - g(x)$

y así poder usar el corolario del Teorema de Bolzano :

En $(-\infty, -4)$:

tomamos $x = -5 \Longrightarrow f(-5) - g(-5) = -(-5) + 4 - \left((-5)^2 + 2(-5)\right) =$

$= 5 + 4 - (25 - 10) = 9 - 15 = -6 < 0$

entonces entodo el intervalo $(-\infty, -4)$ **será** $f(x) - g(x) < 0$

En $(-4, 1)$ **:**

tomamos $x = 0 \implies f(0) - g(0) = -0 + 4 - (0^2 + 2(0)) = 4 > 0$

entonces entodo el intervalo $(-4, 1)$ **será** $f(x) - g(x) > 0$

En $(1, +\infty)$ **:**

tomamos $x = 2 \implies f(2) - g(2) = -2 + 4 - (2^2 + 2(2)) =$

$= 2 - (4 + 4)) = 2 - 8 = -6 < 0$

podemos escribir los intervalos de positividad y negatividad de $f(x) - g(x)$ **:**

$C^+(f - g) = (-4, 1)$

$C^-(f - g) = (-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$

Esto quiere decir que $f(x) - g(x) > 0$ **en** $(-4, 1)$

y que $f(x) - g(x) < 0$ **en** $(-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$

Por lo tanto habrá una única área encerrada entre f y g delimitada por los puntos de intersección :

$$A = \int_{-4}^{1} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-4}^{1} \left[-x + 4 - (x^2 + 2x)\right] dx =$$

$f(x) = -x + 4 \; ; \; g(x) = x^2 + 2x$

$$= \int_{-4}^{1} \left[-x + 4 - x^2 - 2x\right] dx = \int_{-4}^{1} \left[-x^2 - 3x + 4\right] dx = -\int_{-4}^{1} \left[x^2 + 3x - 4\right] dx =$$

$$= -\left\{\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x\right\}\Bigg|_{-4}^{1} = -\left\{\frac{1}{3}1^3 + \frac{3}{2}1^2 - 4\cdot 1 - \left(\frac{1}{3}(-4)^3 + \frac{3}{2}(-4)^2 - 4(-4)\right)\right\} =$$

$$= -\left\{\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4 - \left(\frac{1}{3}(-64) + \frac{3}{2}\cdot 16 + 16\right)\right\} =$$

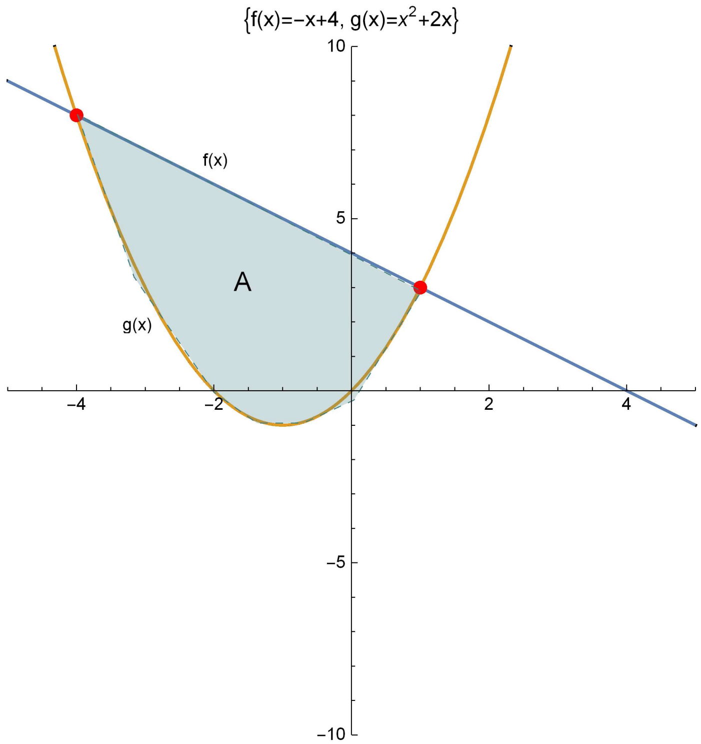
$$= -\left\{\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4 + \frac{64}{3} - 24 - 16\right\} =$$

$$= -\left\{\frac{1}{3} + \frac{3}{2} + \frac{64}{3} - 44\right\} = -\left\{\frac{2 + 9 + 128 - 264}{6}\right\} = -\left\{\frac{139 - 264}{6}\right\} = -\left\{-\frac{125}{6}\right\} = \frac{125}{6}$$

Por lo tanto el área encerrada entre f y g es

$$A = \frac{125}{6}$$

Gráfico de $f(x)$ **y** $g(x)$ **para ver cuál es el área encerrada calculada**



Ej 15 e)

área encerrada entre el gráfico de f (x) = x^3 - 1 y g (x) = 4 x - 1

Hagamos un gráfico de f (x) y g (x) :

Como f (x) = x^3 - 1 es similar al gráfico de x^3 desplazado verticalmente en una unidad

hacia abajo, no tiene máximos ni mínimos sino un punto de inflexión en x = 0

para graficar calculemos algunos puntos del gráfico de f

puntos de f (x) = x^3 - 1 :

si x = 0 ⟹ $0^3 - 1 = -1$ ⟹ $(0, -1)$ ∈ gráf (f)

si x = 1 ⟹ $1^3 - 1 = 0$ ⟹ $(1, 0)$ ∈ gráf (f)

si x = 2 ⟹ $2^3 - 1 = 7$ ⟹ $(2, 7)$ ∈ gráf (f)

si x = -1 ⟹ $(-1)^3 - 1 = -2$ ⟹ $(-1, -2)$ ∈ gráf (f)

si x = -2 ⟹ $(-2)^3 - 1 = -9$ ⟹ $(-2, -9)$ ∈ gráf (f)

puntosf = {{0, -1}, {1, 0}, {2, 7}, {-1, -2}, {-2, -9}};

----

puntos de g (x) = 4 x - 1 :

si x = 0 ⟹ $4 \cdot 0 - 1 = -1$ ⟹ $(0, -1)$ ∈ gráf (g)

si x = 1 ⟹ $4 \cdot 1 - 1 = 3$ ⟹ $(1, 3)$ ∈ gráf (g)

si x = -2 ⟹ $4 (-2) - 1 = -9$ ⟹ $(-2, -9)$ ∈ gráf (g)

puntosg = {{0, -1}, {1, 3}, {-2, -9}};

Determinemos los puntos de intersección entre f y g

que serán aquellos en donde $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x) \implies x^3 - 1 = 4x - 1 \implies x^3 - 4x = 0$

$\implies x\left(x^2 - 4\right) = 0 \implies x = 0$ ó $x^2 - 4 = 0$

$\implies x = 0$ ó $x = 2$ ó $x = -2$

$x_1 = -2$ $x_2 = 0$ $x_3 = 2$ son las abscisas de los puntos de intersección entre f y g

obtengamos las ordenadas de los puntos

reemplazando $x_1 = -2$ en $g(x) = 4x - 1$

$y_1 = g(x_1) = 4 \cdot (-2) - 1 = -9 \implies P_1 = (-2, -9)$

----

ahora con $x_2 = 0$

reemplazando en $g(x) = 4x - 1$

$y_2 = g(x_2) = 4 \cdot 0 - 1 = -1 \implies P_2 = (0, -1)$

----

ahora con $x_3 = 2$

reemplazando en $g(x) = 4x - 1$

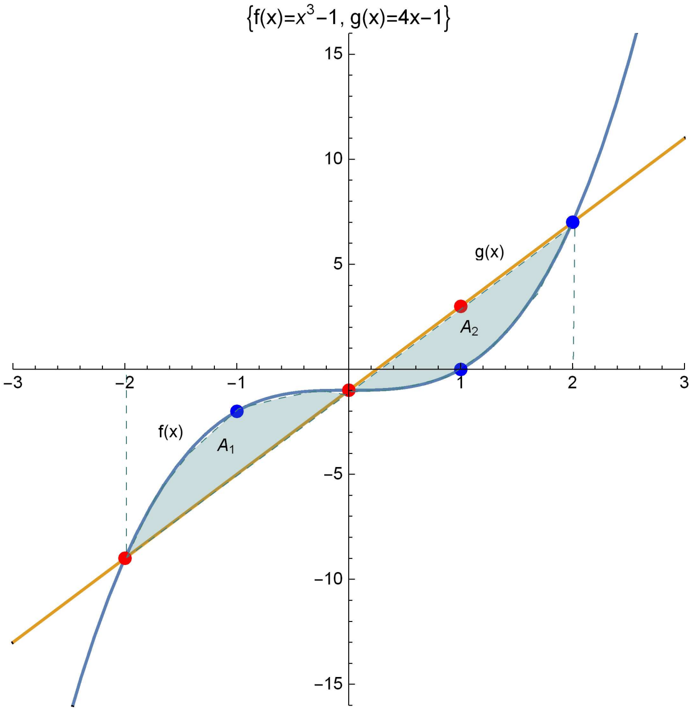
$y_3 = g(x_3) = 4 \cdot 2 - 1 = 7 \implies P_3 = (2, 7)$

Hasta ahora sabemos que f y g se cortan en los puntos de abscisas

$x = -2$ $x = 0$ $x = 2$

```
---x-- -----x------- x----
  -2        0        2
```

Gráfico de $f(x)$ y $g(x)$ para ver cuál es el área encerrada entre f y g



A partir del gráfico vemos que el área encerrada entre f (x) y g (x) y el eje x está formada por dos áreas A_1 y A_2 tal que $A = A_1 + A_2$

El área A_1 es el área entre f (x) y g (x) y como f (x) > g (x) se calcula como :

$$A_1 = \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-2}^{0} \left[x^3 - 1 - (4x - 1)\right] dx$$

El área A_2 es el área entre g (x) y f (x) y como g (x) > f (x) se calcula como :

$$A_2 = \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]\, dx = \int_{0}^{2} \left[4x - 1 - (x^3 - 1)\right] dx$$

Calculemos las integrales definidas :

$$A_1 = \int_{-2}^{0} \left[x^3 - 1 - (4x - 1)\right] dx = \int_{-2}^{0} \left[x^3 - 1 - 4x + 1\right] dx = \int_{-2}^{0} \left[x^3 - 4x\right] dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\, dx = \left(\frac{1}{4} x^4 - 2x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0} = \left\{\frac{1}{4} \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2 - \left(\frac{1}{4} (-2)^4 - 2 (-2)^2\right)\right\} =$$

$$= \left\{0 - \left(\frac{1}{4} \cdot 16 - 2 \cdot 4\right)\right\} = -(4 - 8) = -(-4) = 4$$

Por otra parte

$$A_2 = \int_{0}^{2} \left[4x - 1 - (x^3 - 1)\right] dx = \int_{0}^{2} \left[4x - 1 - x^3 + 1\right] dx = \int_{0}^{2} \left[4x - x^3\right] dx =$$

$$= \left(2x^2 - \frac{1}{4} x^4\right)\Bigg|_{0}^{2} = \left\{2 \cdot 2^2 - \frac{1}{4} \cdot 2^4 - \left(2 \cdot 0^2 - \frac{1}{4} \cdot 0^4\right)\right\} =$$

$$= \left\{2 \cdot 4 - \frac{1}{4} \cdot 16 - 0\right\} = \{8 - 4\} = 4$$

Por lo tanto el área encerrada entre f y g y el eje x es :

$$A = A_1 + A_2 = 4 + 4 = 8$$

A = 8

Ej 15 f)

área encerrada entre el gráfico de $f(x) = 2x^2 + 6x - 5$ **y** $g(x) = x^2 - 3x + 5$

Hagamos un gráfico de f (x) y g (x) :

Como $f(x) = 2x^2 + 6x - 5$

Completemos cuadrados :

$$2x^2 + 6x - 5 = 2\left(x^2 + 3x - \frac{5}{2}\right) = 2\left\{x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}\right\} =$$

$$= 2\left\{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{5}{2}\right\} = 2\left\{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{10}{4}\right\} = 2\left\{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{19}{4}\right\} =$$

$$= 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{19}{2}$$

Entonces :

$$f(x) = 2x^2 + 6x - 5 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{19}{2}$$

Entonces de la forma canónica sale $x_v = -\frac{3}{2}$; $y_v = -\frac{19}{2}$

Observemos que si $x = 0$, $f(0) = -5 \Longrightarrow P = (0, -5) \in$ **gráf (f)**

El eje de simetría de la parábola f (x) es $x = x_v = -\frac{3}{2}$

La distancia del eje de simetría al $(0, -5)$ **es** $\left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$

entonces por simetría el punto $Q = \left(-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}, -5\right) = (-3, -5) \in$ **gráf (f)**

y Q es el simétrico de $P = (0, -5)$

Tenemos entonces el vértice, P y Q

$$\text{puntosf} = \left\{\left\{-\frac{3}{2}, -\frac{19}{2}\right\}, \{0, -5\}, \{-3, -5\}\right\};$$

Como $g(x) = x^2 - 3x + 5$

Completemos cuadrados :

$$x^2 - 3x + 5 = x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 5 =$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$$

Entonces :

$$g(x) = x^2 - 3x + 5 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$$

Entonces de la forma canónica sale $x_v = \frac{3}{2}$; $y_v = \frac{11}{4}$

Observemos que si $x = 0$, $g(0) = 5 \Longrightarrow M = (0, 5) \in$ gráf (g)

El eje de simetría de la parábola $f(x)$ **es** $x = x_v = \frac{3}{2}$

La distancia del eje de simetría al $(0, 5)$ **es** $\left|\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$

entonces por simetría el punto $R = \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}, 5\right) = (3, 5) \in$ gráf (g)

y R es el simétrico de $M = (0, 5)$

Tenemos entonces el vértice, M y R

puntosg = $\left\{\left\{\frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right\}, \{0, 5\}, \{3, 5\}\right\}$;

Determinemos los puntos de intersección entre f y g

que serán aquellos en donde $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x) \Longrightarrow 2x^2 + 6x - 5 = x^2 - 3x + 5 \Longrightarrow x^2 + 9x - 10 = 0$

$\Longrightarrow x^2 + 9x + \left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 10 = 0 \Longrightarrow \left(x + \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} - 10 = 0$

$\Longrightarrow \left(x + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4} + 10 \Longrightarrow \left(x + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{121}{4} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \sqrt{\left(x + \frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{121}{4}} \Longrightarrow \left|x + \frac{9}{2}\right| = \frac{11}{2} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x = \frac{11}{2} - \frac{9}{2}$ ó $x = -\frac{11}{2} - \frac{9}{2} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x = \frac{2}{2} = 1$ ó $x = -\frac{20}{2} = -10$

$x_1 = -10$ $x_2 = 1$ **son las abscisas de los puntos de intersección entre f y g**

obtengamos las ordenadas de los puntos

reemplazando $x_1 = -10$ **en** $g(x) = x^2 - 3x + 5$

$y_1 = g(x_1) = (-10)^2 - 3(-10) + 5 = 100 + 30 + 5 = 135 \Longrightarrow P_1 = (-10, 135)$

----

ahora con $x_2 = 1$

reemplazando en $g(x) = x^2 - 3x + 5$

$y_2 = g(x_2) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 5 = 1 - 3 + 5 = 3 \Longrightarrow P_2 = (1, 3)$

