Método de sustitución

Método de integración por sustitución

Recordemos cómo se calcula la derivada de la composición (Regla de la cadena):

Si F y g son funciones derivables, entonces

$$(F \circ g(x))' = (F(g(x)))' = F'(g(x)).g'(x).$$

Nos queda entonces que la derivada de F compuesta con g en un valor x es F' evaluada en $g(x)$ multiplicada por la derivada de g en x.

Integremos a un lado y al otro:

$$\int (F \circ g(x))' dx = \int F'(g(x)).g'(x)dx.$$

Obtenemos:

$$F \circ g(x) + C = \int F'(g(x)).g'(x)dx.$$

Luego, si queremos integrar $F'(g(x)).g'(x)$, nos basta con calcular F porque ya conocemos g.

El ***método de sustitución*** nos ayuda a integrar una función que proviene de haber derivado una composición de funciones, simplificando la notación a través de la sustitución de $g(x)$ por una nueva variable u, y $g'(x)dx$ por du

$$\int F'\Big(\overbrace{g(x)}^{u} \Big) \overbrace{g'(x)dx}^{du} = F\Big(\overbrace{g(x)}^{u} \Big) + C.$$

Nos sugiere que nos "olvidemos" de g y de g' y nos concentremos en hallar F.

Para comprender en qué consiste este método, veamos unos ejemplos:

Ejemplo 1. Calcular $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$.

La función $h(x) = 2x\sqrt{x^2+1}$ no está en tabla, y no es ni una suma ni una resta de funciones. Podríamos sacar el 2 que está multiplicando, pero esto no nos facilitaría la tarea.

Lo que podemos apreciar es que hay una composición: la función $g(x) = x^2+1$ está "adentro" de la función raíz cuadrada. Y, más aún, también vemos que está la derivada de g multiplicando: $g'(x) = 2x$. Si la función que está dentro de la integral viniera de la derivada de una composición, tenemos identificadas muchas partes:

$$(F \circ g(x))' = F'(g(x)).g'(x).$$

Nos faltaría identificar F' y deducir quién es F. Este método nos ayuda a simplificar la notación para poder finalizar el cálculo de la integral.

Vamos a sustituir $g(x)$ por una nueva variable que llamaremos u. Y sustituiremos $g'(x)dx$ por du.

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx \underset{\substack{\downarrow \\ u = x^2+1 \\ du = (x^2+1)'dx \\ = 2xdx}}{=} \int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}}du \underset{\substack{\downarrow \\ \text{integral} \\ \text{por tabla}}}{=} \frac{1}{\frac{1}{2}+1}u^{\frac{1}{2}+1}+C$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}}u^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C = \boxed{\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C}$$

Cuando terminamos de integrar, volvemos a la variable original (que en este caso es x).

Verifiquemos que realmente llegamos a la solución buscada. Para esto, tenemos que derivar y ver si nos da la función de adentro de la integral:

$$\left[\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C\right]' = \left[\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]' + [C]' = \frac{2}{3}\left[(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]' + 0 =$$
$$= \frac{2}{3}.\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{3}{2}-1}(x^2+1)' = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}.\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}.2x = \sqrt{x^2+1}.2x = 2x\sqrt{x^2+1}$$

como queríamos.

Ejemplo 2. Calcular $\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+7}\,dx$.

La función a integrar no está en tabla, no hay sumas ni restas, ni constantes que podamos "sacar afuera". A diferencia del ejemplo anterior, la composición aquí no es tan evidente. Pero el hecho de que haya una función polinómica de grado 3 y otra de grado 2 podría hacernos sospechar que la segunda puede estar relacionada con la derivada de la primera. Propongamos $u = x^3 - 3x^2 + 7$. Entonces $du = (x^3-3x^2+7)'dx = (3x^2-6x)dx = 3(x^2-2x)dx$. Y esta última expresión es el numerador, salvo por un 3 que está multiplicando. Para poder utilizar el método de sustitución, vamos a agregar este 3 de la siguiente manera:

$$\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+7}\,dx = \int 1.\frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+7}\,dx = \int \frac{3}{3}.\frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+7}\,dx = \int \frac{1}{3}.\frac{3(x^2-2x)}{x^3-3x^2+7}\,dx.$$

Ahora "sacamos afuera"' el $\frac{1}{3}$ y aplicamos sustitución como antes:

$$\frac{1}{3}\int \frac{3(x^2-2x)}{x^3-3x^2+7}\,dx \underset{\substack{\downarrow \\ u = x^3-3x^2+7 \\ du = (x^3-3x^2+7)'dx \\ = 3(x^2-2x)dx}}{=} \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du \underset{\substack{\downarrow \\ \text{integral} \\ \text{por tabla}}}{=} \frac{1}{3}\ln(u)+C = \boxed{\frac{1}{3}\ln(x^3-3x^2+7)+C}$$