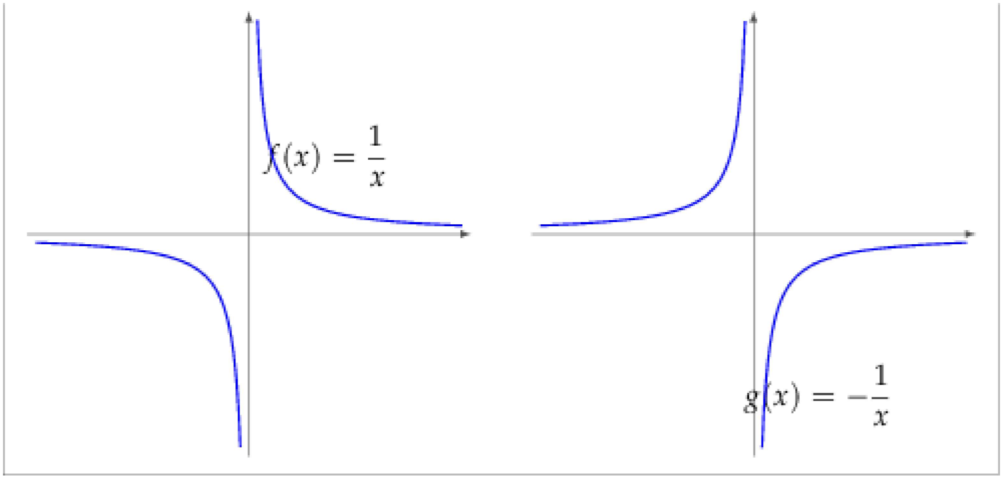
Funciones homográficas

Las ***funciones homográficas*** son aquellas de la forma

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ y $a.d - b.c \neq 0$.

Las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = -\frac{1}{x}$, son las funciones homográficas más "básicas". Sus gráficos son:



El gráfico de cualquier función homográfica es esencialmente como el de alguna de estas dos funciones. Una de las mayores diferencias se encuentra en la posición de las asíntotas vertical y horizontal.

Estudiemos el comportamiento de las funciones homográficas con un ejemplo.

Ejemplo 1. Hallar dominio, ecuaciones de las asíntotas, ceros y conjuntos de positividad y de negatividad, y hacer un gráfico aproximado de f, para $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$.

Notemos que $a = 3$, $b = -5$, $c = 1 \neq 0$, $d = -2$ y $a.d - b.c = -6 + 5 \neq 0$, por lo que f es una función homográfica.

Para calcular el dominio de f, recordemos que no podemos dividir por cero, por lo que tenemos excluir del dominio los valores de x que hagan cero el denominador, que en este caso es $x - 2$:

$$x - 2 \neq 0$$

$$x \neq 2$$

Por lo tanto

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}.}$$

El único candidato para asíntota vertical de f es, entonces, $x = 2$. Calculamos el límite, por ejemplo cuando x tiende a 2 por derecha:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{3x-5}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\overbrace{3x-5}^{\to 1}}{\underbrace{x-2}_{\to 0^+}} = +\infty,$$

y como da infinito, podemos afirmar que

$$\boxed{x = 2 \text{ es asíntota vertical de } f.}$$

Como vamos a realizar un gráfico aproximado de f, nos conviene estudiar también el límite cuando x tiende a 2 por izquierda:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3x-5}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\overbrace{3x-5}^{\to 1}}{\underbrace{x-2}_{\to 0^-}} = -\infty,$$

Por otro lado,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-5}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3-\dfrac{5}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(3-\dfrac{5}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1}\cdot \frac{\overbrace{\left(3-\overbrace{\dfrac{5}{x}}^{\to 0}\right)}^{\to 3}}{\underbrace{\left(1-\underbrace{\dfrac{2}{x}}_{\to 0}\right)}_{\to 1}} = \frac{3}{1} = 3,$$

y de la misma manera obtenemos $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$, por lo que

$$\boxed{y = 3 \text{ es asíntota horizontal de } f.}$$

Para hallar los ceros de f debemos resolver la ecuación $f(x) = 0$, es decir

$$\frac{3x-5}{x-2} = 0,$$

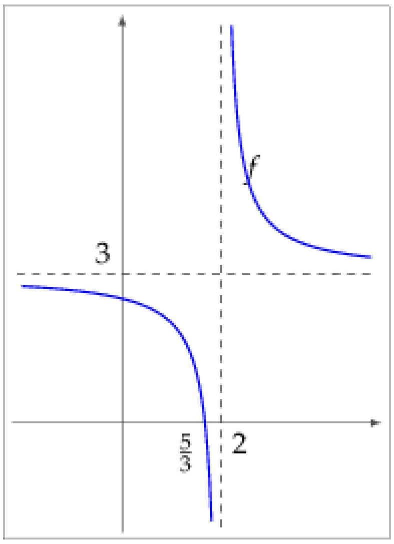
y esto sucede si y solo si $3x-5=0$, o equivalentemente, cuando $x = \frac{5}{3}$. Como es una función continua en su dominio, podemos estudiar su positividad y negatividad aplicando el Corolario del Teorema de Bolzano a f en su dominio:

x	$\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)$	$\frac{5}{3}$	$\left(\frac{5}{3};2\right)$	2	$(2;+\infty)$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
pues	$f(0)>0$		$f\left(\frac{11}{6}\right)<0$		$f(3)>0$