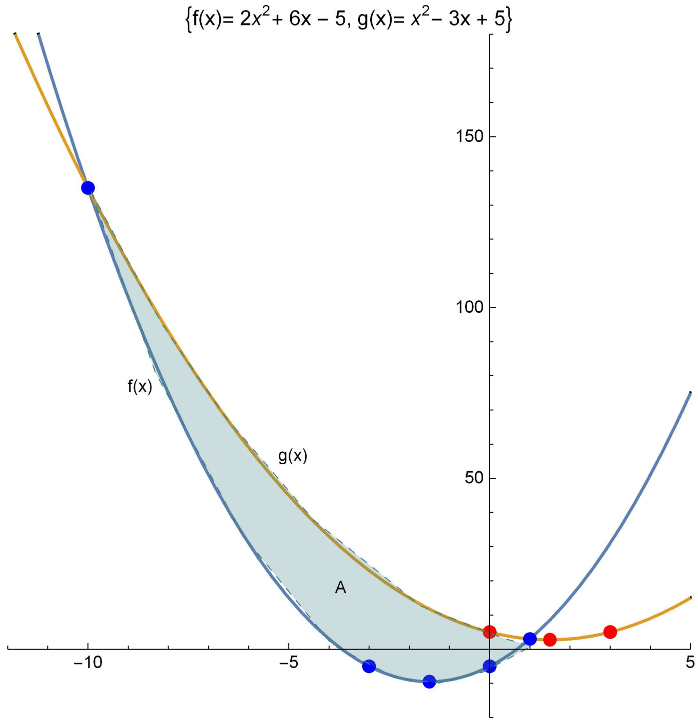
Hasta ahora sabemos que f y g se cortan en los puntos de abscisas

x = -10   x = 1

---x--------------x----

-10   1

Gráfico de f (x) y g (x) para ver cuál es el área encerrada entre f y g



A partir del gráfico vemos que el área encerrada entre f (x) y g (x) es A

El área A es el área entre g (x) y f (x) y como g (x) > f (x) se calcula como :

$$A = \int_{-10}^{1} [g(x) - f(x)]\, dx = \int_{-10}^{1} \left[x^2 - 3x + 5 - \left(2x^2 + 6x - 5\right)\right] dx$$

Calculemos la integral definida :

$$A = \int_{-10}^{1} \left[x^2 - 3x + 5 - \left(2x^2 + 6x - 5\right)\right] dx = \int_{-10}^{1} \left[x^2 - 3x + 5 - 2x^2 - 6x + 5\right] dx =$$

$$= \int_{-10}^{1} \left[-x^2 - 9x + 10\right] dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 10x\right)\Big|_{-10}^{1} =$$

$$= \left\{-\frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{9}{2}\cdot 1^2 + 10\cdot 1 - \left(-\frac{1}{3}\cdot(-10)^3 - \frac{9}{2}\cdot(-10)^2 + 10\cdot(-10)\right)\right\} =$$

$$= \left\{-\frac{1}{3} - \frac{9}{2} + 10 - \left(-\frac{1}{3}\cdot(-1000) - \frac{9}{2}\cdot 100 - 100\right)\right\} =$$

$$= \left\{-\frac{1}{3} - \frac{9}{2} + 10 - \left(\frac{1000}{3} - \frac{900}{2} - 100\right)\right\} =$$

$$= \left\{-\frac{1}{3} - \frac{9}{2} + 10 - \frac{1000}{3} + 450 + 100\right)\right\} =$$

$$= \left\{-\frac{1}{3} - \frac{9}{2} + 10 - \frac{1000}{3} + 550\right)\right\} = \left\{-\frac{1}{3} - \frac{9}{2} - \frac{1000}{3} + 560\right)\right\} = \frac{-2 - 27 - 2000 + 3360}{6} = \frac{1331}{6}$$

Por lo tanto el área A encerrada entre f y g es :

$$A = \frac{1331}{6}$$

+-+

Ejercicio 16.- Calcular el área de la región comprendida entre los gráficos de

a.	$f(x) = -x+2$	y	$g(x) = x(x-2)$	para $0 \le x \le 3$
b.	$f(x) = -x+2$	y	$g(x) = x(x-2)$	para $-2 \le x \le 4$
c.	$f(x) = e^{-x}$	y	$g(x) = e^{2x}$	para $-1 \le x \le 1$
d.	$f(x) = -x^2 - x + 2$	y	el eje x	para $-3 \le x \le 3$
e.	$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)$	y	$g(x) = \sqrt{x-1}$	para $1 \le x \le 10$
f.	$f(x) = x^2 + 4x + 2$	y	$g(x) = -2x^2 + 7x + 8$	para $-2 \le x \le 6$

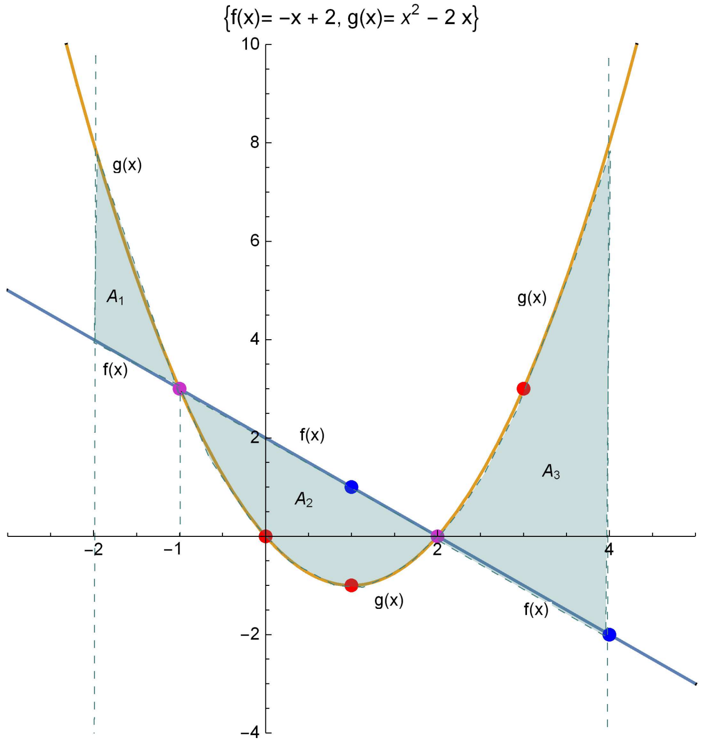
Ej 16 b)

Calcular el área de la región comprendida entre

$f(x) = -x + 2$ y $g(x) = x\,(x - 2) = x^2 - 2x$ para $-2 \le x \le 4$

Las funciones son las mismas que en el Ej 16 a) pero la diferencia es el recorrido de x

Gráfico de f (x) y g (x) para ver cuál es el área encerrada entre f y g para $-2 \le x \le 4$



A = A₁ + A₂ + A₃

$$A_1 = \int_{-2}^{-1} [g(x) - f(x)]\, dx = \int_{-2}^{-1} \left[x^2 - 2x - (-x + 2)\right] dx =$$

$$= \int_{-2}^{-1} \left[x^2 - 2x + x - 2\right)]\, dx = \int_{-2}^{-1} \left(x^2 - x - 2\right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_{-2}^{-1} =$$

$$= \left\{\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{1}{2}\cdot(-1)^2 - 2\cdot(-1) - \left(\frac{1}{3}\cdot(-2)^3 - \frac{1}{2}\cdot(-2)^2 - 2\cdot(-2)\right)\right\} =$$

$$= \left\{\frac{1}{3}\cdot(-1) - \frac{1}{2}\cdot 1 + 2 - \left(\frac{1}{3}\cdot(-8) - \frac{1}{2}\cdot 4 + 4\right)\right\} =$$

$$= \left\{-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(-\frac{8}{3} - 2 + 4\right)\right\} = \left\{-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(-\frac{8}{3} + 2\right)\right\} =$$

$$= \left\{-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + \frac{8}{3} - 2\right\} = \left\{-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{8}{3}\right\} = \frac{-2 - 3 + 16}{6} = \frac{11}{6}$$

Calculemos A₂

$$A_2 = \int_{-1}^{2} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-1}^{2} \left[-x + 2 - \left(x^2 - 2x\right)\right] dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} \left[-x + 2 - x^2 + 2x\right] dx = \int_{-1}^{2} \left[-x^2 + x + 2\right] dx =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_{-1}^{2} =$$

$$= \left\{\left(-\frac{1}{3}\cdot 2^3 + \frac{1}{2}\cdot 2^2 + 2\cdot 2\right) - \left(-\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 + \frac{1}{2}\cdot(-1)^2 + 2\cdot(-1)\right)\right\} =$$

$$= \left\{ \left(-\frac{1}{3} \cdot 8 + 2 + 4 \right) - \left(-\frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 1 - 2 \right) \right\} =$$

$$= \left\{ \left(-\frac{8}{3} + 6 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) \right\} =$$

$$= \left\{ -\frac{8}{3} + 6 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right\} = \left\{ -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 8 \right\} = \frac{-16 - 2 - 3 + 48}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

Calculemos A_3

$$A_3 = \int_2^4 [g(x) - f(x)]\, dx = \int_2^4 \left[x^2 - 2x - (-x + 2) \right] dx =$$

$$= \int_2^4 \left[x^2 - 2x + x - 2) \right] dx = \int_2^4 \left(x^2 - x - 2 \right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 - 2x \right) \Big|_2^4 =$$

$$= \left\{ \frac{1}{3} \cdot (4)^3 - \frac{1}{2} \cdot (4)^2 - 2 \cdot (4) - \left(\frac{1}{3} \cdot (2)^3 - \frac{1}{2} \cdot (2)^2 - 2 \cdot (2) \right) \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{3} \cdot 64 - 8 - 8 - \left(\frac{1}{3} \cdot 8 - 2 - 4 \right) \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{64}{3} - 16 - \left(\frac{8}{3} - 6 \right) \right\} = \left\{ \frac{64}{3} - 16 - \frac{8}{3} + 6 \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{64}{3} - \frac{8}{3} - 10 \right\} = \frac{64 - 8 - 30}{3} = \frac{26}{3}$$

Finalmente :

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{11}{6} + \frac{9}{2} + \frac{26}{3} = \frac{11 + 27 + 52}{6} = \frac{90}{6} = 15$$

Por lo tanto

el área de la región comprendida entre

$f(x) = -x + 2$ y $g(x) = x(x - 2) = x^2 - 2x$ para $-2 \le x \le 4$ es

$A = 15$

Ej 16 d)

Área de la región comprendida entre $f(x) = -x^2 - x + 2$ y el eje x para $-3 \le x \le 3$

puntos de $f(x) = -x^2 - x + 2$:

si $x = 0 \implies -0^2 - 0 + 2 = 2 \implies (0, 2) \in$ gráf (f)

si $x = 2 \implies -2^2 - 2 + 2 = -4 \implies (2, -4) \in$ gráf (f)

si $x = -1 \implies -(-1)^2 - (-1) + 2 = 2 \implies (-1, 2) \in$ gráf (f)

puntosf = {{0, 2}, {2, -4}, {-1, 2}}

Determinemos los puntos de intersección entre f y el eje x

que serán aquellos en donde f (x) = 0

$f(x) = 0 \implies -x^2 - x + 2 = 0$

resolvamos la ecuación cuadrática $-x^2 - x + 2 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} \implies \frac{1 \pm \sqrt{9}}{-2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{-2} \implies x_1 = \frac{1+3}{-2} = \frac{4}{-2} = -2 \quad ó \quad x_2 = \frac{1-3}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

entonces $x_1 = -2$ ó $x_2 = 1$

por lo tanto el conjunto de ceros de f es :

$C^0 = \{-2, 1\}$

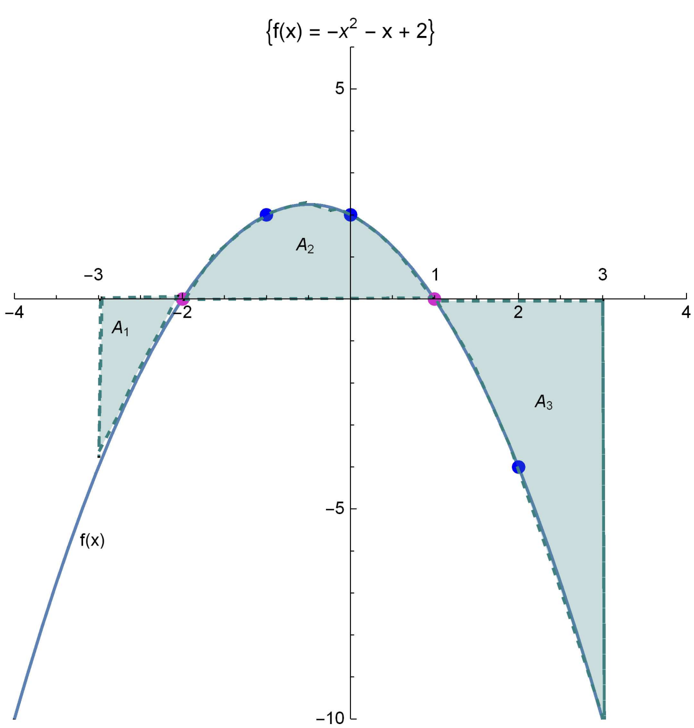
Hasta ahora sabemos que f corta al eje x en

$x = -2$ **y en** $x = 1$ **pero nos piden calcular el área encerrada para** $-3 \le x \le 3$

------x---- ------x------------------

-2 1

Gráfico de f (x) para ver cuál es el área encerrada entre f y el eje x para $-3 \le x \le 3$



Área de la región comprendida entre $f(x) = -x^2 - x + 2$ **y el eje x para** $-3 \le x \le 3$

está formada de tres áreas A_1, A_2 **y** A_3

Como f (x) < 0 entre x = -3 y x = -2

A_1 se obtiene como :

$$A_1 = \int_{-3}^{-2} -f(x)\,dx = \int_{-3}^{-2} -\left[-x^2 - x + 2\right] dx = \int_{-3}^{-2} \left[x^2 + x - 2\right] dx =$$

$$= \left(\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - 2x\right)\Big|_{-3}^{-2} =$$

$$= \left\{\frac{1}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 - 2\cdot(-2) - \left(\frac{1}{3}(-3)^3 + \frac{1}{2}(-3)^2 - 2\cdot(-3)\right)\right\} =$$

$$= \left\{\frac{1}{3}\cdot(-8) + \frac{1}{2}\cdot 4 + 4 - \left(\frac{1}{3}\cdot(-27) + \frac{1}{2}\cdot 9 + 6\right)\right\} =$$

$$= \left\{-\frac{8}{3} + 2 + 4 - \left((-9) + \frac{9}{2} + 6\right)\right\} =$$

$$= \left\{-\frac{8}{3} + 6 + 9 - \frac{9}{2} - 6\right\} = -\frac{8}{3} + 9 - \frac{9}{2} = \frac{-16 + 54 - 27}{6} = \frac{-16 + 27}{6} = \frac{11}{6}$$

Entonces :

$$A_1 = \frac{11}{6}$$

Calculemos A_2

Como f (x) > 0 entre x = -2 y x = 1

A_2 se obtiene como :

$$A_2 = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} \left[-x^2 - x + 2\right] dx =$$

$$= \left(-\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 2x\right)\Big|_{-2}^{1} =$$

$$= \left\{-\frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 + 2\cdot 1 - \left(-\frac{1}{3}\cdot(-2)^3 - \frac{1}{2}\cdot(-2)^2 + 2\cdot(-2)\right)\right\} =$$

$$= \left\{-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(-\frac{1}{3}\cdot(-8) - \frac{1}{2}\cdot 4 - 4\right)\right\} =$$

$$= \left\{-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right)\right\} =$$

$$= \left\{-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{8}{3} - 6\right)\right\} =$$

$$= \left\{-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 6\right\} =$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{8}{3} + 8 = \frac{-2 - 3 - 16 + 48}{6} = \frac{-21 + 48}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

