PRÁCTICA 1

VECTORES EN $\mathbb{R}^2$ y EN $\mathbb{R}^3$

Ejercicio 1.- Efectuar las operaciones indicadas.

a) $A + B$; $A + 2B$; $A - B$; $A + (1/2)B$; $A - 3B$, si $A = (3,2)$ y $B = (2,4)$

b) $A - 3B$; $A + C - B$; $2A - 2(C + B)$, si $A = (1,2,0)$; $B = (2,0,0)$ y $C = (1,1,1)$

Ejercicio 2.- Hallar, si es posible, x; y; z tales que

a) $(x, x+1) = (3, y)$

b) $(2x + y, x - 2y) = (1,3)$

c) $(2,4) = (2x + y, x - 2y)$

d) $(1,2,3) = x(2,4,3) + y(1,2,12) + z(0,0,3)$

Ejercicio 3.- Encontrar las coordenadas del punto medio del segmento AB para

a) $A = (-2,-1)$; $B = (4,-1)$

b) $A = (1,0,5)$; $B = (2,4,7)$

Ejercicio 4.- Calcular la longitud de los vectores

$(3,0)$; $(2,1)$; $(-3,-4)$; $(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3})$; $(-2,3,0)$; $3(2,3,6)$

Ejercicio 5.- Graficar en el plano el conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \|(x, y)\| = 1\}$

Ejercicio 6.- Hallar la distancia entre A y B si

a) $A = (1,-3)$; $B = (4,1)$

b) $A = (4,-2,6)$; $B = (3,-4,4)$

c) $A = (1,2,-3)$; $B = (3,-2,0)$

Ejercicio 7.- Determinar todos los valores de k tales que

a) $\|A\| = 2$ si $A = (1, k, 0)$

b) $d(A, B) = 2$ si $A = (1,1,1)$; $B = (k,-k,2)$

c) $\|A\| = 1$ si $A = k(2,2,1)$

Ejercicio 8.- Si $\mathbf{v} = (2,-1,1)$; $\mathbf{w} = (1,0,2)$; $\mathbf{u} = (-2,-2,1)$, calcular

a) $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|$

b) $\|\mathbf{v}\|+\|\mathbf{w}\|$

c) $\|3\mathbf{v}+3\mathbf{w}\|$

d) $\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|$

e) $\left\| \dfrac{1}{\|\mathbf{w}\|}\,\mathbf{w} \right\|$

f) $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}-\mathbf{u}\|$

Ejercicio 9.- En cada caso encontrar los dos vectores unitarios paralelos a A

a) $A = (3,-1)$ b) $A = (0,3,0)$ c) $A = (2,-3,6)$ d) $A = (a,b,c)$

Ejercicio 10.- a) Sean $A = (1,2)$; $B = (-1,-2)$; $C = (-2,1)$; $D = (1,0)$; $E = (0,0)$; $F = (x, y)$

Calcular $A \cdot B$; $A \cdot C$; $A \cdot E$; $B \cdot C$;

$B \cdot (C + D)$; $(D - C) \cdot A$; $F \cdot A$; $F \cdot E$

b) Sean $A = (1,1,1)$; $B = (1,-1,0)$; $C = (2,-1,-1)$; $D = (2,3,-1)$; $E = (-1,0,2)$

Calcular $A \cdot B$; $A \cdot C$; $A \cdot (B + C)$; $A \cdot (2B - 3C)$;

$A \cdot D$; $A \cdot E$; $D \cdot (A + E)$

Ejercicio 11.- a) Encontrar y representar en el plano todos los vectores (x, y) ortogonales a

i) $A = (1,2)$ ii) $E_1 = (1,0)$ iii) $E_2 = (0,1)$

b) encontrar todos los vectores (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ ortogonales a

i) $E_1 = (1,0,0)$ ii) $E_2 = (0,1,0)$ iii) $E_3 = (0,0,1)$

iv) E_1 y E_2 v) E_1 y E_3 vi) E_2 y E_3

Ejercicio 12.- Dados $A = (1,-2)$ y $B = (3,4)$, hallar todos los vectores (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tales que $A \cdot (x, y) = A \cdot B$

Ejercicio 13.- a) Encontrar un vector ortogonal a (1,1) de longitud 8, ¿es único?

b) encontrar todos los vectores ortogonales a (0,0,1) de longitud 1; dibujarlos.

c) Encontrar un vector que sea ortogonal a A y a B si $A = (1,2,-1)$ y $B = (2,0,1)$

Ejercicio 14.- Hallar el ángulo que forman A y B en los siguientes casos

a) $A = (1,1)$; $B = (-1,0)$ b) $A = (1,2)$; $B = (-2,1)$

c) $A = (1, \sqrt{3})$; $B = (-2, 2\sqrt{3})$ d) $A = (2,1,1)$; $B = (1,-1,2)$

Ejercicio 15.- En cada caso, encontrar B tal que

a) si $A = (1,1)$, $\alpha(A, B) = \pi / 4$ y $\|B\| = 2$

b) si $A = (-1,0)$, $\alpha(A, B) = \pi / 3$ y $\|B\| = 1$

Ejercicio 16.- Sea A un vector de longitud 3. Si B es un vector tal que $\alpha(A, B) = \pi / 4$ y $(A - B)$ es ortogonal a A, calcular $\|B\|$.

