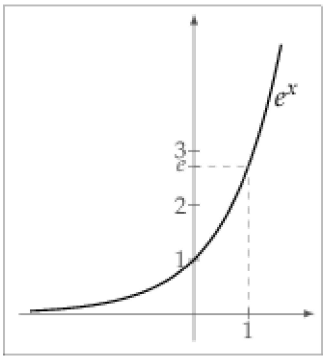
Funciones exponencial y logarítmica

Función exponencial

La función $f(x) = e^x$ se llama *función exponencial*. Su base, el número e, es un número irracional cuyo valor aproximado es $2,718281\ldots$ Esta base es de gran uso tanto en las aplicaciones como en el desarrollo de la teoría.

El gráfico de la función $f(x) = e^x$ es el siguiente:

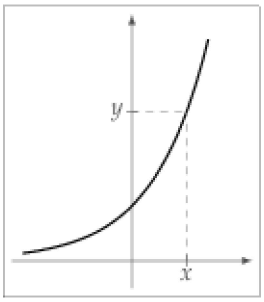


Esta función presenta las siguientes propiedades:

- El dominio es $\mathbb{R}$ y su imagen es $(0; +\infty)$ (es decir, la función es siempre positiva).
- Es continua.
- Es estrictamente creciente.
- $e^0 = 1$.
- $e^1 = e$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, y entonces la recta de ecuación $y = 0$ es una asíntota horizontal por izquierda para la función exponencial.

Función logaritmo

Observemos que para cada $y > 0$ en la imagen de la función exponencial existe un único x tal que $e^x = y$.



Por lo tanto, podemos definir la función inversa de la exponencial, llamada *logaritmo natural*:

$$\ln : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$$

de modo tal que $\ln(a) = b$ si y solo si $e^b = a$.

Tenemos entonces dos relaciones fundamentales:

$$\ln(e^x) = x, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

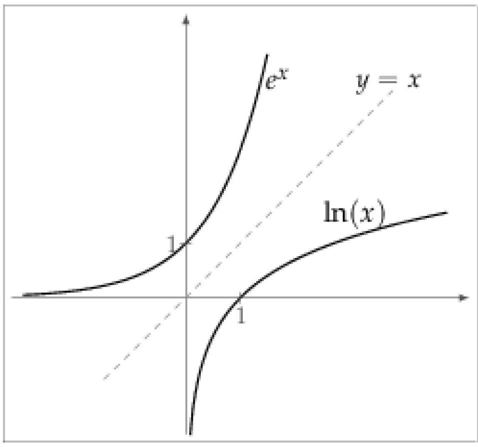
$$e^{\ln(x)} = x, \text{para todo } x > 0.$$

Observemos que

- Solo pueden calcularse logaritmos de números positivos.
- $\ln(1) = 0$ pues $e^0 = 1$.

- $\ln(e) = 1$ pues $e^1 = e$.

Graficamos $g(x) = \ln(x)$ a partir del gráfico de $f(x) = e^x$. Como f y g son funciones mutuamente inversas, sus gráficos son simétricos respecto de la recta $y = x$



Podemos observar que

- El dominio de función logaritmo es el intervalo $(0; +\infty)$ y su imagen es $\mathbb{R}$. Es continua y estrictamente creciente.
- $\ln(1) = 0$.
- $\ln(x) < 0$ si $x < 1$.
- $\ln(x) > 0$ si $x > 1$.
- Los tres ítems anteriores pueden resumirse en $C^0 = \{1\}$, $C^- = (0; 1)$, $C^+ = (1; +\infty)$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$, o sea que la recta de ecuación $x = 0$ es una asíntota vertical de la función logaritmo.

Ejemplos

Ejemplo 1. Hallar el dominio, las ecuaciones de las asíntotas verticales, los ceros y los conjuntos de positividad y de negatividad de $f(x) = -5\ln(x^2 - 9)$.