Entonces :

$$A_2 = \frac{9}{2}$$

Calculemos A_3

Como f (x) < 0 entre x = 1 y x = 3

A_3 se obtiene como :

$$A_3 = \int_1^3 -f(x)\,dx = \int_1^3 -\left[-x^2 - x + 2\right] dx = \int_1^3 \left[x^2 + x - 2\right] dx =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_1^3 =$$

$$= \left\{\frac{1}{3}\cdot 3^3 + \frac{1}{2}\cdot 3^2 - 2\cdot 3 - \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3 + \frac{1}{2}\cdot 1^2 - 2\cdot 1\right)\right\} =$$

$$= \left\{\frac{1}{3}\cdot 27 + \frac{1}{2}\cdot 9 - 6 - \left(\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1 - 2\right)\right\} =$$

$$= \left\{9 + \frac{9}{2} - 6 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right)\right\} =$$

$$= \left\{9 + \frac{9}{2} - 6 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right\} =$$

$$= 9 + \frac{9}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 4 = \frac{9}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 5 = \frac{27 - 2 - 3 + 30}{6} = \frac{22 + 30}{6} = \frac{52}{6} = \frac{26}{3}$$

Entonces :

$$A_3 = \frac{26}{3}$$

Por lo tanto

Área de la región comprendida entre f (x) = $-x^2 - x + 2$ y el eje x para $-3 \le x \le 3$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{11}{6} + \frac{9}{2} + \frac{26}{3} = \frac{11 + 27 + 52}{6} = \frac{90}{6} = 15$$

A = 15

Ej 16 f)

Área de la región comprendida entre

f (x) = $x^2 + 4x + 2$ y g (x) = $-2x^2 + 7x + 8$ para $-2 \le x \le 6$

puntos de f (x) = $x^2 + 4x + 2$:

si x = 0 $\Longrightarrow$ $0^2 + 4\cdot 0 + 2 = 2$ $\Longrightarrow$ $(0, 2)$ ∈ gráf (f)

si x = -2 $\Longrightarrow$ $(-2)^2 + 4(-2) + 2 = 4 - 8 + 2 = -2$ $\Longrightarrow$ $(-2, -2)$ ∈ gráf (f)

si x = 6 $\Longrightarrow$ $6^2 + 4\cdot 6 + 2 = 36 + 24 + 2 = 62$ $\Longrightarrow$ $(6, 62)$ ∈ gráf (f)

puntosf = {{0, 2}, {-2, -2}, {6, 62}}

----

puntos de $g(x) = -2x^2 + 7x + 8$:

si $x = 0 \implies -2 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0 + 8 = 8 \implies (0, 8) \in$ gráf (g)

si $x = -2 \implies -2 \cdot (-2)^2 + 7 \cdot (-2) + 8 = -2 \cdot 4 - 14 + 8 = -14 \implies (-2, -14) \in$ gráf (g)

si $x = 6 \implies -2 \cdot 6^2 + 7 \cdot 6 + 8 = -72 + 42 + 8 = -22 \implies (6, -22) \in$ gráf (g)

puntosg = {{0, 8}, {-2, -14}, {6, -22}}

----

puntos de intersección entre f y g :

$f(x) = x^2 + 4x + 2$

$g(x) = -2x^2 + 7x + 8$

Determinemos los puntos de intersección entre f y g

que serán aquellos en donde $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x) \implies x^2 + 4x + 2 = -2x^2 + 7x + 8$

$3x^2 - 3x - 6 = 0 \implies 3(x^2 - x - 2) = 0$

resolvamos la ecuación cuadrática $x^2 - x - 2 = 0$ para obtener
las abscisas de los puntos de intersección entre f y g :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot (1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} \implies \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \implies x_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{ó} \quad x_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

entonces $x_1 = 2$ ó $x_2 = -1$

por lo tanto las abscisas de los puntos de intersección entre f y g :

son -1 y 2

Calculemos las ordenadas de los puntos de intersección :

reemplazando $x = -1$ y $x = 2$ en $f(x) = x^2 + 4x + 2$

$f(-1) = (-1)^2 + 4(-1) + 2 = 1 - 4 + 2 = -1 \implies P_1 = (-1, -1)$

$f(2) = 2^2 + 4 \cdot 2 + 2 = 4 + 8 + 2 = 14 \implies P_2 = (2, 14)$

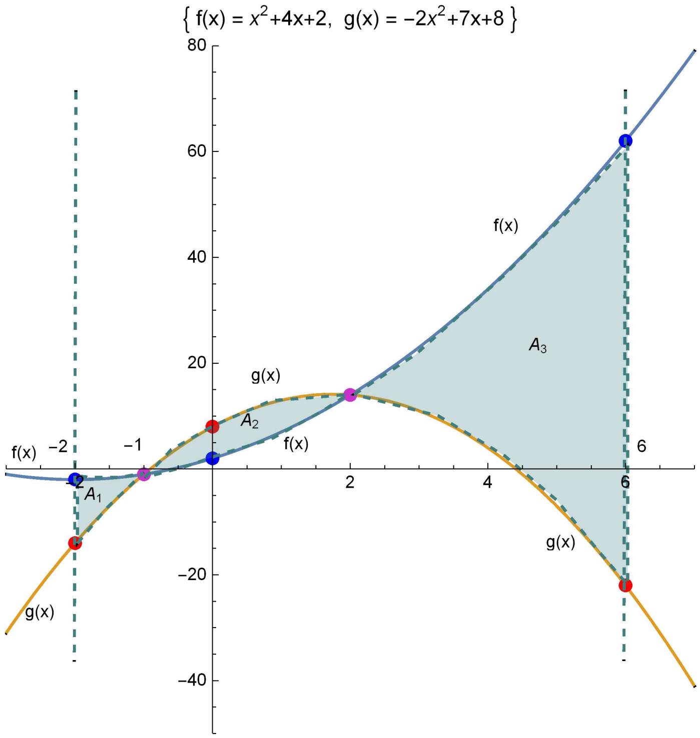
Hasta ahora sabemos que f y g se cortan en

$x = 1$ y en $x = 2$ pero nos piden calcular el área encerrada para $-2 \le x \le 6$

------x---- ------x------------------

-1 2

Gráfico de $f(x)$ y $g(x)$ para ver cuál es el área encerrada entre f y g para $-2 \le x \le 6$



Área de la región comprendida entre

$f(x) = x^2 + 4x + 2$ y $g(x) = -2x^2 + 7x + 8$ para $-2 \le x \le 6$

está formada de tres áreas A_1, A_2 y A_3

Calculemos A_1

Como $f(x) > g(x)$ entre $x = -2$ y $x = -1$

A_1 se obtiene como :

$$A_1 = \int_{-2}^{-1} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-2}^{-1} \left[x^2 + 4x + 2 - \left(-2x^2 + 7x + 8\right)\right] dx =$$

$$= \int_{-2}^{-1} \left(x^2 + 4x + 2 + 2x^2 - 7x - 8\right) dx =$$

$$= \int_{-2}^{-1} \left(3x^2 - 3x - 6\right) dx = 3\int_{-2}^{-1} x^2\, dx - 3\int_{-2}^{-1} x\, dx - 6\int_{-2}^{-1} dx =$$

$$= \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x\right)\Big|_{-2}^{-1} =$$

$$= \left\{(-1)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-1)^2 - 6\cdot(-1) - \left((-2)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-2)^2 - 6\cdot(-2)\right)\right\} =$$

$$= \left\{(-1) - \frac{3}{2}\cdot 1 + 6 - \left((-8) - \frac{3}{2}\cdot 4 + 12\right)\right\} =$$

$$= \left\{-1 - \frac{3}{2} + 6 + 8 + 6 - 12\right\} = -\frac{3}{2} + 7 = \frac{-3 + 14}{2} = \frac{11}{2}$$

Entonces :

$A_1 = \frac{11}{2}$

Calculemos A_2

Como g (x) > f (x) entre x = -1 y x = 2

A_2 se obtiene como :

$$A_2 = \int_{-1}^{2} [g(x) - f(x)]\, dx = \int_{-1}^{2} \left[-2x^2 + 7x + 8 - \left(x^2 + 4x + 2\right)\right] dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} \left[-2x^2 + 7x + 8 - x^2 - 4x - 2\right] dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} \left[-3x^2 + 3x + 6\right] dx =$$

usando los resultados hallados para A_1 :

$$= \left(-x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x\right)\Big|_{-1}^{2} =$$

$$= \left\{-2^3 + \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - \left(-\left(-1\right)^3 + \frac{3}{2} \cdot \left(-1\right)^2 + 6 \cdot \left(-1\right)\right)\right\} =$$

$$= \left\{-8 + \frac{3}{2} \cdot 4 + 12 - \left(1 + \frac{3}{2} - 6\right)\right\} =$$

$$= \left\{-8 + 6 + 12 - \left(\frac{3}{2} - 5\right)\right\} =$$

$$= \left\{10 - \frac{3}{2} + 5\right\} = 15 - \frac{3}{2} = \frac{30 - 3}{2} = \frac{27}{2}$$

Entonces :

$A_2 = \frac{27}{2}$

Calculemos A_3

Como f (x) > g (x) entre x = 2 y x = 6

A_3 se obtiene como :

$$A_3 = \int_{2}^{6} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{2}^{6} \left[x^2 + 4x + 2 - \left(-2x^2 + 7x + 8\right)\right] dx =$$

$$= \int_{2}^{6} \left(x^2 + 4x + 2 + 2x^2 - 7x - 8\right) dx =$$

$$= \int_{2}^{6} \left(3x^2 - 3x - 6\right) dx = 3\int_{2}^{6} x^2\, dx - 3\int_{2}^{6} x\, dx - 6\int_{2}^{6} dx =$$

$$= \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x\right)\Big|_{2}^{6} =$$

$$= \left\{6^3 - \frac{3}{2} \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 - \left(2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 6 \cdot 2\right)\right\} =$$

$= \left\{216 - \frac{3}{2} \cdot 36 - 36 - \left(8 - \frac{3}{2} \cdot 4 - 12\right)\right\} =$

$= \{216 - 54 - 36 - (8 - 6 - 12)\} =$

$= 216 - 54 - 36 - (-10) = 216 - 54 - 36 + 10 = 136$

Entonces :

$A_3 = 136$

Por lo tanto

Área de la región comprendida entre

$f(x) = x^2 + 4x + 2$ y $g(x) = -2x^2 + 7x + 8$ **para** $-2 \le x \le 6$ **es :**

$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{11}{2} + \frac{27}{2} + 136 = \frac{11 + 27 + 272}{2} = \frac{310}{2} = 155$

A = 155

+-+

Ejercicio 17.- Calcular el área de la región limitada por

a. los gráficos de $f(x) = \sqrt{x-5}$, $g(x) = \sqrt{5-x}$ y la recta $y = 2$.

b. los gráficos de $f(x) = \sqrt{10-x}$, $g(x) = \sqrt{x}$ y el eje x.

c. el eje y, la curva $y = \sqrt{x}$ y la recta $y = -x + 6$.

d. las curvas $y = \frac{16}{x^2}$, $x = 4$, $y = 2x$.

e. las curvas $y = \frac{16}{x^2}$, $y = 2x$, $y = 16$.

f. las curvas $y = \sqrt{x-2}$, $y = 2x - 10$ y el eje x.

Ej 17 a)

Área de la región comprendida entre

$f(x) = \sqrt{x - 5}$ **y** $g(x) = \sqrt{5 - x}$ **y la recta** $y = 2$

Observemos que $Dom(f) = [5, +\infty)$ **y** $Dom(g) = (-\infty, 5]$

Cálculos para graficar :

puntos de $f(x) = \sqrt{x - 5}$ **:** $Dom(f) = [5, +\infty)$

si $x = 5 \Longrightarrow \sqrt{5 - 5} = 0 \Longrightarrow (5, 0) \in$ **gráf (f)**

si $x = 6 \Longrightarrow \sqrt{6-5} = \sqrt{1} = 1 \Longrightarrow (6, 1) \in$ gráf (f)

si $x = 9 \Longrightarrow \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = 2 \Longrightarrow (9, 2) \in$ gráf (f)

puntosf = {{5, 0}, {6, 1}, {9, 2}}

----

puntos de g (x) = $\sqrt{5-x}$: Dom (g) = $(-\infty, 5]$

si $x = 5 \Longrightarrow \sqrt{5-5} = 0 \Longrightarrow (5, 0) \in$ gráf (g)

si $x = 4 \Longrightarrow \sqrt{5-4} = \sqrt{1} = 1 \Longrightarrow (4, 1) \in$ gráf (g)

si $x = 1 \Longrightarrow \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2 \Longrightarrow (1, 2) \in$ gráf (g)

puntosg = {{5, 0}, {4, 1}, {1, 2}}

----

puntos de intersección entre f y g :

$f(x) = \sqrt{x-5}$

$g(x) = \sqrt{5-x}$

Determinemos los puntos de intersección entre f y g

que serán aquellos en donde f (x) = g (x)

$f(x) = g(x) \Longrightarrow \sqrt{x-5} = \sqrt{5-x}$ elevamos al cuadrado ambos miembros

$$\left(\sqrt{x-5}\right)^2 = \left(\sqrt{5-x}\right)^2 \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow x - 5 = 5 - x$ (no ponemos módulo pues las raíces cuadradas están definidas)

$\Longrightarrow 2x = 10$

$\Longrightarrow x = 5$

por lo tanto la abscisa del punto de intersección entre f y g :

es 5

Calculemos la ordenada del punto de intersección :

reemplazando $x = 5$ en $f(x) = \sqrt{x-5}$

$f(5) = \sqrt{5-5} = 0 \Longrightarrow P = (5, 0)$

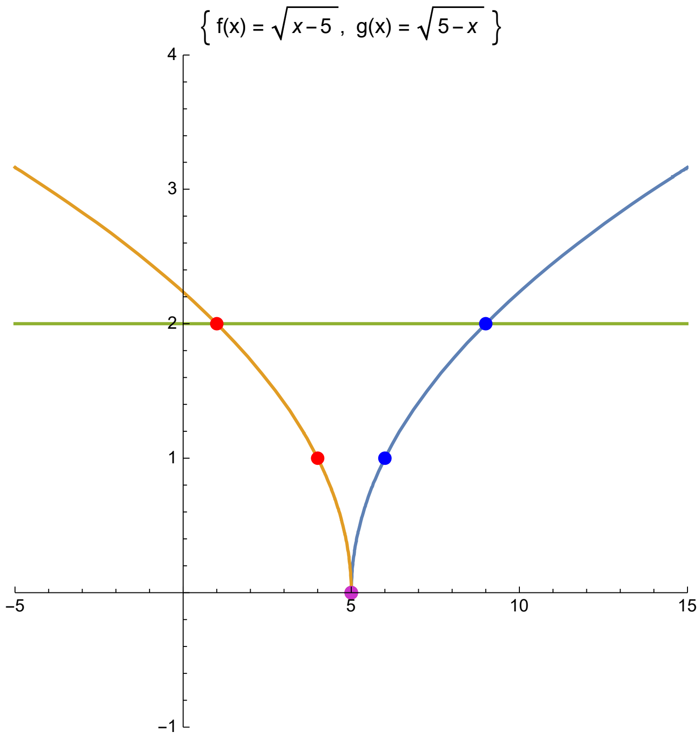
Hasta ahora sabemos que f y g se cortan en

x = 5

----------------x------------------

5

Gráfico de f (x) y g (x) para ver cuál es el área encerrada entre f y g y la recta y = 2



