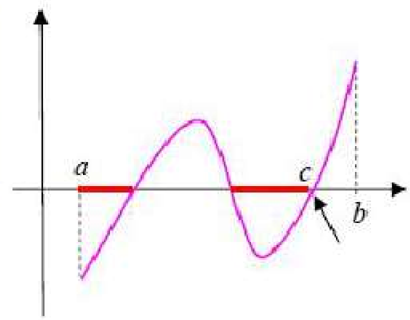
Teorema de Bolzano,
corolario del teorema de Bolzano y aplicaciones
para ejercicio tipo 29 de Práctica 2

**Vamos a utilizar el resultado
que establece el Teorema de Bolzano,
sin tener que aprender la demostración del teorema,
a nivel de Mate 51
Igualmente, para los interesados en ir más allá,
pueden seguir la
demostracion que aparece debajo del enunciado
y aprenderla que está bueno**

Teóricas de Análisis Matemático (28) – Práctica 4 – Continuidad

Teorema de Bolzano. Si $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ es una función continua, tal que $f(a)<0$ y $f(b)>0$ (o al revés) entonces existe $c\in(a;b)$ tal que $f(c)=0$



Demostración :

Consideremos el conjunto

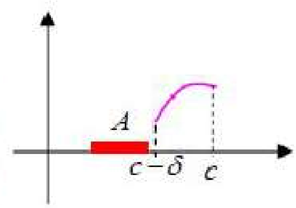
$$A = \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$$ (en el gráfico es el pintado de rojo).

Observemos que A está acotado ($A\subset[a;b]$), $A\neq\varnothing$ ($a\in A$)

Entonces, existe el supremo $A = c$, probaremos que $f(c)=0$.

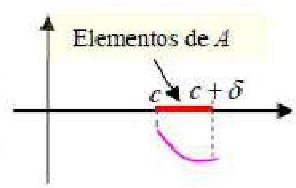
Para ello, descartamos las otras dos posibilidades.

Si fuera $f(c)>0$:



Entonces $a<c\le b$. Por la conservación del signo, $f(x)>0$ en $(c-\delta;c]$ para algún δ suficientemente chico. Luego, el conjunto A está "a la izquierda" de $c-\delta$. En otras palabras, $c-\delta$ es una cota superior (menor que c) del conjunto A. Pero esto contradice que c es la menor de las cotas superiores de A.

Si fuera $f(c)<0$:



Entonces $a\le c<b$. Por la conservación del signo, $f(x)<0$ en $[c;c+\delta)$. Por lo tanto el intervalo $(c;c+\delta)\subset A$. Es decir, hay elementos de A "a la derecha" de c. Pero, esto contradice que c es cota superior de A.

Luego $f(c)=0$.

Bolzano establece que si f es continua
en un intervalo cerrado [a, b] , a < b,
y si cambia de signo, f (a) < 0 y f (b) > 0,
es decir pasa de ser negativa a positiva, o viceversa,
tiene que cruzar el eje x, y entonces en ese intervalo,
hay una raíz o cero de la función
o sea hay un x que lo llama c tal que f (c) =
0. (por lo menos un cero habrá)
c es un Cero o raíz de f (x)

Una de las hipótesis del Teorema de
Bolzano es que se aplica a funciones continuas
en un intervalo cerrado [a, b] , a y b números reales, $a, b \in R$

Qué es una función continua?

Habría que utilizar el concepto de límite de una función,
para definir una función continua,
pero para nosotros a nivel de Mate 51,
una función continua
es aquella para la que su Gráfico
se puede dibujar "sin levantar el lápiz",
es decir no tiene "saltos ni agujeros"

Por ejemplo;
las funciones polinómicas son continuas en todo su Dominio R

(las polinomicas son las funciones lineales, de grado 1,
las funciones cuadráticas de grado 2,
las cúbicas de grado 3, las de grado 4 o cuartas, ...
las de grado n, n un número natural)