Ejercicio 17.- Encontrar una ecuación paramétrica de

a) la recta que pasa por $(1,3,–1)$ y tiene dirección $(1,–2,2)$

b) la recta que pasa por $(1,1)$ y $(2,3)$

c) la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta que contiene a $A = (2,–2,1)$ y $B = (–3,2,1)$

d) dos rectas distintas L_1 y L_2 que pasen por $(–2,1,2)$ y sean perpendiculares a la recta $L: \; X = \mu (2,2,–2) + (1,0,1)$

Ejercicio 18.- Encontrar la intersección de cada par de rectas

a) $X = \mu (2,2,2) + (1,0,0)$ $\qquad$ $X = \mu (–1,–1,–1) + (0,–1,–1)$

b) $X = \mu (1,3,1) + (0,–1,2)$ $\qquad$ $X = \mu (2,–1,0) + (1,1,2)$

c) $X = \lambda (2,–2,1) + (3,0,2)$ $\qquad$ $X = \lambda (2,1,–1) + (–1,1,2)$

Ejercicio 19.- Si $A = (1,2,2)$; $B = (–1,1,2)$; $C = (–2,2,–1)$, calcular

$A \times B$; $B \times A$; $A \times C$; $A \times (B \times C)$; $(A \times B) \times C$; $(A \times B) \cdot A$; $(A \times B) \cdot C$

Ejercicio 20.- Hallar **v**, de norma 1, que sea ortogonal a $A = (1,1,1)$ y a $B = (1,1,–1)$

Ejercicio 21.- Calcular el área de

a) el paralelogramo de vértices O, A, B y $(A + B)$ si $A = (2,1,0)$ y $B = (1,5,0)$

b) el triángulo de vértices $A = (1,3,2)$; $B = (1,5,0)$ y $C = (1,1,–2)$

Ejercicio 22.- Dar una ecuación del plano Π.

a) Π es perpendicular a $N = (1,2,–1)$ y pasa por $P = (5,3,3)$

b) Π contiene a los puntos $A = (2,–1,3)$; $B = (2,1,1)$ y $C = (3,3,2)$

c) Π contiene a los ejes x e y

d) Π es paralelo al plano Π': $3x + y – 4z = 2$ y pasa por el punto $P = (1,1,–2)$

Ejercicio 23.- Sean $\Pi : 2x – y + 3z = 5$; Π': $x + 3y – z = 2$

$L: \; X = \alpha (1,–1,–1) + (1,0,–2)$; $L' : X = \alpha (3,5,1) + (0,1,2)$.

Calcular: $L \cap \Pi$; $L' \cap \Pi$; $\Pi \cap \Pi'$.

Ejercicio 24.- Sean L: $X = \beta(k^2+1,\ k,\ k+7)$ y Π: $x + 2y - 3z = 2$.
Determinar todos los valores de k para los cuales $L \cap \Pi = \varnothing$

Ejercicio 25.- Si $L : X = \alpha(1,-1,3) + (0,2,1)$ y $A = (1,2,-3)$,

a) hallar una ecuación del plano Π que contiene a L y al punto A

b) hallar una ecuación de la recta L' perpendicular a Π que pasa por A

c) calcular $L \cap \Pi$ y $L' \cap \Pi$.

Ejercicio 26.- a) Dar una ecuación del plano Π que contiene a las rectas

L: $X = \lambda(1,2,-1) + (3,0,0)$ y L': $X = \lambda(-2,-4,2) + (0,1,1)$

b) Si L: $X = \lambda(1,2,0) + (1,1,1)$, dar una ecuación del plano Π que contiene a L y tal que la recta L': $X = \lambda(-1,0,1) + (1,2,3)$ es paralela a Π.

Ejercicio 27.- Sean $\Pi : x_1 + x_2 + x_3 = 5$ y L: $X = \lambda(1,1,-2)$. Hallar una recta L' contenida en Π que sea perpendicular a L. ¿Es única?

Ejercicio 28.- Sea $\Pi : 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1$

a) Dar las ecuaciones de dos rectas L_1 y L_2, contenidas en Π y perpendiculares entre sí

b) Dar la ecuación de una recta L' contenida en Π que sea perpendicular a la recta
L: $X = t(-2,3,1) + (2,1,2)$

Ejercicio 29.- Hallar la distancia entre $P = (2,2,1)$ y el plano que contiene a las rectas
L: $X = \lambda(1,2,-1) + (1,3,2)$ y L': $X = \alpha(2,-1,3) + (3,2,5)$

Ejercicio 30.- Sea $P = (2,1,-1)$

a) si $\Pi : x_1 + x_2 - x_3 = 3$, ¿cuál es el punto de Π a menor distancia de P?

b) si L: $X = \lambda(1,3,1) + (2,2,0)$, ¿cuál es el punto de L a menor distancia de P?