Nos faltaría determinar los puntos en donde tanto f (x) como g (x) se cortan con la recta y = 2

$f(x) = 2 \implies \sqrt{x-5} = 2 \implies$ **elevando al cuadrado ambos miembros :**

$\left(\sqrt{x-5}\right)^2 = 2^2 \implies x - 5 = 4 \implies x = 9$

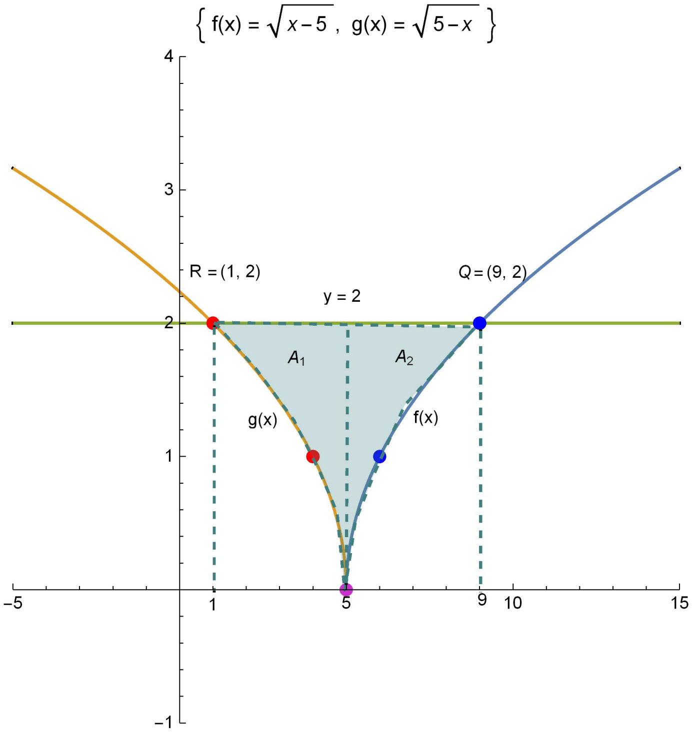
f (x) se corta con y = 2 en el punto Q = $(9, 2)$

Por su parte g (x) se corta con la recta y = 2 en :

$g(x) = 2 \implies \sqrt{5-x} = 2 \implies$ **elevando al cuadrado ambos miembros :**

$\left(\sqrt{5-x}\right)^2 = 2^2 \implies 5 - x = 4 \implies x = 1$

g (x) se corta con y = 2 en el punto R = $(1, 2)$



Área de la región comprendida entre

$f(x) = \sqrt{x-5}$ **y** $g(x) = \sqrt{5-x}$ **y la recta** $y = 2$

está formada de dos áreas A_1 **y** A_2

Calculemos A_1 $\left(\text{si se considera } h(x) = 2, \text{ habrá que integrar } h(x) - f(x)\right)$

Como $2 > g(x)$ **entre** $x = 1$ **y** $x = 5$

A_1 **se obtiene como :**

$$A_1 = \int_1^5 [h(x) - g(x)]\, dx = \int_1^5 \left[2 - \sqrt{5-x}\right] dx =$$

$$= \int_1^5 2\, dx - \int_1^5 \sqrt{5-x}\, dx = \qquad (*)$$

----

usamos sustitución para resolver la integral indefinida $\int (5-x)^{\frac{1}{2}} dx$

$$\int (5-x)^{\frac{1}{2}} dx$$

llamamos

$u = 5 - x \implies du = u'\, dx = (-1)\, dx \implies -du = dx$

sustituyendo :

$$\int (5-x)^{\frac{1}{2}} dx = \int u^{\frac{1}{2}} (-du) = -\int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3} (5-x)^{\frac{3}{2}}$$

----

la otra integral en (*) es sencilla de resolver:

$$\int 2\, dx = 2\, x$$

----

reemplazando en (*):

$$= \int_1^5 2\, dx - \int_1^5 \sqrt{5 - x}\, dx =$$

$$= \left(2\, x - \left(-\frac{2}{3}\,(5 - x)^{\frac{3}{2}}\right)\right)\Big|_1^5 =$$

$$= \left\{2 \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot (5 - 5)^{\frac{3}{2}} - \left(2 \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot (5 - 1)^{\frac{3}{2}}\right)\right\} =$$

$$= \left\{10 + \frac{2}{3} \cdot (0)^{\frac{3}{2}} - \left(2 + \frac{2}{3} \cdot (4)^{\frac{3}{2}}\right)\right\} =$$

$$= \left\{10 + 0 - \left(2 + \frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{4}\right)^3\right)\right\} =$$

$$= \left\{10 - \left(2 + \frac{2}{3} \cdot (2)^3\right)\right\} =$$

$$= \left\{10 - \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 8\right)\right\} =$$

$$= \left\{10 - \left(2 + \frac{16}{3}\right)\right\} =$$

$$= 10 - 2 - \frac{16}{3} = 8 - \frac{16}{3} = \frac{24 - 16}{3} = \frac{8}{3}$$

Entonces :

$$A_1 = \frac{8}{3}$$

Calculemos A_2 (si se considera h (x) = 2, habrá que integrar h (x) - f (x))

Como $2 > f\,(x)$ entre $x = 5$ y $x = 9$

A_2 se obtiene como :

$$A_2 = \int_5^9 [2 - f\,(x)]\, dx = \int_5^9 \left[2 - \sqrt{x - 5}\,\right] dx =$$

$$= \int_5^9 2\, dx - \int_5^9 \sqrt{x - 5}\, dx = \qquad (**)$$

----

usamos sustitución para resolver la integral indefinida $\int (x - 5)^{\frac{1}{2}}\, dx$

$$\int (x - 5)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

llamamos

$$u = x - 5 \quad \Longrightarrow \quad du = u'\, dx = 1\, dx \quad \Longrightarrow \quad du = dx$$

sustituyendo :

$$\int (x-5)^{\frac{1}{2}}\, dx = \int u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (x-5)^{\frac{3}{2}}$$

----

la otra integral en (**) es sencilla de resolver :

$$\int 2\, dx = 2x$$

----

reemplazando en (**) :

$$= \int_5^9 2\, dx - \int_5^9 \sqrt{x-5}\, dx =$$

$$= \left(2x - \frac{2}{3}(x-5)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_5^9 =$$

$$= \left\{2 \cdot 9 - \frac{2}{3} \cdot (9-5)^{\frac{3}{2}} - \left(2 \cdot 5 - \frac{2}{3} \cdot (5-5)^{\frac{3}{2}}\right)\right\} =$$

$$= \left\{18 - \frac{2}{3} \cdot (4)^{\frac{3}{2}} - \left(10 - \frac{2}{3} \cdot (0)^{\frac{3}{2}}\right)\right\} =$$

$$= \left\{18 - \frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{4}\right)^3 - (10-0)\right\} =$$

$$= \left\{18 - \frac{2}{3} \cdot (2)^3 - 10\right\} =$$

$$= 8 - \frac{2}{3} \cdot 8 =$$

$$= 8 - \frac{16}{3} = \frac{24-16}{3} = \frac{8}{3}$$

Entonces :

$$A_2 = \frac{8}{3}$$

Por lo tanto

Área de la región comprendida entre

$f(x) = \sqrt{x-5}$ y $g(x) = \sqrt{5-x}$ y la recta $y = 2$ es :

$$A = A_1 + A_2 = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$A = \frac{16}{3}$$

Ej 17 c)

Área de la región comprendida entre

el eje y, la curva $f(x) = \sqrt{x}$ y la recta $y = g(x) = -x + 6$

Observemos que $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$

Cálculos para graficar :

puntos de $f(x) = \sqrt{x}$: $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$

si $x = 0 \implies \sqrt{0} = 0 \implies (0, 0) \in$ gráf (f)

si $x = 4 \implies \sqrt{4} = 2 \implies (4, 2) \in$ gráf (f)

si $x = 9 \implies \sqrt{9} = 3 \implies (9, 3) \in$ gráf (f)

puntosf = {{0, 0}, {4, 2}, {9, 3}}

----

puntos de $g(x) = -x + 6$: $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$

si $x = 0 \implies -0 + 6 = 6 \implies (0, 6) \in$ gráf (g)

si $x = 6 \implies -6 + 6 = 0 \implies (6, 0) \in$ gráf (g)

puntosg = {{0, 6}, {6, 0}}

----

puntos de intersección entre f y g :

$f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = -x + 6$

Determinemos los puntos de intersección entre f y g

que serán aquellos en donde $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x) \implies \sqrt{x} = -x + 6$ elevamos al cuadrado ambos miembros

$\left(\sqrt{x}\right)^2 = (-x + 6)^2 \implies$

$\implies x = x^2 - 12x + 36$ (no ponemos módulo pues la raíz cuadrada ya está definida)

$\implies 0 = x^2 - 13x + 36$

resolvamos la ecuación cuadrática $x^2 - 13x + 36 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} \implies \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm 5}{2} \implies x_1 = \frac{13 + 5}{2} = \frac{18}{2} = 9 \quad ó \quad x_2 = \frac{13 - 5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

entonces $x_1 = 9$ ó $x_2 = 4$

por lo tanto las abscisas de los puntos de intersección entre f y g :

son $x = 9$ y $x = 4$

Calculemos las ordenadas de los puntos de intersección :

reemplazando $x = 9$ en $g(x) = -x + 6$

$g(9) = -9 + 6 = -3 \quad \Longrightarrow \quad P_1 = (9, -3)$

pero este punto P_1 no sirve pues $f(x) = \sqrt{x} > 0$

esta solución espuria aparece por haber elevado al cuadrado para encontrar los x tal que $f(x) = g(x)$ y es la intersección de $-\sqrt{x}$ con $g(x)$

Veamos con la otra abscisa :

reemplazando $x = 4$ en $g(x) = -x + 6$

$g(4) = -4 + 6 = 2 \quad \Longrightarrow \quad P_2 = (4, 2)$

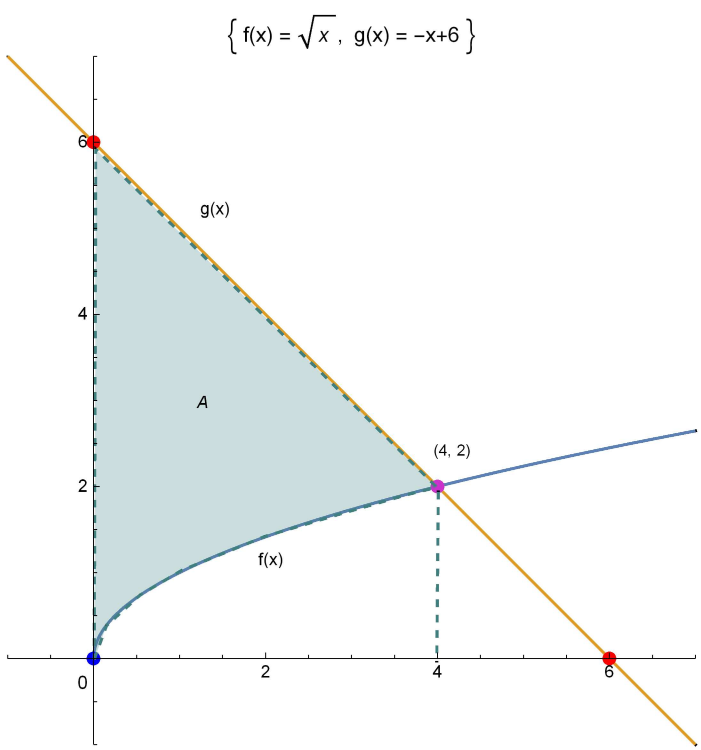
Hasta ahora sabemos que f y g se cortan en

$x = 4$

--------x--------

4

Gráfico de $f(x)$ y $g(x)$ para ver cuál es el área encerrada entre el eje y, la curva $f(x) = \sqrt{x}$ y la recta $y = g(x) = -x + 6$



--

A es elárea de la región comprendida entre

el eje y, la curva $f(x) = \sqrt{x}$ y la recta $y = g(x) = -x + 6$

Calculemos A

Como $g(x) > f(x)$ entre $x = 0$ y $x = 4$

A se obtiene como :

$$A = \int_0^4 [g(x) - f(x)]\, dx = \int_0^4 \left[-x + 6 - \sqrt{x}\right] dx =$$

$$= \int_0^4 (-x + 6)\, dx - \int_0^4 \sqrt{x}\, dx = \quad (*)$$

Calculemos las integrales indefinidas $\int (-x + 6)\, dx$ y $\int \sqrt{x}\, dx$

$$\int (-x + 6)\, dx = -\frac{1}{2} x^2 + 6x$$

$$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

----

reemplazando en (*) :

$$= \int_0^4 (-x + 6)\, dx - \int_0^4 \sqrt{x}\, dx =$$

$$= \left(-\frac{1}{2} x^2 + 6x - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^4 =$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 6 \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}}\right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 - \frac{2}{3} \cdot 0^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \left(-8 + 24 - \frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{4}\right)^3\right) - 0 =$$

$$= 16 - \frac{2}{3} \cdot (2)^3 = 16 - \frac{2}{3} \cdot 8 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3} \cdot 16 = \frac{32}{3} > 0$$

Por lo tanto

Área de la región comprendida entre

el eje y, la curva $f(x) = \sqrt{x}$ y la recta $y = g(x) = -x + 6$ es :

$$A = \frac{32}{3}$$

Ej 17 f)

Área de la región comprendida entre

las curvas $y = \sqrt{x - 2}$, $y = 2x - 10$ y el eje x

llamemos :

$f(x) = \sqrt{x-2}$ Dom $(f) = [2, +\infty)$

$g(x) = 2x - 10$ Dom $(g) = \mathbb{R}$

Cálculos para graficar :

puntos de $f(x) = \sqrt{x-2}$: Dom $(f) = [2, +\infty)$

si $x = 2 \implies \sqrt{2-2} = 0 \implies (2, 0) \in$ gráf (f)

si $x = 3 \implies \sqrt{3-2} = \sqrt{1} = 1 \implies (3, 1) \in$ gráf (f)

si $x = 6 \implies \sqrt{6-2} = \sqrt{4} = 2 \implies (6, 2) \in$ gráf (f)

puntosf = {{2, 0}, {3, 1}, {6, 2}}

----

puntos de $g(x) = 2x - 10$: Dom $(g) = \mathbb{R}$

si $x = 0 \implies 2x - 10 = -10 \implies (0, -10) \in$ gráf (g)

si $x = 5 \implies 2 \cdot 5 - 10 = 0 \implies (5, 0) \in$ gráf (g)

puntosg = {{0, -10}, {5, 0}}

----

puntos de intersección entre f y g :

$f(x) = \sqrt{x-2}$

$g(x) = 2x - 10$

Determinemos los puntos de intersección entre f y g

que serán aquellos en donde $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x) \implies \sqrt{x-2} = 2x - 10$ **elevamos al cuadrado ambos miembros**

