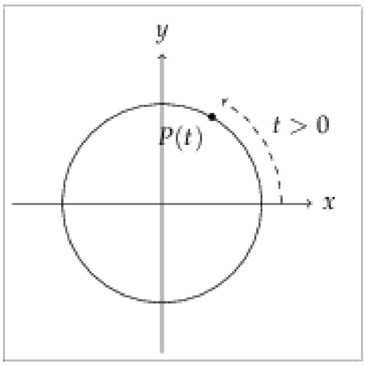
Funciones trigonométricas

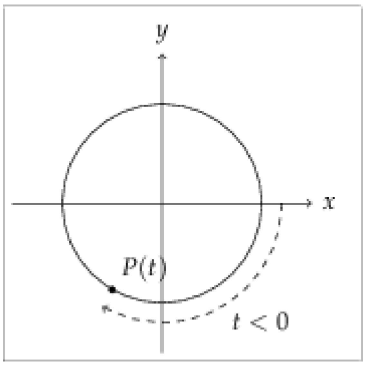
Funciones seno y coseno

Cosideremos la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1. Llamemos $P(t)$ al punto de la circunferencia al cual se llega recorriendo sobre la circunferencia una longitud de arco igual a $|t|$, partiendo del punto $(0,1)$,

- en sentido antihorario si $t \geq 0$

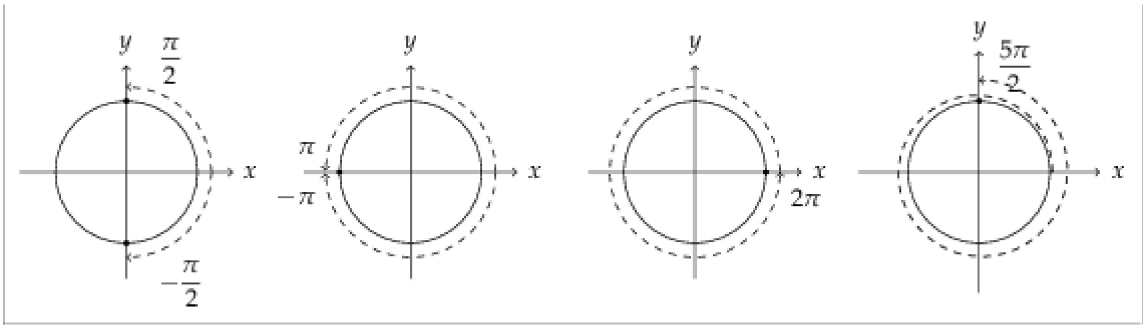


- en sentido horario si $t < 0$



Ubiquemos $P(t)$ para algunos valores de t. Recordemos, al efecto, que como el radio es 1, la longitud de la circunferencia es 2π.

- Para $t = 0$, nos quedamos en el punto $(1,0)$. Por lo tanto, $P(0) = (1,0)$.
- Si $t = \frac{\pi}{2}$, recorremos un cuarto de circunferencia en sentido antihorario. Y por lo tanto $P\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1)$.
- Si $t = -\frac{\pi}{2}$, recorremos también un cuarto de circunferencia, pero en sentido horario. Entonces tenemos $P\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (0,-1)$.
- Si $t = \pi$, tenemos que recorrer media circunferencia, en sentido antihorario. Así es que llegamos al $(-1,0)$. Cuando $t = -\pi$, también hay que recorrer media circunferencia, pero en el otro sentido. Nuevamente quedamos ubicados en el $(-1,0)$. Por esto, $P(\pi) = P(-\pi) = (-1,0)$.
- Si $t = 2\pi$, debemos dar una vuelta entera, y volvemos al punto de partida; $P(2\pi) = P(0) = (1,0)$.
- Si $t = \frac{5\pi}{2}$, habremos dado cinco cuartos de vuelta; es decir, una vuelta entera y un cuarto más. Resulta $P\left(\frac{5\pi}{2}\right) = (0,1)$.