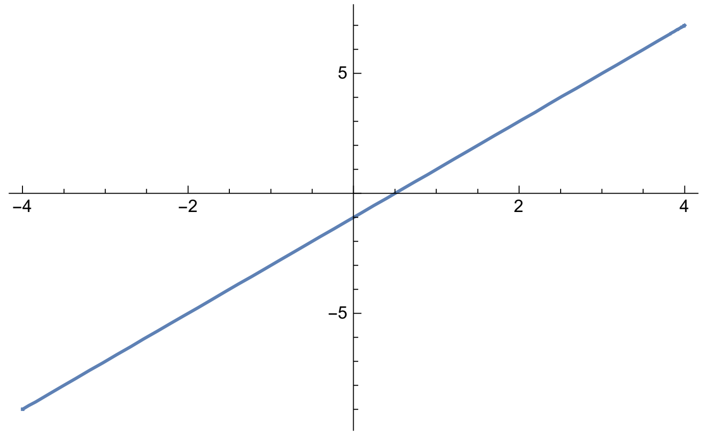
función polinómica,
$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots + a_n x^n$,
$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n \in R$, $n \in N$
valor numérico

función lineal, $f(x) = 2x - 1$,

tiene el siguiente gráfico y es continua

```
Plot[2 x - 1, {x, -4, 4}]
```

representación gráfica

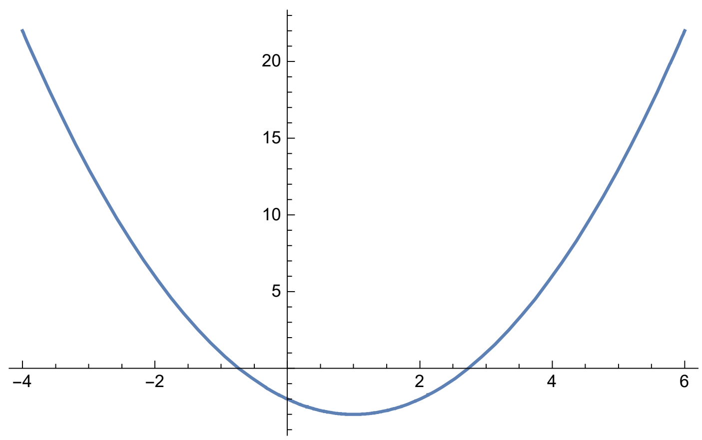


función cuadrática, f (x) = $(x-1)^2 - 3$,

tiene el siguiente gráfico y es continua

```
Plot[(x - 1)^2 - 3, {x, -4, 6}]
```

representación gráfica



función cúbica,
f (x) = 2 (x + 1) (x - 2) (x - 3) en forma factorizada y que se puede escribir como función polinómica de grado 3 así : f (x) =
$2x^3 - 8x^2 + 2x + 12$

```
Expand[2 (x + 1) (x - 2) (x - 3)]
```

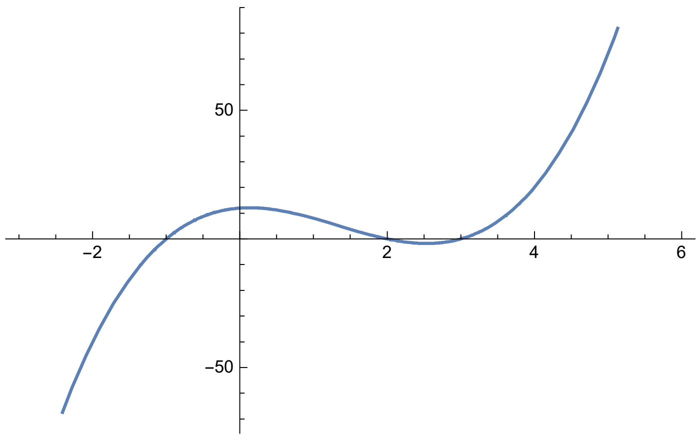
expande factores

$12 + 2x - 8x^2 + 2x^3$

tiene el siguiente gráfico y es continua

```
Plot[2 x^3 - 8 x^2 + 2 x + 12, {x, -3, 6}]
```

representación gráfica



La función módulo de x , f (x) = |x| , f : R → R, definida como :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