$\left(\sqrt{x-2}\right)^2 = (2x - 10)^2 \implies$

$\implies x - 2 = 4x^2 - 40x + 100$

(no ponemos módulo pues la raíz cuadrada está definida para $x \geq 2$**)**

$\implies 0 = 4x^2 - 41x + 102$

veamos si tiene solución esta ecuación cuadrática :

$b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-41)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 102 = 1681 - 1632 = 49 > 0$ **tiene 2 soluciones**

resolvamos la ecuación cuadrática $4x^2 - 41x + 102 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-(-41) \pm \sqrt{(-41)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 102}}{2 \cdot 4} = \frac{41 \pm \sqrt{49}}{8} \implies$$

$$x_{1,2} = \frac{41 \pm 7}{8} \implies x_1 = \frac{41+7}{8} = \frac{48}{8} = 6 \quad \text{ó} \quad x_2 = \frac{41-7}{8} = \frac{34}{8} = \frac{17}{4}$$

entonces $x_1 = 6$ **ó** $x_2 = \frac{17}{4}$

por lo tanto las abscisas de los puntos de intersección entre f y g :

son 6 **y** $\frac{17}{4}$

Calculemos las ordenadas de los puntos de intersección :

reemplazando $x = 6$ **en** $g(x) = 2x - 10$

$$g(6) = 2 \cdot 6 - 10 = 2 \implies P_1 = (6, 2)$$

----

reemplazando $x = \frac{17}{4}$ **en** $g(x) = 2x - 10$

$$g\left(\frac{17}{4}\right) = 2 \cdot \frac{17}{4} - 10 = \frac{17}{2} - 10 = \frac{17-20}{2} = -\frac{3}{2} \implies P_2 = \left(\frac{17}{4}, -\frac{3}{2}\right)$$

pero este punto P_2 **no sirve pues** $f(x) = \sqrt{x-2} \geq 0$

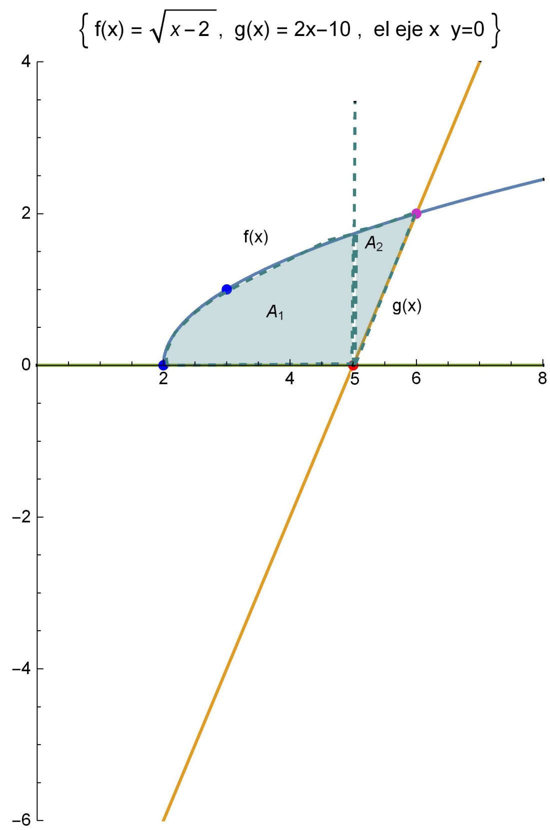
esta solución espuria aparece por haber elevado al cuadrado para encontrar los x tal que $f(x) = g(x)$ **y es la intersección de** $-\sqrt{x-2}$ **con** $g(x)$

Hasta ahora sabemos que f y g se cortan en

$x = 6$

```
------------------x---- ----------
                  6
```

Gráfico de $f(x)$ **y** $g(x)$ **para ver cuál es el área encerrada entre las curvas** $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = 2x - 10$ **y el eje x : la recta** $y = 0$



Área de la región comprendida entre

las curvas $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = 2x - 10$ **y el eje x : la recta** $y = 0$

está formada por dos áreas A_1 **y** A_2

Calculemos A_1

Como $f(x) > 0$ **entre** $x = 2$ **y** $x = 5$

A_1 **se obtiene como :**

$$A_1 = \int_2^5 f(x)\,dx = \int_2^5 \sqrt{x-2}\,dx = \quad (*):$$

----

usamos sustitución para resolver la integral indefinida $\int (x-2)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$$\int (x-2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

llamamos

$u = x - 2 \implies du = u'\,dx = 1\,dx \implies du = dx$

sustituyendo :

$$\int (x-2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{2}{3}\,u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\,(x-2)^{\frac{3}{2}}$$

----

reemplazando en (*):

$$= \int_2^5 \sqrt{x-2}\ dx =$$

$$= \frac{2}{3}\ (x-2)^{\frac{3}{2}} \Big|_2^5 =$$

$$= \left\{\frac{2}{3} \cdot (5-2)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{2}{3} \cdot (2-2)^{\frac{3}{2}}\right)\right\} =$$

$$= \left\{\frac{2}{3} \cdot (3)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{2}{3} \cdot (0)^{\frac{3}{2}}\right)\right\} =$$

$$= \left\{\frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^3 - 0\right\} = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \ > \ 0$$

Entonces :

$A_1 = 2\sqrt{3}$

Calculemos A_2

Como $f(x) > g(x)$ entre $x = 5$ y $x = 6$

A_2 se obtiene como :

$$A_2 = \int_5^6 [f(x) - g(x)]\ dx = \int_5^6 \left[\sqrt{x-2} - (2x-10)\right] dx =$$

$$= \int_5^6 \sqrt{x-2}\ dx - \int_5^6 (2x-10)\ dx = \quad (**)$$

----

usamos el resultado obtenido en el cálculo de A_1 parala integral indefinida $\int (x-5)^{\frac{1}{2}}\ dx$

la integral indefinida $\int (x-1)^{\frac{1}{2}}\ dx = \frac{2}{3}\ (x-2)^{\frac{3}{2}}$

----

la otra integral en (**) es sencilla de resolver :

$$\int (2x-10)\ dx = \int 2x\,dx - 10\int dx = 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 - 10x = x^2 - 10x$$

----

reemplazando en (**) :

$$= \int_5^6 \sqrt{x-2}\ dx - \int_5^6 (2x-10)\ dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot (x-2)^{\frac{3}{2}} - x^2 + 10x\right) \Big|_5^6 =$$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot (6-2)^{\frac{3}{2}} - 6^2 + 10 \cdot 6\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot (5-2)^{\frac{3}{2}} - 5^2 + 10 \cdot 5\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot (4)^{\frac{3}{2}} - 36 + 60\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot (3)^{\frac{3}{2}} - 25 + 50\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{4}\right)^3 + 24\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^3 + 25\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot (2)^3 + 24\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} + 25\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot 8 + 24\right) - \left(2\sqrt{3} + 25\right) =$$

$$= \frac{16}{3} + 24 - 2\sqrt{3} - 25 = \frac{16}{3} - 2\sqrt{3} - 1 =$$

$$= \frac{16 - 6\sqrt{3} - 3}{3} = \frac{13 - 6\sqrt{3}}{3} = \frac{13}{3} - 2\sqrt{3} \;\; > \;\; 0$$

Entonces :

$$A_2 = \frac{13}{3} - 2\sqrt{3}$$

Por lo tanto

Área de la región comprendida entre

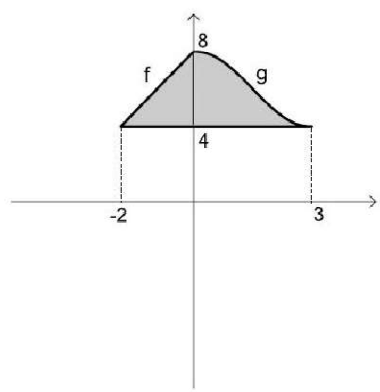
las curvas $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = 2x - 10$ **y el eje x : la recta** $y = 0$

$$A = A_1 + A_2 = 2\sqrt{3} + \frac{13}{3} - 2\sqrt{3} = \frac{13}{3}$$

$$A = \frac{13}{3}$$

+-+

Ejercicio 18.- Sabiendo que el área de la región sombreada vale 10, calcular $\int_0^3 g(x)dx$.



Ej 18

Sabiendo que el el área sombreada es 10, se pide calcular $\int_0^3 g(x)\,dx$

Observemos del gráfico que la recta horizontal $y = 4$ **delimita por debajo el área encerrada**

Llamemos h (x) = y = 4 a esta recta horizontal

El área de la región sombreada A es :

$$A = \int_{-2}^{0} [f(x) - h(x)]\, dx + \int_{0}^{3} [g(x) - h(x)]\, dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} [f(x) - 4]\, dx + \int_{0}^{3} [g(x) - 4]\, dx = \int_{-2}^{0} f(x)\, dx - \int_{-2}^{0} 4\, dx + \int_{0}^{3} g(x)\, dx - \int_{0}^{3} 4\, dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{3} g(x)\, dx - \int_{-2}^{0} 4\, dx - \int_{0}^{3} 4\, dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{3} g(x)\, dx - \int_{-2}^{3} 4\, dx = \quad (*)$$

pero $\int_{-2}^{3} 4\, dx =$ **área del rectángulo debajo de** $h(x) = y = 4$ **y el eje x que tiene área** $5 \times 4 = 20$

Entonces : reemplazando en (*)

$$A = \int_{-2}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{3} g(x)\, dx - 20 = 10$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{0}^{3} g(x)\, dx = 10 + 20 - \int_{-2}^{0} f(x)\, dx \qquad (*)$$

Solo resta calcular $\int_{-2}^{0} f(x)\, dx$

Como esta integral es el área entre f (x) y el eje x y está formada por

un rectángulo de área 8 (**base 2 entre** $x = -2$ **y** $x = 0$ **y altura 4 entre** $y = 0$ **e** $y = 4$)

más un triángulo de área 4 $\left(\text{base 2 y altura 4 , área triángulo} = \frac{b \times h}{2}\right)$

Entonces : $\int_{-2}^{0} f(x)\, dx = 8 + 4 = 12$

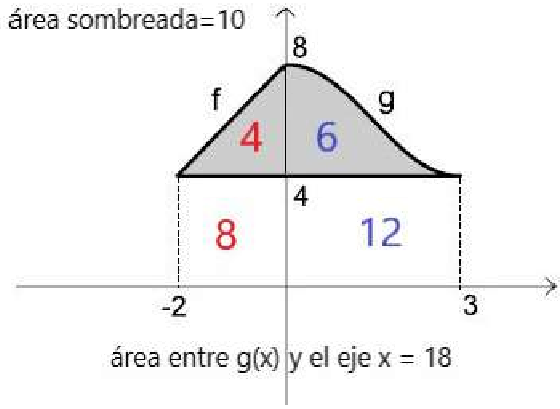
Reemplazando en (*) :

$$\int_{0}^{3} g(x)\, dx = 10 + 20 - \int_{-2}^{0} f(x)\, dx \qquad (*)$$

$$\int_{0}^{3} g(x)\, dx = 10 + 20 - 12 = 18$$

Por lo tanto :

$$\int_{0}^{3} g(x)\, dx = 18$$



También se puede pensar así :

El área sombreada es 10

El área del rectángulo debajo de y = 4 y el eje x entre - 2 y 3 es 20

El área total encerrada entre f y g y el eje x es 30

Se calcula f (x) a partir de los puntos P = (- 2, 4) y Q = (0, 8)

Se calcula $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} (2x+8)\,dx = \left(x^2+8x\right)\Big|_{-2}^{0} = 12$

Entonces $\int_{0}^{3} g(x)\,dx = \text{Área total} - \int_{-2}^{0} f(x)\,dx = 30 - 12 = 18$

Cálculo auxiliar :

Observemos que f (x) es lineal y pasa por los puntos P = (- 2, 4) y Q = (0, 8)

Q es el punto en el que f (x) corta al eje y entonces 8 es la ordenada al origen de f (x)

Es decir :

$f(x) = mx + b$ **tiene** $b = 8 \implies f(x) = mx + 8$

falta determinar m :

como $f(-2) = 4$ **reemplazando en** $f(x) = mx + 8$ **se obtiene m :**

$f(-2) = m(-2) + 8 = 4 \implies -2m = 4 - 8 \implies -2m = -4 \implies m = 2$

Luego $f(x) = 2x + 8$

Con esta f (x) calculemos ahora la integral $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$ **:**

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} (2x+8)\,dx = \int_{-2}^{0} 2x\,dx + \int_{-2}^{0} 8\,dx = \left(x^2+8x\right)\Big|_{-2}^{0} =$$

$$= \left(0^2 + 8\cdot 0\right) - \left((-2)^2 + 8\cdot(-2)\right) = 0 - (4 - 16) = -(-12) = 12$$

Resolver Ejercicios Surtidos Práctica 6 : 1, 3, 5, 6 a, 6 e, 6 f, 6 n, 7 y 8 b

+-+

PRÁCTICA 6

EJERCICIOS SURTIDOS

Ejercicio 1.- Calcular el área de la región encerrada entre las curvas $y=\sqrt{x+9}$, $y=2$ y el eje y.

Ej Surt 1

Área de la región comprendida entre

el eje y, la curva $f(x) = \sqrt{x+9}$ y la recta horizontal $y = g(x) = 2$

Observemos que $\text{Dom}(f) = [-9, +\infty)$

Cálculos para graficar :

puntos de $f(x) = \sqrt{x+9}$: $\text{Dom}(f) = [-9, +\infty)$

si $x = -9 \implies \sqrt{-9+9} = 0 \implies (-9, 0) \in$ gráf (f)

si $x = -5 \implies \sqrt{-5+9} = \sqrt{4} = 2 \implies (-5, 2) \in$ gráf (f)

si $x = 0 \implies \sqrt{0+9} = \sqrt{9} = 3 \implies (0, 3) \in$ gráf (f)

puntosf = {{-9, 0}, {-5, 2}, {0, 3}}

----

puntos de $g(x) = 2$: $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$

si $x = -9 \implies (-9, 2) \in$ gráf (g)

si $x = -5 \implies (-5, 2) \in$ gráf (g)

si $x = 0 \implies (0, 2) \in$ gráf (g)

puntosg = {{-9, 2}, {-5, 2}, {0, 2}}

----

puntos de intersección entre f y g :

$f(x) = \sqrt{x+9}$

$g(x) = 2$

Determinemos los puntos de intersección entre f y g

que serán aquellos en donde f (x) = g (x)

f (x) = g (x) $\Longrightarrow$ $\sqrt{x+9} = 2$ elevamos al cuadrado ambos miembros

$\left(\sqrt{x+9}\right)^2 = 2^2$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ $x + 9 = 4$ (no ponemos módulo pues la raíz cuadrada ya está definida para $[-9, +\infty)$)

