Composición de funciones

Si f y g son dos funciones reales, la *composición* $g \circ f$ ("g compuesta con f") es una nueva función que a cada x le asigna el resultado de aplicarle la función g a $f(x)$, es decir,

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

Ejemplo. Sean $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = 2x - 1$. Hallar $g \circ f$.

Por la definición de $g \circ f$, sabemos que, para cada x vale $g \circ f(x) = g(f(x))$. Reemplazando $f(x) = x^2 + 3$ en esta expresión obtenemos que

$$g \circ f(x) = g(x^2 + 3)$$

Finalmente, calculamos el valor $g(x^2 + 3)$ reemplazando en la fórmula de g y operando:

$$g(x^2 + 3) = 2(x^2 + 3) - 1 = 2x^2 + 6 - 1 = 2x^2 + 5$$

En consecuencia, obtenemos que

$$\boxed{g \circ f(x) = 2x^2 + 5}$$

En forma análoga a la definición de $g \circ f$, se puede definir también la composición $f \circ g$ ("f compuesta con g") como la función que a cada x le asigna el resultado de aplicarle la función f a $g(x)$, es decir,

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

Ejemplo. Sean $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = 2x - 1$. Hallar $f \circ g$.

Por la definición de $f \circ g$, sabemos que $f \circ g(x) = f(g(x))$.
Reemplazando $g(x) = 2x - 1$, obtenemos

$$f \circ g(x) = f(2x - 1)$$

Para terminar, calculamos $f(2x - 1)$ usando la fórmula que define f y realizamos las operaciones que aparecen:

$$f(2x - 1) = (2x - 1)^2 + 3 = 4x^2 - 4x + 4$$

obteniendo así que

$$\boxed{f \circ g(x) = 4x^2 - 4x + 4}$$

Observamos que, en los ejemplos anteriores, al componer las funciones $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = 2x - 1$ en los dos órdenes posibles, obtuvimos dos funciones distintas:

$$g \circ f(x) = 2x^2 + 5 \qquad \text{y} \qquad f \circ g(x) = 4x^2 - 4x + 4$$

De hecho, en general, se tiene que

$$\boxed{f \circ g \neq g \circ f}$$

Dado $x \in \mathbb{R}$, para que sea posible calcular $g \circ f(x) = g(f(x))$, es necesario que f esté definida en x (es decir, que $x \in \mathrm{Dom}(f)$) y que g esté definida en $f(x)$ (es decir, que $f(x) \in \mathrm{Dom}(g)$). Estas dos condiciones determinan naturalmente el dominio de $g \circ f$.

Ejemplo. Sean $f(x) = -x + 3$ y $g(x) = \dfrac{-2x+1}{x-2}$. Hallar $f \circ g$ y $g \circ f$.

Calculamos las funciones pedidas a partir de las definiciones y efectuando las operaciones que aparecen. Obtenemos:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{-2x+1}{x-2}\right) = -\left(\frac{-2x+1}{x-2}\right) + 3 =$$

$$= \frac{2x-1}{x-2} + 3\frac{2x-1+3(x-2)}{x-2} = \frac{2x-1+3x-6}{x-2} = \frac{5x-7}{x-2}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(-x+3) = \frac{-2(-x+3)+1}{(-x+3)-2} =$$

$$= \frac{2x-6+1}{-x+3-2} = \frac{2x-5}{-x+1}$$

Resumiendo, las composiciones son:

$$\boxed{f \circ g(x) = \frac{5x-7}{x-2} \qquad \text{y} \qquad g \circ f(x) = \frac{2x-5}{-x+1}}$$

Observemos en este ejemplo que, para que sea posible calcular $f \circ g$ es necesario que g esté definida, es decir, que $x \neq 2$. Una vez calculado $g(x)$, siempre se le podrá aplicar f para obtener $f \circ g(x)$, puesto que f está definida en todo $\mathbb{R}$. Análogamente, para poder calcular $g \circ f(x)$, como $f(x)$ se puede calcular para todo x, sólo debemos verificar que sea posible aplicarle g al resultado, es decir, que g esté definida en $f(x) = -x + 3$. Como el único número real que no pertenece al dominio de g es 2, esto será posible siempre que $-x + 3 \neq 2$, es decir, para $x \neq 1$. En consecuencia:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R} - \{2\} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R} - \{1\}}$$