tiene el siguiente gráfico y es continua

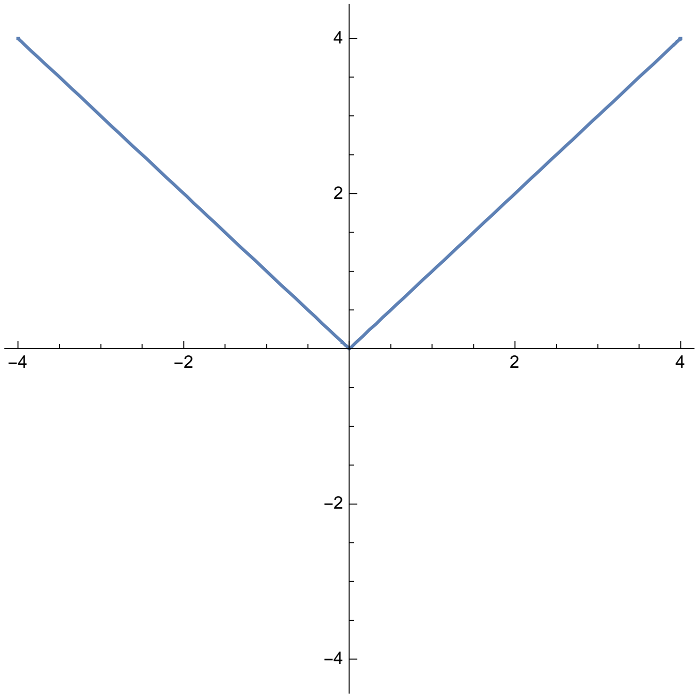
```
graf1 = Plot[-x, {x, -4, 0}]
```

representación gráfica

```
graf2 = Plot[x, {x, 0, 4}]
```

representación gráfica

```
Show[graf1, graf2, PlotRange -> {{-4, 4}, {-4, 4}}, AspectRatio → 1]
```
muestra · rango de representación · cociente de aspecto



Mirando el gráfico de módulo de x, f (x) = |x|,

por eso decimos que el módulo de un

número real es siempre positivo, |x| ≥ 0 siempre

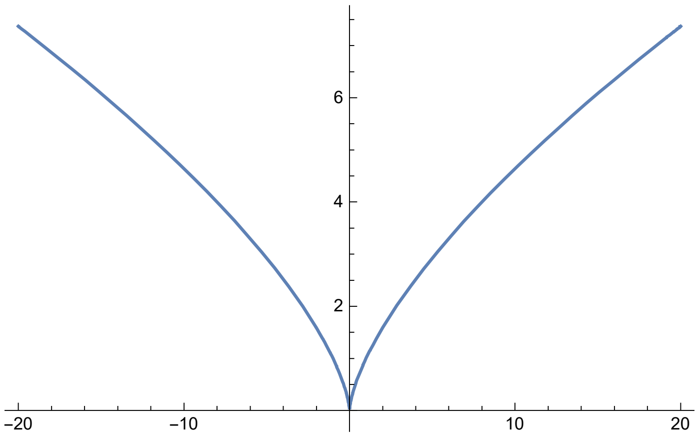
Las funciones raíz enésima, f (x) = x^q,
q un número racional, q ∈ Q,
también son continuas en todo su Dominio

Por ejemplo : f (x) = $\sqrt[3]{x^2}$ ó bien escrita así, f (x) = $x^{\frac{2}{3}}$
tiene el siguiente gráfico y es continua

In[41]:= `Plot[`$\sqrt[3]{x^2}$`, {x, -20, 20}]`

representación gráfica

Out[41]=



----------------------- --

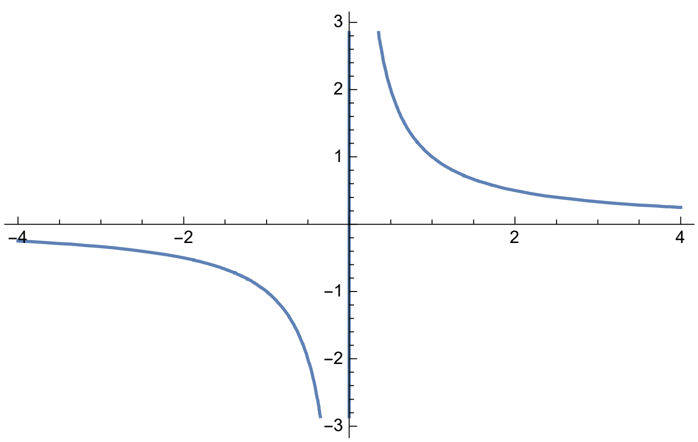
Un ejemplo de función que pega un "salto" es