$\Longrightarrow$ $x = 4 - 9 = -5$

por lo tanto la abscisa del punto de intersección entre f y g :

es $x = -5$

Calculemos la ordenada de punto de intersección :

reemplazando $x = -5$ en $f(x) = \sqrt{x+9}$

$g(-5) = \sqrt{-5+9} = \sqrt{4} = 2$ $\Longrightarrow$ $P = (-5, 2)$

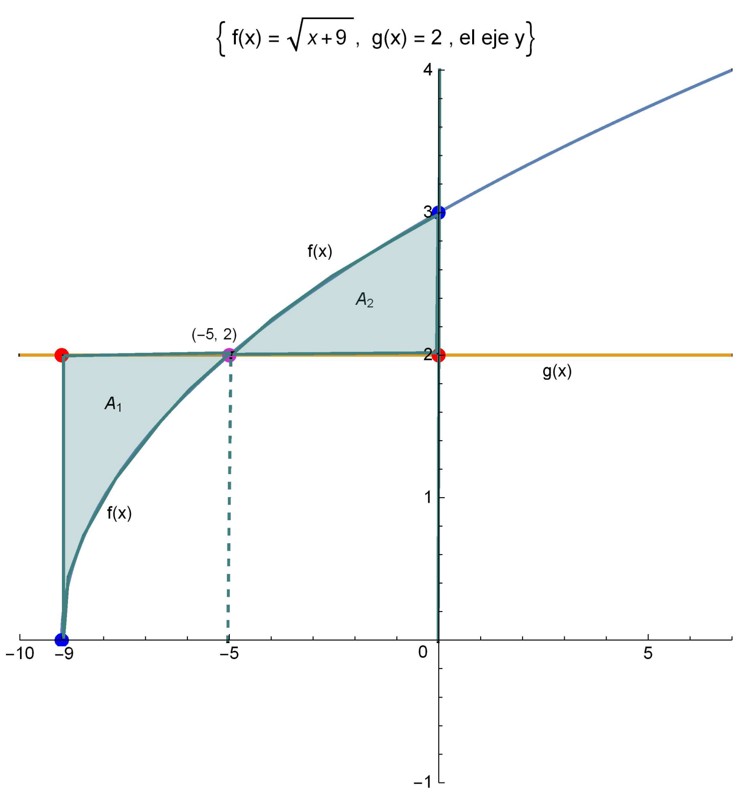
Hasta ahora sabemos que $(x) = \sqrt{x+9}$ y $g(x) = 2$ se cortan en

$x = -5$

--------x--------

-5

Gráfico de f (x) y g (x) para ver cuál es el área encerrada entre
el eje y, la curva $f(x) = \sqrt{x+9}$ y la recta horizontal $y = g(x) = 2$



A es el área de la región comprendida entre

el eje y, la curva $f(x) = \sqrt{x+9}$ y la recta horizontal $y = g(x) = 2$

A está formada por A_1 y A_2 tal que $A = A_1 + A_2$

Calculemos A_1

Como $g(x) > f(x)$ entre $x = -9$ y $x = -5$

A_1 se obtiene como :

$$A_1 = \int_{-9}^{-5} [g(x) - f(x)]\, dx = \int_{-9}^{-5} \left[2 - \sqrt{x+9} \right] dx =$$

$$= \int_{-9}^{-5} 2\, dx - \int_{-9}^{-5} \sqrt{x+9}\, dx = \quad (*)$$

Calculemos las integrales indefinidas $\int 2\, dx$ y $\int \sqrt{x+9}\, dx$

la primera es sencilla : $\int 2\, dx = 2 \int dx = 2x$

Para la segunda integral : $\int \sqrt{x+9}\, dx$ usamos sustitución

llamamos $u = x + 9 \implies du = u'\, dx = 1 \cdot dx \implies du = dx$

sustituyendo :

$$\int \sqrt{x+9}\, dx = \int (x+9)^{\frac{1}{2}} dx = \int u^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (x+9)^{\frac{3}{2}}$$

----

reemplazando en (*) :

$$= \int_{-9}^{-5} 2\, dx - \int_{-9}^{-5} \sqrt{x+9}\, dx = 2x \Big|_{-9}^{-5} - \frac{2}{3} (x+9)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-9}^{-5} =$$

$$= \left(2x - \frac{2}{3} (x+9)^{\frac{3}{2}}\right) \Big|_{-9}^{-5} =$$

$$= \left(2 \cdot (-5) - \frac{2}{3} \cdot (-5+9)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(2 \cdot (-9) - \frac{2}{3} \cdot (-9+9)^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= (-10) - \frac{2}{3} \cdot (4)^{\frac{3}{2}} - \left(-18 - \frac{2}{3} \cdot (0)^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= -10 - \frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{4}\right)^3 - (-18 - 0) =$$

$$= -10 - \frac{2}{3} \cdot (2)^3 + 18 =$$

$$= -\frac{2}{3} \cdot 8 + 8 = -\frac{16}{3} + 8 = \frac{-16+24}{3} = \frac{8}{3} > 0$$

Entonces :

$A_1 = \frac{8}{3}$

Calculemos A_2

Como $f(x) > g(x)$ entre $x = -5$ y $x = 0$

A_2 se obtiene como :

$$A_2 = \int_{-5}^{0} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-5}^{0} \left[\sqrt{x+9} - 2\right] dx =$$

$$= \int_{-5}^{0} \sqrt{x+9}\, dx - \int_{-5}^{0} 2\, dx = \quad (*)$$

----

usamos los resultados obtenidos en el cálculo de A_1

de las integrales indefinidas $\int \sqrt{x+9}\, dx$ y $\int 2\, dx$

$$\int \sqrt{x+9}\, dx = \frac{2}{3} (x+9)^{\frac{3}{2}}$$

$$\int 2\, dx = 2x$$

----

reemplazando en (*)

$$= \int_{-5}^{0} \sqrt{x+9}\, dx - \int_{-5}^{0} 2\, dx = \frac{2}{3} (x+9)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-5}^{0} - 2x \Big|_{-5}^{0} =$$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot (x+9)^{\frac{3}{2}} - 2 \cdot x\right) \Big|_{-5}^{0} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot (0+9)^{\frac{3}{2}} - 2 \cdot 0 - \left(\frac{2}{3} \cdot (-5+9)^{\frac{3}{2}} - 2 \cdot (-5)\right) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot (9)^{\frac{3}{2}} - 0 - \left(\frac{2}{3} \cdot (4)^{\frac{3}{2}} + 10\right) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{9}\right)^3 - \left(\frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{4}\right)^3 + 10\right) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot (3)^3 - \left(\frac{2}{3} \cdot (2)^3 + 10\right) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 27 - \left(\frac{2}{3} \cdot 8 + 10\right) =$$

$$= 18 - \frac{16}{3} - 10 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{24 - 16}{3} = \frac{8}{3} > 0$$

Entonces :

$A_2 = \frac{8}{3}$

Por lo tanto

Área de la región comprendida entre

el eje y, la curva f (x) = $\sqrt{x+9}$ y la recta horizontal y = g (x) = 2 es :

$A = A_1 + A_2 = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$

$A = \frac{16}{3}$

+-+

Ejercicio 3.- Calcular el área de la región limitada por los gráficos de $f(x) = \frac{6}{x}$,

$g(x) = x+1$ y $h(x) = x-1$.

Ej Surt 3

Área de la región limitada por los gráficos de

$f(x) = \frac{6}{x}$, $g(x) = x+1$ y $h(x) = x-1$

Observemos que $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, $Dom(g) = \mathbb{R} = Dom(h)$

$f(x) = \frac{6}{x}$: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

f (x) es una hipérbola del tipo $\frac{1}{x}$

f (x) tiene :

AV en x = 0

AH en y = 0

Cálculos para graficar :

puntos de $f(x) = \frac{6}{x}$

$si\ x = 1 \Longrightarrow \frac{6}{1} = 6 \Longrightarrow (1, 6) \in gráf(f)$

$si\ x = 6 \Longrightarrow \frac{6}{6} = 1 \Longrightarrow (6, 1) \in gráf(f)$

$si\ x = -1 \Longrightarrow \frac{6}{-1} = -6 \Longrightarrow (-1, -6) \in gráf(f)$

puntosf = {{1, 6}, {6, 1}, {-1, -6}}

----

puntos de g (x) = x + 1

si $x = 0 \implies 0 + 1 = 1 \implies (0, 1) \in$ gráf (g)

si $x = -1 \implies -1 + 1 = 0 \implies (-1, 0) \in$ gráf (g)

puntosg = {{0, 1}, {-1, 0}}

----

puntos de h (x) = x - 1

si $x = 0 \implies 0 - 1 = -1 \implies (0, -1) \in$ gráf (h)

si $x = 1 \implies 1 - 1 = 0 \implies (1, 0) \in$ gráf (h)

puntosh = {{0, -1}, {1, 0}}

----

puntos de intersección entre f y g , entre f y h :

$$f(x) = \frac{6}{x}$$

$$g(x) = x + 1$$

Determinemos los puntos de intersección entre f y g

que serán aquellos en donde f (x) = g (x)

$$f(x) = g(x) \implies \frac{6}{x} = x + 1 \implies 6 = x^2 + x \implies 0 = x^2 + x - 6$$

como $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 > 0 \implies$ tiene 2 raíces reales

resolvamos la ecuación cuadrática $x^2 + x - 6 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \implies x_1 = \frac{-1 + 5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{ó} \quad x_2 = \frac{-1 - 5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

entonces $x_1 = 2$ ó $x_2 = -3$

$\implies$ $x = 2$ y $x = -3$ son las abscisas de los puntos de intersección entre f y g

----

Calculemos las ordenadas de los puntos de intersección entre f y g :

reemplazando $x = 2$ en $f(x) = \frac{6}{x}$

$$f(2) = \frac{6}{2} = 3 \implies P_1 = (2, 3)$$

----

reemplazando $x = -3$ en $f(x) = \frac{6}{x}$

$f\left(-3\right) = \dfrac{6}{-3} = -2 \quad \Longrightarrow \quad P_2 = \left(-3, -2\right)$

Hasta ahora sabemos que $(x) = \dfrac{6}{x}$ y $g(x) = x + 1$ se cortan en

$x = 2$ y $x = -3$

--------x------------x--------

-3 2

Determinemos los puntos de intersección entre f y h

que serán aquellos en donde $f(x) = h(x)$

$f(x) = h(x) \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{6}{x} = x - 1 \quad \Longrightarrow \quad 6 = x^2 - x \quad \Longrightarrow \quad 0 = x^2 - x - 6$

como $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = \left(-1\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-6\right) = 1 + 24 = 25 > 0 \quad \Longrightarrow$ tiene 2 raíces reales

resolvamos la ecuación cuadrática $x^2 - x - 6 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-\left(-1\right) \pm \sqrt{\left(-1\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-6\right)}}{2 \cdot 1} = \frac{-\left(-1\right) \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{ó} \quad x_2 = \frac{1 - 5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

entonces $x_1 = 3$ ó $x_2 = -2$

$\Longrightarrow \quad x = 3$ y $x = -2$ son las abscisas de los puntos de intersección entre f y h

----

Calculemos las ordenadas de los puntos de intersección entre f y h :

reemplazando $x = 3$ en $f(x) = \dfrac{6}{x}$

$f\left(3\right) = \dfrac{6}{3} = 2 \quad \Longrightarrow \quad P_3 = \left(3, 2\right)$

----

reemplazando $x = -2$ en $f(x) = \dfrac{6}{x}$

$f\left(-2\right) = \dfrac{6}{-2} = -3 \quad \Longrightarrow \quad P_4 = \left(-2, -3\right)$

Hasta ahora sabemos que $(x) = \dfrac{6}{x}$ y $h(x) = x - 1$ se cortan en

$x = 3$ y $x = -2$

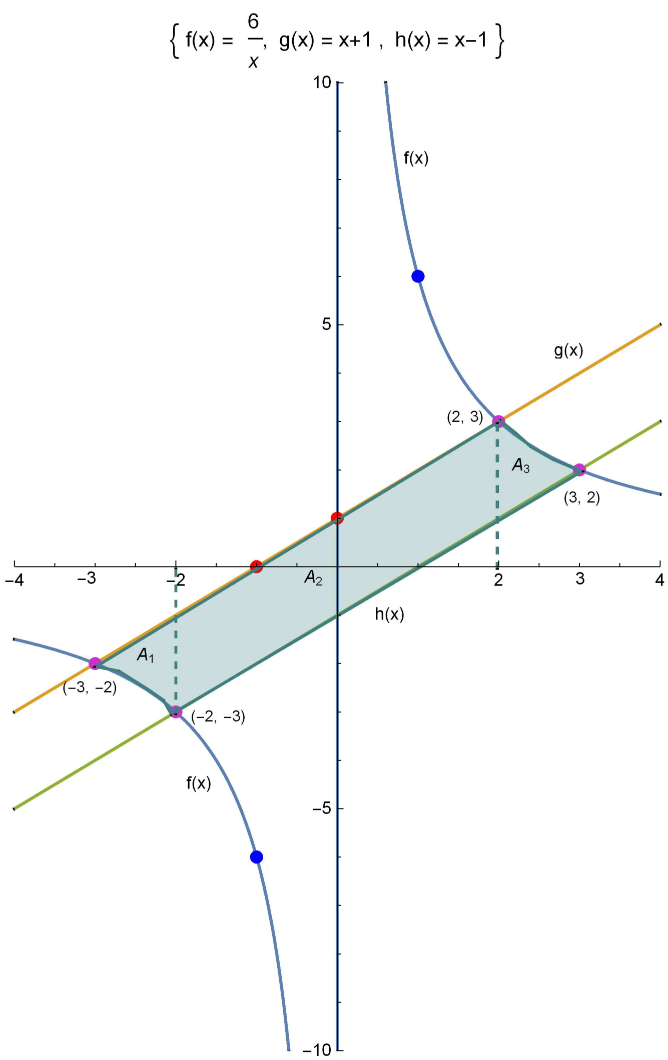
--------x------------x--------

-2 3

Puntos de intersección : { {2, 3}, {-3, -2} , {3, 2}, {-2, -3}}

Gráfico de f (x) , g (x) , h (x) para ver la región limitada por los gráficos de

$f(x) = \frac{6}{x}$, $g(x) = x+1$ y $h(x) = x-1$



A es el área de la región limitada por los gráficos de

$f(x) = \frac{6}{x}$, $g(x) = x+1$ y $h(x) = x-1$

A está formada por A_1 , A_2 y A_3 tal que $A = A_1 + A_2 + A_3$

Calculemos A_1

Como $g(x) > f(x)$ entre $x = -3$ y $x = -2$

A_1 se obtiene como :

$$A_1 = \int_{-3}^{-2} [g(x) - f(x)]\, dx = \int_{-3}^{-2} \left(x + 1 - \frac{6}{x}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + x - 6 \ln |x| \Big|_{-3}^{-2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + (-2) - 6 \ln |(-2)| - \left(\frac{1}{2} \cdot (-3)^2 + (-3) - 6 \ln |(-3)|\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 - 2 - 6 \ln(2) - \left(\frac{1}{2} \cdot 9 - 3 - 6 \ln(3)\right) =$$

$$= 0 - 6 \ln(2) - \left(\frac{9}{2} - 3 - 6 \ln(3)\right) =$$

$$= -6 \ln(2) - \frac{9}{2} + 3 + 6 \ln(3) =$$

$$= -6 \ln(2) - \frac{3}{2} + 6 \ln(3) =$$

$$= 6 (\ln(3) - \ln(2)) - \frac{3}{2} =$$

$$= 6 \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} > 0 \qquad (\text{aprox. } 0.9327)$$

Entonces :

$$A_1 = 6 \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}$$

Calculemos A_2

Como $g(x) > h(x)$ entre $x = -2$ y $x = 2$

A_2 se obtiene como :

$$A_2 = \int_{-2}^{2} [g(x) - h(x)]\, dx = \int_{-2}^{2} [x + 1 - (x - 1)]\, dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} [2]\, dx = 2x \Big|_{-2}^{2} = 2 \cdot 2 - (2 \cdot (-2)) = 4 + 4 = 8$$

Entonces :

$A_2 = 8$

Calculemos A_3

Como $f(x) > h(x)$ entre $x = 2$ y $x = 3$

A_3 se obtiene como :

$A_3 = \int_2^3 [f(x) - h(x)]\, dx = \int_2^3 \left(\frac{6}{x} - (x-1)\right) dx =$

$= \int_2^3 \left(\frac{6}{x} - x + 1\right) dx =$

$= 6 \ln|x| - \frac{1}{2} x^2 + x \Big|_2^3 =$

$= 6 \ln|3| - \frac{1}{2} \cdot 3^2 + 3 - \left(6 \ln|2| - \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2\right) =$

$= 6 \ln(3) - \frac{1}{2} \cdot 9 + 3 - \left(6 \ln(2) - \frac{1}{2} \cdot 4 + 2\right) =$

$= 6 \ln(3) - \frac{9}{2} + 3 - 6 \ln(2) + 2 - 2 =$

$= 6 \ln(3) - \frac{9}{2} + 3 - 6 \ln(2) + 0 =$

$= 6 \ln(3) - 6 \ln(2) - \frac{9}{2} + 3 =$

$= 6 \ln(3) - 6 \ln(2) - \frac{3}{2} =$

$= 6 (\ln(3) - \ln(2)) - \frac{3}{2} =$

$= 6 \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} > 0$ (aprox. 0.9327)

Entonces :

$A_3 = 6 \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}$

Por lo tanto

Área de la región limitada por los gráficos de

$f(x) = \frac{6}{x}$, $g(x) = x + 1$ y $h(x) = x - 1$ **es :**

$A = A_1 + A_2 + A_3 = 6 \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} + 8 + 6 \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} =$

$= 8 + 12 \ln\left(\frac{3}{2}\right) - 3 = 5 + 12 \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ (aprox. 9.865)

$$A = 5 + 12 \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

+-+

Ejercicio 5.- Calcular el área de la región que encierran el gráfico de $f(x) = \sqrt{x-3}$; la recta tangente al mismo en $(7, f(7))$ y el eje x.