Para hallar el dominio de f, debemos ver para qué valores de x el argumento del logaritmo es positivo. Es decir, tenemos que resolver la inecuación

$$x^2 - 9 > 0.$$

Hay muchas formas de resolverla. Una de ellas es factorizar $x^2 - 9$ como $(x - 3)(x + 3)$ y resolver:

$$(x - 3)(x + 3) > 0.$$

Recordemos que para que un producto sea positivo, ambos factores tienen que tener el mismo signo. Esto nos lleva a considerar dos casos, y finalmente llegamos a que la solución es la unión de dos intervalos (las cuentas se dejan para el lector: ¡completar!):

$$\boxed{\mathrm{Dom} f = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty).}$$

Los candidatos para asíntotas verticales son $x = -3$ y $x = 3$. Para verificar si realmente lo son, debemos calcular los límites laterales correspondientes.

$$\lim_{x \to -3^-} -5\ln(x^2 - 9) = \lim_{x \to -3^-} \underbrace{-5\ln\Big(\overbrace{x^2 - 9}^{\to 0^+}\Big)}_{\to -\infty} = +\infty.$$

Como este límite lateral es infinito, podemos afirmar que

$$\boxed{x = -3 \quad \text{es asíntota vertical para } f.}$$

Ahora calculamos

$$\lim_{x \to 3^+} -5\ln(x^2-9) = \lim_{x \to 3^+} -5\underbrace{\ln\big(\overbrace{x^2-9}^{\to 0^+}\big)}_{\to -\infty} = +\infty.$$

Como este límite lateral también es infinito, podemos afirmar que

$$\boxed{x = 3 \quad \text{es asíntota vertical para } f.}$$

Observemos que, los otros límites laterales (es decir el límite cuando x tiende a -3 por derecha o a 3 por izquierda) no se pueden calcular (¿por qué?).

Busquemos ahora los ceros de f. Para esto, tenemos que resolver la ecuación

$$-5\ln(x^2-9) = 0$$

Esto es equivalente a

$$\ln(x^2-9) = 0$$

Para seguir despejando la x aplicamos la función exponencial en ambos miembros y después utilizamos la propiedad de las funciones inversas que vimos más arriba

$$e^{\ln(x^2-9)} = e^0$$
$$x^2 - 9 = 1$$
$$x^2 = 10$$

Luego, tenemos dos soluciones:

$$x = -\sqrt{10} \quad \text{y} \quad x = \sqrt{10}.$$

O sea:

$$\boxed{C^0 = \{-\sqrt{10}, \sqrt{10}\}.}$$

A partir de los ceros, como f es continua, podemos aplicar el Corolario del Teorema de Bolzano para determinar sus conjuntos de positividad y de negatividad.

x	$(-\infty;-\sqrt{10})$	$-\sqrt{10}$	$(-\sqrt{10};-3)$	$(3;\sqrt{10})$	$\sqrt{10}$	$(\sqrt{10};+\infty)$
f	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
pues	$f(-4) = -5\ln(7) < 0$		$f(-3.1) = -5\ln(0.61) > 0$	$f(3.1) = -5\ln(0.61) > 0$		$f(4) = -5\ln(7) < 0$

De esta tabla podemos deducir que

$$\boxed{C^+ = (-\sqrt{10};-3) \cup (3;\sqrt{10}) \quad \text{y} \quad C^- = (-\infty;-\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10};+\infty).}$$

Y así resolvimos todo el ejercicio.

Ejemplo 2. Hallar la función inversa, f^{-1}, de $f(x) = 3 - \ln(2x+1)$. Dar el dominio y la imagen de f^{-1}.

Para hallar la función inversa de $f(x) = 3 - \ln(2x+1)$ debemos despejar x en la siguiente ecuación:

$$3 - \ln(2x+1) = y$$

Podemos comenzar despejando de la siguiente manera:

$$3 - y = \ln(2x+1)$$

Para eliminar el logaritmo, podemos aplicar la función exponencial en ambos miembros:

$$e^{3-y} = e^{\ln(2x+1)}$$

Esto nos da

$$e^{3-y} = 2x + 1$$

Desde aquí es más fácil seguir despejando:

$$e^{3-y} - 1 = 2x$$

$$\frac{e^{3-y} - 1}{2} = x$$

De esta última ecuación deducimos que

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{e^{3-x} - 1}{2}.}$$

Luego, el dominio de f^{-1} es $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathrm{Dom} f^{-1} = \mathbb{R}.}$$

Y su imagen la obtenemos calculando el dominio de $f(x) = 3 - \ln(2x+1)$:

$$2x + 1 > 0$$

$$2x > -1$$

$$x > -\frac{1}{2}$$

Luego

$$\boxed{\mathrm{Im} f^{-1} = \mathrm{Dom} f = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right).}$$