$f(x) = \frac{1}{x}$, que no es continua en todo R

pero si en su Dominio R - {0}

`Plot[`$\frac{1}{x}$`, {x, -4, 4}]`

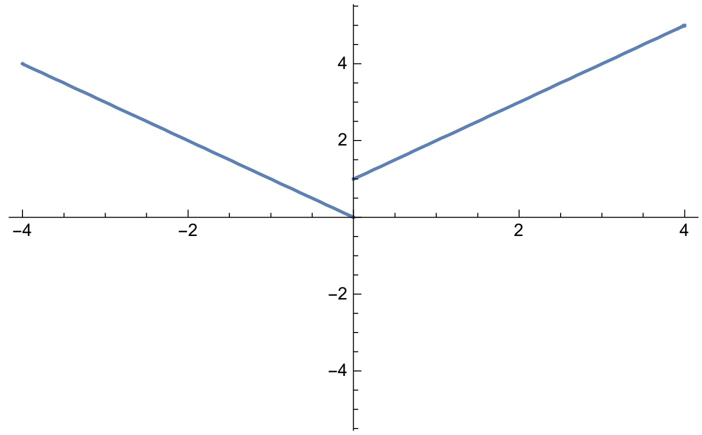
representación gráfica



Un ejemplo de función "partida" (con dominio partido),
y que pega un " salto " es :

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

```
Show[fig1, fig2, PlotRange → {{-4, 4}, {-5, 5}}]
```
muestra rango de representación



--

Ok

Retomando Bolzano,
para obtener los conjuntos de positividad C^+ y conjunto de negatividad C^- de una f (x)

Como se usa en la práctica ?

La idea es tratar de factorizar la función,
es decir, escribirla como
producto de factores,
en vez de sumas de términos, porque así es más fácil calcular los ceros o raíces de f (x),
y porque en los intervalos
entre raíces o ceros,
f (x) es "toda positiva" o es "toda negativa"

Este es el resultado inmediato
que se desprende del teorema de Bolzano

Sea una f continua
y sean c_1, c_2 dos ceros o raíces consecutivas de f (x)
Entonces, en el intervalo (c_1, c_2), $f(x) > 0$ ó $f(x) < 0$

(f (x) tiene signo positivo en todo el intervalo (c_1, c_2)
o f (x) tiene signo negativo en todo el intervalo (c_1, c_2)

Veamos como se usa todo esto con un ejemplo,
del tipo de la práctica 2, ejercicio 29
Procedimiento :

1) factorizar la función
(supongamos que es cúbica y con 3 raíces reales, c_1, c_2, c_3,
es decir escribir a f como $f(x) = a(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)$)

2) encontrar los ceros, $C^0 = \{c_1, c_2, c_3\}$

3) ordenar los ceros en la recta de los números reales (supongamos que $c_1 < c_2 < c_3$)

4) construir la tablita

x	$(-\infty, c_1)$	c_1	(c_1, c_2)	c_2	(c_2, c_3)	c_3	$(c_3, +\infty)$
f(x)		0		0		0	

Ir completando la tablita : elegir un $x = a$, $a \in (-\infty, c_1)$, calcular $f(a)$ y ver si $f(a) < 0$ ó $f(a) > 0$
Supongamos que la cuenta que hicimos de $f(a)$ dió $f(a) < 0$, entonces poner un signo - debajo de $(-\infty, c_1)$
porque en todo ese intervalo $f(x)$ será negativa

Luego tomar un $x = b$, $b \in (c_1, c_2)$, calcular $f(b)$ y ver si $f(b) < 0$ ó $f(b) > 0$. Si dió $f(b) > 0$,
poner un signo + debajo de (c_1, c_2)

Idem tomar un $x = c$, $c \in (c_2, c_3)$ y ver si $f(c) < 0$ ó $f(c) > 0$.
Si el cálculo dió $f(c) < 0$, poner un signo - debajo de (c_2, c_3)