Ej Surt 5

Área de la región que encierran el gráfico de $f(x) = \sqrt{x-3}$, su recta tangente en el punto $(7, f(7))$ y el eje x

Recordemos la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Para obtenerla necesitamos $f'(7)$ y $f(7)$

Calculemos $f'(x)$

$$f'(x) = \left[\sqrt{x-3}\right]' = \left[(x-3)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(x-3)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}(x-3)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x-3}}$$

Entonces $f'(7) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{7-3}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Calculemos $f(7) = \sqrt{7-3} = \sqrt{4} = 2$

La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $(7, 2)$ es :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \Longrightarrow \quad y = f'(7)(x-7) + f(7) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad y = \frac{1}{4}(x-7) + 2 = \frac{1}{4}x - \frac{7}{4} + 2 = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

Entonces :

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

El área de la región encerrada que nos piden calcular es entre

el gráfico de $f(x) = \sqrt{x-3}$, $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ y el eje x

----

Observemos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_{\geq 3} = [3, +\infty)$

Cálculos para graficar :

puntos de $f(x) = \sqrt{x-3}$

$\text{si } x = 3 \Longrightarrow \sqrt{3-3} = \sqrt{0} = 0 \Longrightarrow (3, 0) \in \text{gráf}(f)$

$\text{si } x = 4 \Longrightarrow \sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1 \Longrightarrow (4, 1) \in \text{gráf}(f)$

$\text{si } x = 7 \Longrightarrow \sqrt{7-3} = \sqrt{4} = 2 \Longrightarrow (7, 2) \in \text{gráf}(f)$

puntosf = {{3, 0}, {4, 1}, {7, 2}}

Llamemos $g(x) = y = \frac{1}{4} x + \frac{1}{4}$

puntos de $g(x) = \frac{1}{4} x + \frac{1}{4}$

si $x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad (3, 0) \in$ **gráf (f)**

si $x = -1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{4} \cdot (-1) + \frac{1}{4} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (-1, 0) \in$ **gráf (f)**

puntosg = {{3, 0}, {-1, 0}}

Determinemos los puntos de intersección entre $f(x) = \sqrt{x-3}$ **y** $g(x) = \frac{1}{4} x + \frac{1}{4}$

que serán aquellos en donde $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x) \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x-3} = \frac{1}{4} x + \frac{1}{4}$ **elevamos al cuadrado ambos miembros**

$$\left(\sqrt{x-3}\right)^2 = \left(\frac{1}{4} x + \frac{1}{4}\right)^2 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad x - 3 = \frac{1}{16} x^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} x \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \quad \Longrightarrow$$

(no ponemos módulo pues la raíz cuadrada ya está definida para $[3, +\infty)$ **)**

$$\Longrightarrow \quad x - 3 = \frac{1}{16} x^2 + \frac{1}{8} x + \frac{1}{16}$$ **multiplicando por 16 en ambos miembros**

$$\Longrightarrow \quad 16 x - 48 = x^2 + 2 x + 1 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 2 x + 1 - 16 x + 48 = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - 14 x + 49 = 0$$

veamos si tiene raíces reales :

$b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 49 = 196 - 196 = 0$ **la ecuación cuadrática tiene 1 solución**

resolvamos la ecuación cuadrática $x^2 - 14 x + 49 = 0$ **:**

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 49}}{2 \cdot 1} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 196}}{2} = \frac{14 \pm 0}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{14}{2} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 7 = x_2$$

entonces $x_1 = x_2 = 7$

por lo tanto la abscisa del punto de intersección entre f y g :

es $x = 7$

Calculemos la ordenada de punto de intersección :

reemplazando $x = 7$ **en** $f(x) = \sqrt{x-3}$

$f(7) = \sqrt{7-3} = \sqrt{4} = 2 \quad \Longrightarrow \quad P = (7, 2)$

Hasta ahora sabemos que $(x) = \sqrt{x-3}$ **y** $g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ **se cortan en**

$x = 7$

--------x--------

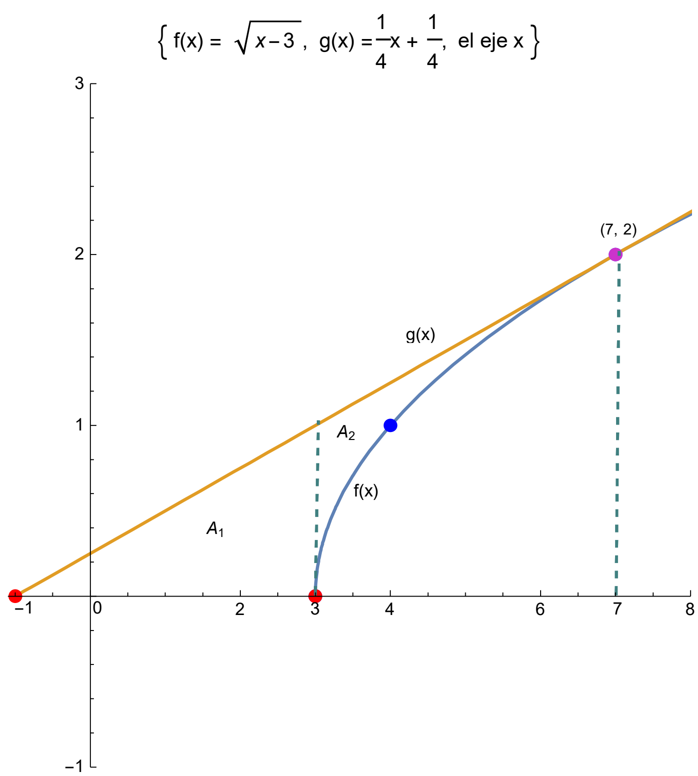
7

puntosinterseccion = {{7, 2}};

--

Gráfico de la región comprendida entre el gráfico de

el gráfico de $f(x) = \sqrt{x-3}$, $g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ **y el eje x**



--

A es el área de la región comprendida entre el gráfico de $f(x) = \sqrt{x-3}$,

su recta tangente a f (x) en $(7, f(7) = 2)$ **que llamamos** $g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ **y el eje x**

A está formada por A_1 **y** A_2 **tal que** $A = A_1 + A_2$

Calculemos A_1

Como $g(x) > 0$ **entre** $x = -1$ **y** $x = 3$

A_1 **se obtiene como :**

$$A_1 = \int_{-1}^{3} g(x)\, dx = \int_{-1}^{3} \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right) dx = \int_{-1}^{3} \frac{1}{4} x\, dx + \int_{-1}^{3} \frac{1}{4}\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{3} x\, dx + \frac{1}{4}\int_{-1}^{3} dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-1}^{3} + \frac{1}{4} x \Big|_{-1}^{3} = \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x\right)\Big|_{-1}^{3} =$$

$$= \left(\frac{1}{8} \cdot 3^2 + \frac{1}{4} \cdot 3\right) - \left(\frac{1}{8} \cdot (-1)^2 + \frac{1}{4} \cdot (-1)\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{8} \cdot 9 + \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{1}{8} \cdot 1 - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \left(\frac{9}{8} + \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{9+6-1+2}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

Entonces :

$A_1 = 2$

Observen que A_1 es el área del triángulo rectángulo de base entre $x = -1$ y $x = 3$ es decir base = 4 y altura entre $y = 0$ e $y = 1$ es decir altura = 1

entonces $A_1 = \dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \dfrac{4 \times 1}{2} = 2$

Calculemos A_2

Como $g(x) > f(x)$ entre $x = 3$ y $x = 7$

A_2 se obtiene como :

$$A_2 = \int_{3}^{7} [g(x) - f(x)]\, dx = \int_{3}^{7} \left[\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} - \sqrt{x-3}\right] dx =$$

$$= \int_{3}^{7} \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right) dx - \int_{3}^{7} \sqrt{x-3}\, dx = \quad (*)$$

----

usamos los resultados obtenidos en el cálculo de A_1

de las integrales indefinidas $\int \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right) dx$ **y calculemos** $\int \sqrt{x-3}\, dx$

$$\int \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right) dx = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x$$

$$\int \sqrt{x-3}\, dx =$$

por sustitución :

$$u = x - 3 \implies du = u'\, dx = 1\, dx \implies du = dx$$

sustituyendo :

$$\int \sqrt{x-3}\, dx = \int (x-3)^{\frac{1}{2}}\, dx = \int u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (x-3)^{\frac{3}{2}}$$

entonces :

$$\int \sqrt{x-3}\, dx = \frac{2}{3}\,(x-3)^{\frac{3}{2}}$$

----

reemplazando en (*)

$$= \int_3^7 \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right) dx - \int_3^7 \sqrt{x-3}\, dx = \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x\right)\Big|_3^7 - \frac{2}{3}\,(x-3)^{\frac{3}{2}}\Big|_3^7 =$$

$$= \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{2}{3}\,(x-3)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_3^7 =$$

$$= \left(\frac{1}{8}\cdot 7^2 + \frac{1}{4}\cdot 7 - \frac{2}{3}\cdot (7-3)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{1}{8}\cdot 3^2 + \frac{1}{4}\cdot 3 - \frac{2}{3}\cdot (3-3)^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{8}\cdot 49 + \frac{7}{4} - \frac{2}{3}\cdot (4)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{9}{8} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3}\cdot (0)^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \left(\frac{49}{8} + \frac{7}{4} - \frac{2}{3}\cdot \left(\sqrt{4}\right)^3\right) - \left(\frac{9}{8} + \frac{3}{4} - 0\right) =$$

$$= \left(\frac{49}{8} + \frac{7}{4} - \frac{2}{3}\cdot (2)^3\right) - \left(\frac{9}{8} + \frac{3}{4}\right) =$$

$$= \left(\frac{49}{8} + \frac{7}{4} - \frac{2}{3}\cdot 8\right) - \frac{9}{8} - \frac{3}{4} =$$

$$= \frac{49}{8} + \frac{7}{4} - \frac{16}{3} - \frac{9}{8} - \frac{3}{4} = \frac{147 + 42 - 128 - 27 - 18}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} > 0$$

Entonces :

$$A_2 = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto

Área de la región comprendida entre el gráfico de $f(x) = \sqrt{x-3}$,

su recta tangente a $f(x)$ en $(7,\ f(7) = 2)$ que llamamos $g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ y el eje x

$$A = A_1 + A_2 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$A = \frac{8}{3}$$

+-+

Ejercicio 6.- Calcular .

a. $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{\ln(x)}{3x} \right) dx$

b. $\int \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} dx$

c. $\int \left(2 + x\sqrt{4+5x^2} \right) dx$

d. $\int \left(x\cos(x^2+6) + \operatorname{sen}(x) \right) dx$

e. $\int x\cos(3x+1)dx$

f. $\int (3x-1)e^{2x}dx$

g. $\int \frac{3\cos(\ln(x+2))}{x+2} dx$

h. $\int \sqrt[5]{\cos(3x+2)}\,\operatorname{sen}(3x+2)dx$

i. $\int x^2(3x+\ln(x))dx$

j. $\int (x+5)x^{4/5}dx$

k. $\int 3\operatorname{sen}(5+e^{4x})e^{4x}dx$

l. $\int \frac{7}{(x-3)(\ln(2x-6))^5} dx$

m. $\int \left(\sqrt{5x+1} + e^{2x-1} \right) dx$

n. $\int \left(x^2 e^{-x^3} + x^2 \right) dx$

Ej Surt 6

Calcular :

Ej Surt 6 a)

$$\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{\ln(x)}{3x} \right) dx =$$

$$\int \sqrt[3]{x}\, dx + \int \frac{\ln(x)}{3x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx + \frac{1}{3} \int \ln(x)\, \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{3}+1} x^{\frac{1}{3}+1} + \frac{1}{3} \int \ln(x)\, \frac{1}{x} dx = \ (*)$$

---

calculemos $\int \ln(x)\, \frac{1}{x} dx$ **por sustitución :**

llamamos :

$$u = \ln(x) \quad \Longrightarrow \quad du = u'\, dx = \frac{1}{x} dx \quad \Longrightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx$$

sustituyendo :

$$\int \ln(x)\, \frac{1}{x} dx = \int u\, du = \frac{1}{2} u^2 = \frac{1}{2} (\ln(x))^2$$

---

reemplazando en (*) :

$$= \frac{1}{\frac{1}{3}+1} x^{\frac{1}{3}+1} + \frac{1}{3} \int \ln(x)\, \frac{1}{x} dx = \frac{1}{\frac{4}{3}} x^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (\ln(x))^2 + C$$

$$= \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2} (\ln(x))^2 + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + \frac{1}{6} \ln^2(x) + C$$

constante cc

Por lo tanto :

$$\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{\ln(x)}{3x} \right) dx = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + \frac{1}{6} \ln^2(x) + C$$

cc

Verificación :

la derivada de $\frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + \frac{1}{6} \ln^2(x) + C$

constante

debe dar el integrando $\sqrt[3]{x} + \frac{\ln(x)}{3x}$

Veamos :

$$\left[\frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + \frac{1}{6} \ln^2(x) + C\right]' = \left[\frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4}\right]' + \left[\frac{1}{6} \ln^2(x) + C\right]' + [C]' =$$

$$= \frac{3}{4}\left[\sqrt[3]{x^4}\right]' + \frac{1}{6}\left[\ln^2(x) + C\right]' + 0 =$$

$$= \frac{3}{4}\left[x^{\frac{4}{3}}\right]' + \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} x^{\frac{4}{3}-1} + \frac{1}{3} \ln(x) \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= x^{\frac{1}{3}} + \ln(x) \cdot \frac{1}{3x} = \sqrt[3]{x} + \frac{\ln(x)}{3x} \quad , \quad \text{Ok}$$