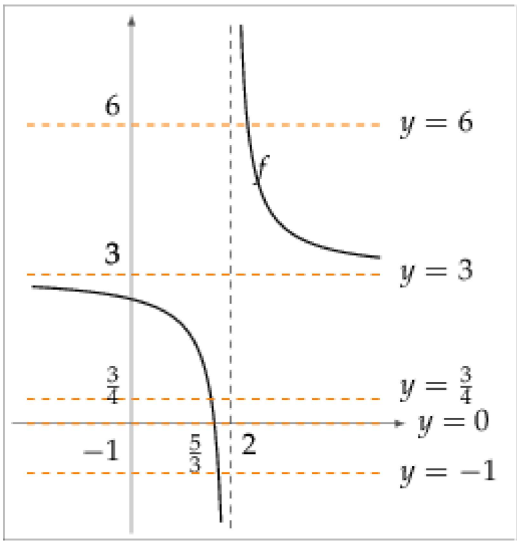
De aquí deducimos:

$$\boxed{C^0 = \left\{\frac{5}{3}\right\}, C^+ = \left(-\infty;\frac{5}{3}\right) \cup (2;+\infty), C^- = \left(\frac{5}{3};2\right).}$$

Un gráfico aproximado de f es



Para calcular la imagen de f, debemos ver para qué valores de y podemos hallar un x tal que $f(x) = y$. Notemos que si graficamos una recta horizontal por el valor de y que estamos considerando, estas rectas intersecan el gráfico de f salvo para $y = 3$, que es la asíntota horizontal.



Analíticamente, vemos que la ecuación $\dfrac{3x-5}{x-2} = y$ se puede resolver para cualquier y que sea distinto de 3 (y $x \neq 2$ porque, recordemos, no se puede dividir por cero):

$$\frac{3x-5}{x-2} = y \underset{x\neq 2}{\Leftrightarrow} 3x-5 = y.(x-2) \Leftrightarrow 3x-5 = xy-2y \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2y-5 = xy-3x \Leftrightarrow 2y-5 = x.(y-3) \underset{y\neq 3}{\Leftrightarrow} \frac{2y-5}{y-3} = x.$$

Así, la imagen de f es

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{3\}}.$$

En general:

Si $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ es una función homográfica, su dominio se encuentra excluyendo aquellos valores de x que hacen cero el denominador:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}.}$$

Como el límite $\lim\limits_{x\to -\frac{d}{c}} f(x)$ da infinito, la función homográfica f tiene una asíntota vertical de ecuación $x=-\frac{d}{c}$.

Para hallar la ecuación de la asíntota horizontal, hay que calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(a+\frac{b}{x}\right)}{x\left(c+\frac{d}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(a+\frac{b}{x}\right)}{\cancel{x}\left(c+\frac{d}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1}\cdot\frac{\overbrace{\left(a+\overbrace{\frac{b}{x}}^{\to 0}\right)}^{\to a}}{\underbrace{\left(c+\underbrace{\frac{d}{x}}_{\to 0}\right)}_{\to c}}=\frac{a}{c};$$

de la misma manera obtenemos $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\frac{a}{c}$. Por lo tanto

la función homográfica f tiene una asíntota horizontal de ecuación $y=\frac{a}{c}$

y su imagen es

$$\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}-\left\{\frac{a}{c}\right\}.$$

Otra forma de expresar una función homográfica

Así como las funciones cuadráticas se pueden expresar de tres maneras distintas (forma polinómica, forma canónica y forma factorizada), las funciones homográficas también se pueden expresar de la siguiente manera:

$$f(x)=\frac{A}{BX+C}+D,$$

con $A,B,C,D\in\mathbb{R}$ y $B\neq 0$.

Ejemplo 2. Hallar dominio, ecuaciones de las asíntotas, ceros y conjuntos de positividad y de negatividad, y hacer un gráfico aproximado de f, para $f(x)=\frac{-6}{4x+3}-1,$

donde $A=-6$, $B=4\neq 0$, $C=3$ y $D=-1$.