Finalmente, tomar un $x = d$,
$d \in (c_3, +\infty)$ y ver si $f(d) < 0$ ó $f(d) > 0$.
Si el cálculo dió $f(d) > 0$, poner un signo + debajo de $(c_3, +\infty)$

La tablita, con las suposiciones de que las cuentas dieron $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f(c) < 0$ y $f(d) > 0$, quedaría así :

x	$(-\infty, c_1)$	c_1	(c_1, c_2)	c_2	(c_2, c_3)	c_3	$(c_3, +\infty)$
f(x)	-	0	+	0	-	0	+

La tablita indica que en cada intervalo:

f es	negativa		positiva		negativa		positiva

5) El conjunto de Ceros C^0, el conjunto de positividad C^+ y el conjunto de negatividad C^- de $f(x)$, serán :

$$C^0 = \{c_1, \; c_2, \; c_3\}$$

$$C^+ = (c_1, c_2) \bigcup (c_3, +\infty)$$

$$C^- = (-\infty, c_1) \bigcup (c_2, c_3)$$

Vean este ejemplo a continuación. Creo que la tablita que les armé arriba es mejor que la que usó el que resolvió el ejercicio 6 debajo, aunque obviamente se obtiene el mismo resultado usando una u otra

Ejercicio 6. Hallar el conjunto de positividad de la función $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

Solución

La función $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ es continua.

Al sacar factor x común $f(x) = x(x^2 - x - 2)$ y resolver la cuadrática, obtenemos **todos** lo

de $f(x) = x(x+1)(x-2)$ que son $x = 0, x = -1, x = 2$.

El teorema de Bolzano nos asegura que: entre 2 ceros de la función ella se mantiene toda po:
toda negativa con lo que basta estudiar el signo de f en los intervalos

$$(-\infty;-1), (-1;0), (0;2), (2;+\infty)$$

Como $f(-2) = -8 < 0$ entonces $f < 0$ en el intervalo $(-\infty;-1)$.

Como $f(-0,5) = \frac{5}{8} > 0$ entonces $f > 0$ en el intervalo $(-1;0)$.

Como $f(1) = -2 < 0$ entonces $f < 0$ en el intervalo $(0;2)$.

Como $f(3) = 12 > 0$ entonces $f > 0$ en el intervalo $(2;+\infty)$

$f(-2)$	$f(-0,5)$	$f(1)$	$f(3)$
negativo	positivo	negativo	positivo

Luego, el conjunto de positividad de f es $A = \{x / f(x) > 0\} = (-1;0) \cup (2;+\infty)$.

Otro ejemplo :

Ejercicio 8. Hallar en forma aproximada, con un decimal exacto, una solución de la ecua

$x^5 + 5x^2 - 2 = 0$.

Solución

Consideremos la función $f(x) = x^5 + 5x^2 - 2$, que es continua

Además $f(0) = -2 < 0$ y $f(1) = 1 + 5 - 2 = 4 > 0$.

El teorema de Bolzano asegura que existe $c \subset (0;1)$ tal que $f(c) = 0$. Es decir, en el intervalo tenemos una solución de $x^5 + 5x^2 - 2 = 0$ En consecuencia, la parte entera de c es 0 (porqu entre 0 y 1). Para encontrar el primer decimal, estudiamos el signo de $f(0,1); f(0,2)$...etc. $f(0,8)$ y vemos en qué intervalo cambia de signo. Haciendo esto se obtiene

$f(0,1)$	$f(0,2)$	$f(0,3)$	$f(0,4)$	$f(0,5)$	$f(0,6)$	$f(0,7)$	$f($
negativo	negativo	negativo	negativo	negativo	**negativo**	**positivo**	po

Usamos el teorema de Bolzano en el intervalo $[0,6;0,7]$. En este intervalo, la función f pa negativo a positivo, entonces existe un c en ese intervalo tal que $f(c) - 0$. Por estar allí, se que $c \simeq 0,6$...

El teorema de Bolzano es un teorema de existencia. Vemos en este ejemplo, que con solo sab existe, tenemos una "receta" (*algoritmo*) que permite encontrar la solución con la precisión quiera.

Listo !