Ejercicio 31.- Sean L: $X = \beta(2, 3, -1)$ y Π: $x_1 + 2x_2 = 0$. Determinar

a) todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ que están a distancia $\sqrt{5}$ de Π

b) todos los puntos de L que están a distancia $\sqrt{5}$ de Π.

Ejercicio 32.- Si Π_1: $3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 1$ y Π_2: $-3x_2 + 4x_3 = 3$, hallar todos los puntos P de $\mathbb{R}^3$ que verifican

a) $d(P, \Pi_1) = d(P, \Pi_2)$ b) $d(P, \Pi_1) = d(P, \Pi_2) = 2$

EJERCICIOS SURTIDOS

1. Demostrar las siguientes igualdades e interpretarlas geométricamente

a) $\| A - B \| = \| A + B \| \Leftrightarrow A \cdot B = 0$

b) $\| A + B \|^2 = \| A \|^2 + \| B \|^2 \Leftrightarrow A \cdot B = 0$ (*Teorema de Pitágoras*)

2. Sean la recta $\mathbb{L}: \lambda(2,1,-1) + (1,-1,2)$ y los puntos A = (1,0,2) y B = (3,–1,6).

Hallar todos los puntos $P \in \mathbb{L}$ tales que el triángulo ABP es rectángulo en P.

3. Sean P=(–1,2,0) , Q=(–2,1,1) y $\mathbb{L}$:(1,1, –1)+λ(0, –1,3).

Dar una ecuación del plano Π que contiene a la recta paralela a $\mathbb{L}$ que pasa por P, y a la recta paralela a $\mathbb{L}$ que pasa por Q.

4. Sean el plano $\Pi: 2x - 2y + z = 1$ **,** $A = (1,1,1)$ ***y*** $B = (3,2,-1)$**.** Hallar todos los puntos C y $D \in \Pi$ tales que $ABCD$ es un cuadrado.

5. Sean $\mathbb{L}_1: \lambda(0,1,-1) + (0,-1,0)$ y $\mathbb{L}_2: \lambda(1,1,1) + (2,3,0)$.

Encontrar, si es posible, un plano Π tal que $d(P,\Pi) = 2\sqrt{6}$ para todo $P \in \mathbb{L}_1$ y para todo $P \in \mathbb{L}_2$.

6. Sean $\Pi_1: 3x - 2y + z = 4$, y Π_2 el plano que contiene a los puntos A=(0,1,1), B=(3,–1, –1) y C=(3,0,1).
Hallar todos los puntos del plano Π_1 que están a distancia 2 del plano Π_2.

7. Sean $\Pi_1: 7x - 5y - 2z = 0$, $\Pi_2: 5x - 4y - z = 0$, y $\mathbb{L}$ la recta que pasa por los puntos $P = (-2,3,-3)$ y $Q = (-1,2,-1)$. Hallar todos los planos Π que verifican simultáneamente:

i) $\Pi \cap \Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing$ ii) $d(R,\Pi) = \sqrt{14}$ para todo $R \in \mathbb{L}$.

8. Sean $\mathbb{L}_1 : \lambda(k^2+k, k, k-1)$; $\mathbb{L}_2 : \lambda(4,1,-1)+(2k,0,2k)$ y $\Pi : x-2y+2z=3$.
Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $d(P,\Pi)=d(Q,\Pi)$ para todo $P \in \mathbb{L}_1$ y todo $Q \in \mathbb{L}_2$

9. Sean $\Pi : x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$, $\mathbb{L} : \lambda(0,-2,1)+(1,2,3)$ y P=(−1,1,2).
Encontrar una recta $\mathbb{L}'$ que satisfaga simultáneamente:
$i)$ $\mathrm{P} \in \mathbb{L}'$ $\quad ii)$ $\mathbb{L} \cap \mathbb{L}' \neq \emptyset$ $\quad iii)$ $\mathbb{L}'$ es paralela a Π.

10. Dadas $\mathbb{L}:\lambda(1,2,1)+(0,1,1)$ y $\mathbb{L}':\lambda(2,-1,-2)+(1,1,0)$, hallar todos los planos Π tales que
$\Pi \cap \mathbb{L}' = \emptyset$ y $d(P,\Pi)=\sqrt{2}$ para todo $P \in \mathbb{L}$.

11. Sean $\mathbb{L}_1:\lambda(1,-2,2)+(0,1,-1)$; $\mathbb{L}_2:\lambda(0,1,-1)+(-2,1,-1)$ y $\mathbb{L}_3:\lambda(1,3,-1)+(0,-5,0)$.

Encontrar, si es posible, una recta $\mathbb{L}$ tal que $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L} \neq \emptyset$; $\mathbb{L}_3 \cap \mathbb{L} \neq \emptyset$ y $\mathbb{L} \perp \mathbb{L}_3$.

12. Sean en $\mathbb{R}^3$ el plano $\Pi : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$, P=(2,2,2) y Q=(1,0,1).
Determinar un plano Π' que contenga a P, a Q, y al punto R de Π tal que d(P,R)=d(P, Π).