Para calcular el dominio de f, recordemos que no podemos dividir por cero, por lo que tenemos excluir del dominio los valores de x que hagan cero el denominador. En este caso, el denominador, $4x+3$ es cero si y solo si $x=-\frac{3}{4}$, por lo que

$$\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{4}\right\}.$$

El único candidato para asíntota vertical de f es, entonces, $x=-\frac{3}{4}$. Si calculamos el límite, por ejemplo cuando x tiende a $-\frac{3}{4}$ por derecha, nos da $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{4}^+}f(x)=-\infty$, por lo que podemos afirmar que $x=-\frac{3}{4}$ es asíntota vertical de f. Además, $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{4}^-}f(x)=+\infty$.

En este caso, el cálculo del límite cuando x tiende a infinito es más fácil que en el caso anterior:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-6}{4x+3}-1=\lim_{x\to\pm\infty}\overbrace{\frac{-6}{4x+3}}^{\to 0}-1=0-1=-1,$$

y por lo tanto f tiene una asíntota horizontal de ecuación $y=-1$. Su imagen es, entonces, $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$.

Para hallar los ceros de f debemos resolver la ecuación $f(x) = 0$, es decir

$$\frac{-6}{4x+3} - 1 = 0.$$

Despejemos x:

$$\frac{-6}{4x+3} = 1 \underset{x \neq -\frac{3}{4}}{\Leftrightarrow} -6 = 1.(4x+3) \Leftrightarrow -6 = 4x+3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -9 = 4x \Leftrightarrow -\frac{9}{4} = x$$

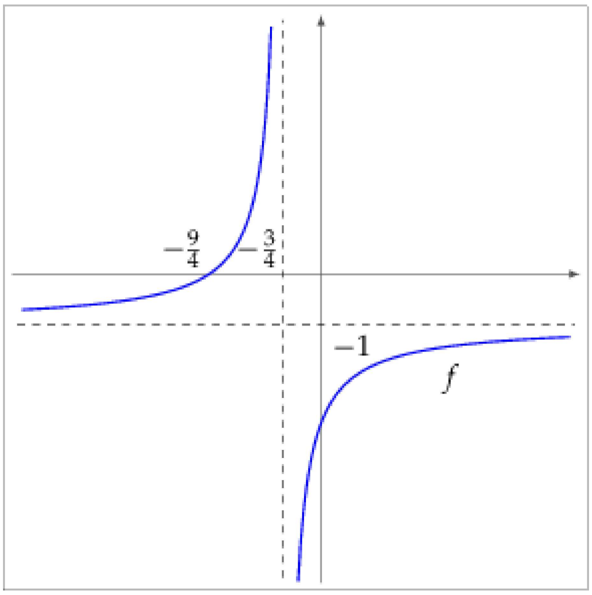
Como es una función continua en su dominio, podemos estudiar su positividad y negatividad aplicando el corolario del Teorema de Bolzano a f en su dominio:

x	$\left(-\infty; -\frac{9}{4}\right)$	$-\frac{9}{4}$	$\left(-\frac{9}{4}; -\frac{3}{4}\right)$	$-\frac{3}{4}$	$\left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$
pues	$f(-3) < 0$		$f(-2) > 0$		$f(0) < 0$

De aquí deducimos:

$$\boxed{C^0 = \left\{-\frac{9}{4}\right\}, C^+ = \left(-\frac{9}{4}, -\frac{3}{4}\right), C^- = \left(-\infty, -\frac{9}{4}\right) \cup \left(-\frac{3}{4}, +\infty\right).}$$

Un gráfico aproximado de f es



En general:

Si $f(x) = \dfrac{A}{BX+C} + D$ es una función homográfica, su dominio se encuentra excluyendo aquellos valores de x que hacen cero el denominador:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{C}{B}\right\}.}$$

Como el límite $\lim\limits_{x \to -\frac{C}{B}} f(x)$ da infinito, obtenemos que

$$\boxed{\text{la función homográfica } f \text{ tiene una asíntota vertical de ecuación } x = -\frac{C}{B}.}$$

Para hallar la ecuación de la asíntota horizontal, hay que calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{A}{BX+C} + D = \lim_{x \to \pm\infty} \overbrace{\frac{A}{Bx+C}}^{\to 0} + D = 0 + D = D;$$

de la misma manera obtenemos $\lim_{x \to -\infty} f(x) = D$. Por lo tanto

$$\boxed{\text{la función homográfica } f \text{ tiene una asíntota horizontal de ecuación } y = D}$$

y su imagen es

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{D\}.}$$

Notemos que es sencillo pasar de la forma $f(x) = \dfrac{A}{BX+C} + D$ a la forma $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, sacando denominador común. En el Ejemplo 2, sería:

$$f(x) = \frac{-6}{4x+3} - 1 = \frac{-6 - 1.(4x+3)}{4x+3} = \frac{-6-4x-3}{4x+3} = \frac{-4x-9}{4x+3}.$$

(Notar que el dominio, las asíntotas y la imagen dan lo mismo porque es la misma función.)