Ej Surt 6 e)

$$\int x \cos(3x+1)\, dx =$$

Observen que en el numerador del integrando está x pero no está algo del tipo x^2 como para usar sustitución :

esto da una pista para usar método de integración por Partes

La idea de Partes es que la nueva integral a resolver sea más sencilla que la original y eso se puede lograr porque en la nueva integral a resolver va a aparecer la derivada de x que es 1

escribamos la fórmula del método :

$$\int u \cdot v'\, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\, dx$$

llamemos :

$u = x \implies u' = 1$

$v' = \cos(3x+1) \implies v = \int v'\, dx = \int \cos(3x+1)\, dx \quad (*)$

----

cálculo auxiliar para obtener v :

por sustitución :

$$m = 3x + 1 \quad \Longrightarrow \quad dm = m' \, dx = 3 \, dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{3} dm = dx$$

sustituyendo :

$$\int \cos(3x+1) \, dx = \int \cos(m) \frac{1}{3} dm = \frac{1}{3} \int \cos(m) \, dm = \frac{1}{3} \operatorname{sen}(m) = \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3x+1)$$

entonces reemplazando en (*)

$$v = \int \cos(3x+1) \, dx = \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3x+1)$$

----

volviendo a partes teníamos :

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

con

$$u = x \quad \Longrightarrow \quad u' = 1$$

$$v' = \cos(3x+1) \quad \Longrightarrow \quad v = \int v' \, dx = \int \cos(3x+1) \, dx = \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3x+1)$$

reemplazando en la fórmula de partes :

$$\int x \cdot \cos(3x+1) \, dx = x \cdot \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3x+1) - \int 1 \cdot \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3x+1) \, dx =$$

$$= \frac{1}{3} x \operatorname{sen}(3x+1) - \frac{1}{3} \int \operatorname{sen}(3x+1) \, dx = \qquad (**)$$

----

para resolver $\int \operatorname{sen}(3x+1) \, dx$ **suamos sustitución como antes**

$$m = 3x + 1 \quad \Longrightarrow \quad dm = m' \, dx = 3 \, dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{3} dm = dx$$

sustituyendo :

$$\int \operatorname{sen}(3x+1) \, dx = \int \operatorname{sen}(m) \frac{1}{3} dm = \frac{1}{3} \int \operatorname{sen}(m) \, dm =$$

$$= \frac{1}{3} (-\cos(m)) = -\frac{1}{3} \cos(m) = -\frac{1}{3} \cos(3x+1)$$

----

reemplazando en (**) :

$$= \frac{1}{3} x \operatorname{sen}(3x+1) - \frac{1}{3} \int \operatorname{sen}(3x+1) \, dx =$$

$$= \frac{1}{3} x \operatorname{sen}(3x+1) - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} \cos(3x+1) \right) + C =$$

cons

$$= \frac{1}{3} x \operatorname{sen}(3x+1) + \frac{1}{9} \cos(3x+1) + C$$

co

Por lo tanto :

$$\int x \cdot \cos(3x+1)\,dx = \frac{1}{3} x \operatorname{sen}(3x+1) + \frac{1}{9}\cos(3x+1) + \underbrace{C}_{cc}$$

Verificación :

la derivada de $\frac{1}{3} x \operatorname{sen}(3x+1) + \frac{1}{9}\cos(3x+1) + \underbrace{C}_{constante}$

debe dar el integrando $x\cos(3x+1)$

Veamos :

$$\left[\frac{1}{3} x \operatorname{sen}(3x+1) + \frac{1}{9}\cos(3x+1) + C\right]' =$$

$$= \left[\frac{1}{3} x \operatorname{sen}(3x+1)\right]' + \left[\frac{1}{9}\cos(3x+1)\right]' + [C]' =$$

$$= \frac{1}{3}\left[x \operatorname{sen}(3x+1)\right]' + \frac{1}{9}\left[\cos(3x+1)\right]' + 0 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot [x]' \operatorname{sen}(3x+1) + \frac{1}{3} x\left[\operatorname{sen}(3x+1)\right]' + \frac{1}{9} \cdot \left(-\operatorname{sen}(3x+1)\right) \cdot 3 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \operatorname{sen}(3x+1) + \frac{1}{3} x\cos(3x+1) \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot \operatorname{sen}(3x+1) =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x+1) + x\cos(3x+1) - \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x+1) =$$

$= x\cos(3x+1)$, **Ok**

Ej Surt 6 f)

$$\int (3x-1)\, e^{2x}\,dx =$$

Observen que en el numerador del integrando está 3 x pero no está algo del tipo kx^2
como para usar sustitución :

esto da una pista para usar método de integración por Partes

La idea de Partes es que la nueva integral a resolver sea más sencilla que la original y eso se puede lograr porque en la nueva integral a resolver va a aparecer la derivada de 3 x que es 3

escribamos la fórmula del método :

$$\int u \cdot v'\,dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\,dx$$

llamemos :

$u = 3x - 1 \implies u' = 3$

$v' = e^{2x} \implies v = \int v'\,dx = \int e^{2x}\,dx$ (*)

----

cálculo auxiliar para obtener v :

por sustitución :

$$m = 2\,x \quad \Longrightarrow \quad dm = m'\,dx = 2\,dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\,dm = dx$$

sustituyendo :

$$\int e^{2\,x}\,dx = \int e^{m}\,\frac{1}{2}\,dm = \frac{1}{2}\int e^{m}\,dm = \frac{1}{2}\,e^{m} = \frac{1}{2}\,e^{2\,x}$$

----

entonces reemplazando en (*)

$$v = \int e^{2\,x}\,dx = \frac{1}{2}\,e^{2\,x}$$

----

volviendo a partes teníamos :

$$\int u\cdot v'\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\;dx$$

con

$$u = 3\,x - 1 \quad \Longrightarrow \quad u' = 3$$

$$v' = e^{2\,x} \quad \Longrightarrow \quad v = \int v'\,dx = \int e^{2\,x}\,dx = \frac{1}{2}\,e^{2\,x}$$

reemplazando en la fórmula de partes :

$$\int (3\,x - 1)\,e^{2\,x} = (3\,x - 1)\cdot\frac{1}{2}\,e^{2\,x} - \int 3\cdot\frac{1}{2}\,e^{2\,x}\;dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,(3\,x - 1)\,e^{2\,x} - \frac{3}{2}\int e^{2\,x}\;dx =$$

usando el resultado calculado anteriormente $\int e^{2\,x} = \frac{1}{2}\,e^{2\,x}$

tenemos :

$$= \frac{1}{2}\,(3\,x - 1)\,e^{2\,x} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,e^{2\,x} + \underset{\text{constante}}{C} = \frac{1}{2}\,(3\,x - 1)\,e^{2\,x} - \frac{3}{4}\,e^{2\,x} + \underset{\text{cc}}{C}$$

$$= \frac{1}{2}\,e^{2\,x}\left[(3\,x - 1) - \frac{3}{2}\right] + \underset{\text{constante}}{C} = \frac{1}{2}\,e^{2\,x}\left[3\,x - \frac{5}{2}\right] + \underset{\text{cc}}{C}$$

Por lo tanto :

$$\int (3\,x - 1)\,e^{2\,x} = \frac{1}{2}\,e^{2\,x}\left[3\,x - \frac{5}{2}\right] + \underset{\text{cc}}{C}$$

Verificación :

la derivada de $\frac{1}{2} e^{2x} [3x - \frac{5}{2}] + \underbrace{C}_{\text{constante}}$

debe dar el integrando $(3x - 1)\, e^{2x}$

Veamos :

$$[\frac{1}{2} e^{2x} (3x - \frac{5}{2}) + C]' =$$

$$= [\frac{1}{2} e^{2x}]' \cdot (3x - \frac{5}{2}) + \frac{1}{2} e^{2x} \cdot [3x - \frac{5}{2}]' + [C]' =$$

$$= \frac{1}{2} [e^{2x}]' \cdot (3x - \frac{5}{2}) + \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 3 + 0 =$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2 \cdot (3x - \frac{5}{2}) + \frac{3}{2} e^{2x} =$$

$$= e^{2x} \cdot (3x - \frac{5}{2}) + \frac{3}{2} e^{2x} =$$

$$= e^{2x} \cdot (3x - \frac{5}{2} + \frac{3}{2}) = e^{2x} \cdot (3x - 1) \quad , \quad \text{Ok}$$

Ej Surt 6 n)

$$\int (x^2 e^{-x^3} + x^2)\, dx$$

Separamos la suma en dos integrales indefinidas :

$$\int (x^2 e^{-x^3} + x^2)\, dx = \int x^2 e^{-x^3}\, dx + \int x^2\, dx = \quad (*)$$

----

cálculo auxiliar

la primera integral :

$$\int x^2 e^{-x^3}\, dx = \quad (**)$$

por sustitución

llamamos

$$u = -x^3 \implies du = u'\, dx = -3x^2\, dx \implies -\frac{1}{3} du = x^2\, dx$$

sustituyendo :

$$\int x^2 e^{-x^3}\, dx = \int e^{-x^3} x^2\, dx = \int e^u \left(-\frac{1}{3}\right) du = -\frac{1}{3} \int e^u\, du =$$

$$= -\frac{1}{3} e^u + C_1 = -\frac{1}{3} e^{-x^3} + C_1$$

Calculemos la segunda integral indefinida :

$\int x^2\, dx = \frac{1}{3} x^3 + C_2$

Reemplazando estos resultados de la primera y segunda integral en (*) :

$\int \left(x^2 e^{-x^3} + x^2\right) dx = \int x^2 e^{-x^3} dx + \int x^2\, dx =$ (*)

$= -\frac{1}{3} e^{-x^3} + C_1 + \frac{1}{3} x^3 + C_2 = -\frac{1}{3} e^{-x^3} + \frac{1}{3} x^3 + \underset{\text{cc}}{C}$

Por lo tanto :

$$\int \left(x^2 e^{-x^3} + x^2\right) dx = -\frac{1}{3} e^{-x^3} + \frac{1}{3} x^3 + \underset{\text{cc}}{C}$$

Verificación :

la derivada de $-\frac{1}{3} e^{-x^3} + \frac{1}{3} x^3 + \underset{\text{constante}}{C}$

debe dar el integrando $x^2 e^{-x^3} + x^2$

Veamos :

$\left[-\frac{1}{3} e^{-x^3} + \frac{1}{3} x^3 + C\right]' =$

$= \left[-\frac{1}{3} e^{-x^3}\right]' + \left[\frac{1}{3} x^3\right]' + [C]' =$

$= \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot e^{-x^3} \cdot \left(-3 x^2\right) + \frac{1}{2} e^{2x-1} \cdot 2 + 0 =$

$= \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-3 x^2\right) \cdot e^{-x^3} + e^{2x-1} =$

$= x^2 \cdot e^{-x^3} + e^{2x-1}$, Ok

+-+

Ejercicio 7.- Para la función $f(x) = 5x\,\mathrm{sen}(x^2)$, hallar una primitiva $F(x)$ que verifique $F(0) = 1$.

Ej Surt 7

$f(x) = 5x\ \mathrm{sen}\left(x^2\right)$

Hallar una primitiva de f (x) que llamamos F (x) que verifique $F(0) = 1$

Una primitiva de f (x) es la integral de f (x) $\Longrightarrow$

$F(x) = \int 5x\,\mathrm{sen}\left(x^2\right) dx = 5 \int \mathrm{sen}\left(x^2\right) x\, dx =$

por sustitución :

llamamos $u = x^2 \implies du = u' \, dx = 2x \, dx \implies \frac{1}{2} du = x \, dx$

sustituyendo :

$$5 \int \text{sen}\left(x^2\right) x \, dx = 5 \int \text{sen}(u) \frac{1}{2} du = \frac{5}{2} \int \text{sen}(u) \, du =$$

$$= \frac{5}{2} (-\cos(u)) + \underbrace{C}_{\text{constante}} = -\frac{5}{2} \cos(u) + \underbrace{C}_{\text{constante}} = -\frac{5}{2} \cos\left(x^2\right) + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

----

verifiquemos que está bien :

$$\left[-\frac{5}{2} \cos\left(x^2\right) + C\right]' = -\frac{5}{2} \left(-\text{sen}\left(x^2\right)\right) \cdot 2x + 0 = 5x \, \text{sen}\left(x^2\right) \quad , \quad \text{Ok}$$

Entonces $F(x) = -\frac{5}{2} \cos\left(x^2\right) + \underbrace{C}_{\text{co}}$

Como $F(0) = 1$ **evaluamos en** $x = 0$ **para obtener** $\underbrace{C}_{\text{con}}$ **:**

$$F(0) = -\frac{5}{2} \cos\left(0^2\right) + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 1 \implies$$

$$\implies -\frac{5}{2} \cos(0) + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 1 \implies -\frac{5}{2} \cdot 1 + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 1 \implies -\frac{5}{2} + \underbrace{C}_{\text{constant}} = 1$$

$$\implies \underbrace{C}_{\text{constante}} = 1 + \frac{5}{2} \implies \underbrace{C}_{\text{constan}} = \frac{7}{2}$$

Por lo tanto :

la primitiva de $f(x)$ **que llamamos** $F(x)$ **que verifica** $F(0) = 1$ **es :**

$$\mathbf{F(x) = -\frac{5}{2} \cos\left(x^2\right) + \frac{7}{2}}$$

+-+

Ejercicio 8.- Hallar la función f sabiendo que

a. $f'(x) = \dfrac{5}{x-2} - 6x^2$ y $f(3) = 100$.

b. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}$ y $f(1) = 2$.

Ej Surt 8 b)

Hallar la función $f(x)$ **si se sabe que :**

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \quad y \quad f(1) = 2$$

f (x) es la primitiva de f' (x)

Calculemos la integral de f' (x) :

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx = \int (3x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \quad (*)$$

----

calculemos la integral por sustitución :

$$\int (3x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

llamamos

$$u = 3x+1 \quad \Longrightarrow \quad du = u'\,dx = 3\,dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{3}\,du = dx$$

sustituyendo :

$$\int (3x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \int u^{\frac{1}{2}}\,\frac{1}{3}\,du = \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\,du =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+1\right)}\,u^{\frac{1}{2}+1} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}\,u^{\frac{3}{2}} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{2}{9}\,(3x+1)^{\frac{3}{2}} + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

----

reemplazando en (*) :

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx = \int (3x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \quad (*)$$

$$= \frac{2}{9}\,(3x+1)^{\frac{3}{2}} + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

Entonces :

$$f(x) = \frac{2}{9}\,(3x+1)^{\frac{3}{2}} + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

----

como f (1) = 2 , obtengamos el valor de $\underbrace{C}_{\text{co}}$

$$f(1) = \frac{2}{9}\,(3\cdot 1+1)^{\frac{3}{2}} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2}{9}\,(4)^{\frac{3}{2}} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2}{9}\left(\sqrt{4}\right)^{3} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 2 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{2}{9}\,(2)^{3} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2}{9}\cdot 8 + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{16}{9} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 2 \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{C}_{\text{constante}} = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$

Por lo tanto :

$$f(x) = \frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{9} = \frac{2}{9}\sqrt{(3x+1)^3} + \frac{2}{9}$$

$$f(x) = \frac{2}{9}\sqrt{(3x+1)^3} + \frac{2}{9}$$

++