En general,

$$P(t) = P(t + 2k\pi) \text{ para todo } k \in \mathbb{Z},$$

donde $2k\pi$ representa un múltiplo entero de 2π (es decir, un número entero de vueltas).

Estamos ya en condiciones de presentar las funciones seno y coseno.

Dado $t \in \mathbb{R}$, si $P(t) = (x, y)$, es:

$$\cos(t) = x, \quad \operatorname{sen}(t) = y.$$

Es decir, para cada t, coseno de t y seno de t son, respectivamente, abscisa y ordenada del punto $P(t)$:

$$P(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)).$$

Retomando los valores de t para los que anteriormente ubicamos $P(t)$, calculamos su seno y su coseno:

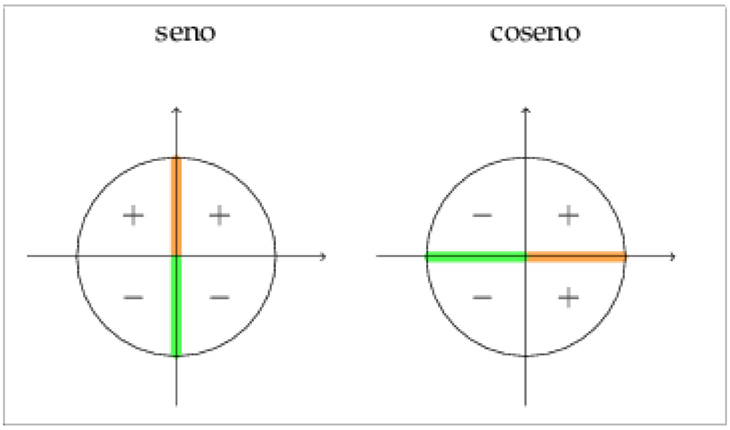
t	$P(t)$	$\cos(t)$	$\operatorname{sen}(t)$
0	$(1,0)$	1	0
$\frac{\pi}{2}$	$(0,1)$	0	1
$-\frac{\pi}{2}$	$(0,-1)$	0	-1
π	$(-1,0)$	-1	0
$-\pi$	$(-1,0)$	-1	0
2π	$(1,0)$	1	0
$\frac{5\pi}{2}$	$(0,1)$	0	1

Por lo que observamos antes, vale

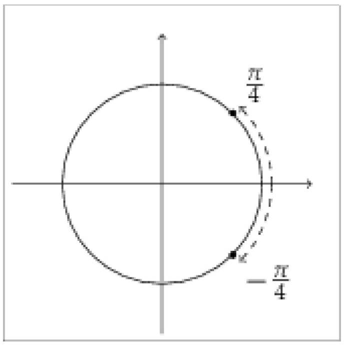
$$\boxed{\cos(t) = \cos(t + 2k\pi) \text{ y } \operatorname{sen}(t) = \operatorname{sen}(t + 2k\pi) \text{ para } k \in \mathbb{Z}.}$$

Por ello se dice que son funciones periódicas, de período 2π.

Observemos también el signo del seno y del coseno según el cuadrante en el que se encuentre $P(t)$:



Así, por ejemplo, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$, $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) < 0$ y $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) > 0$.

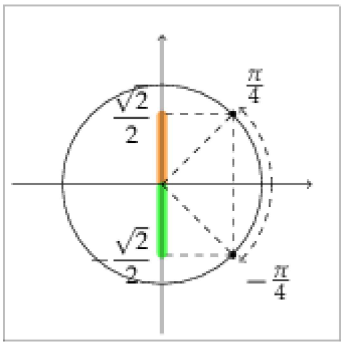


Armemos una tabla con algunos valores que nos serán útiles de aquí en adelante:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen}(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

A partir de ellos podemos deducir muchos otros valores, estudiando su ubicación en la circunferencia y considerando los signos de las coordenadas según el cuadrante:

- $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



- $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.