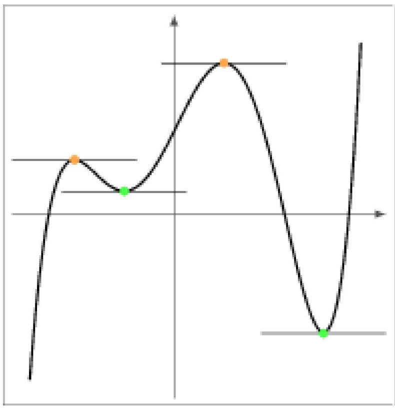
Extremos locales

Extremos relativos o locales

Si f es una función derivable que tiene un máximo o un mínimo relativo o local en un punto x_0, la recta tangente al gráfico de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ es horizontal, como puede verse en el siguiente gráfico:



es decir, si f tiene un extremo (máximo o mínimo) local en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.

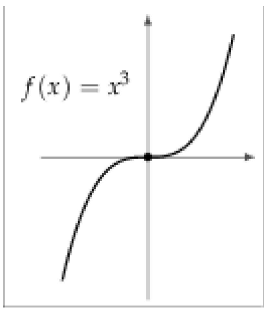
Ejemplo. Continuemos analizando la función $f(x) = x^3 - 3x$ (recordar que ya hemos hecho el estudio de crecimiento y decrecimiento de esta función). Busquemos ahora sus máximos y mínimos locales. Como $\mathrm{Dom}(f') = \mathbb{R}$, los candidatos a extremos relativos son aquellos puntos donde $f'(x) = 0$. Los ceros de $f'(x) = 3x^2 - 3$ son -1 y 1. Para ver si son máximos o mínimos relativos de f analicemos el crecimiento y decrecimiento de f a izquierda y derecha, cerca de cada uno de estos puntos, utilizando la información de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f que ya habíamos obtenido:

- f es creciente en $(-\infty; -1)$ (a la izquierda de -1) y es decreciente en $(-1; 1)$ (a la derecha de -1); concluimos que f tiene un máximo local en $x = -1$
- f es decreciente en $(-1; 1)$ (a la izquierda de 1) y es creciente en $(1; +\infty)$ (a la derecha de 1); luego, f tiene un mínimo local en $x = 1$

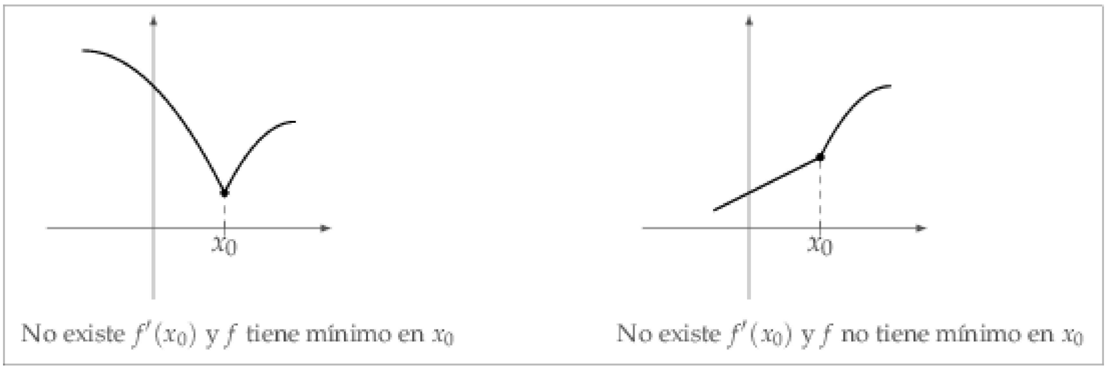
Concluimos que:

$$\boxed{f \text{ tiene un máximo local en } x = -1 \text{ y un mínimo local en } x = 1}$$

Es importante observar que la condición $f'(x_0) = 0$ ***no alcanza*** para asegurar que f tenga un extremo local en x_0. Por ejemplo, si $f(x) = x^3$, tenemos que $f'(x) = 3x^2$ que tiene un cero en $x = 0$. Sin embargo, como podemos ver en el gráfico de f, la función no tiene un máximo ni un mínimo local en $x_0 = 0$:



Por otro lado, una función f puede tener extremos locales en puntos en los cuales no es derivable, como en el primero de los gráficos siguientes. Nuevamente, debemos observar que la condición de que f no sea derivable en x_0 ***no alcanza*** para asegurar que f tenga un extremo relativo en x_0, como puede verse en el segundo de los gráficos:



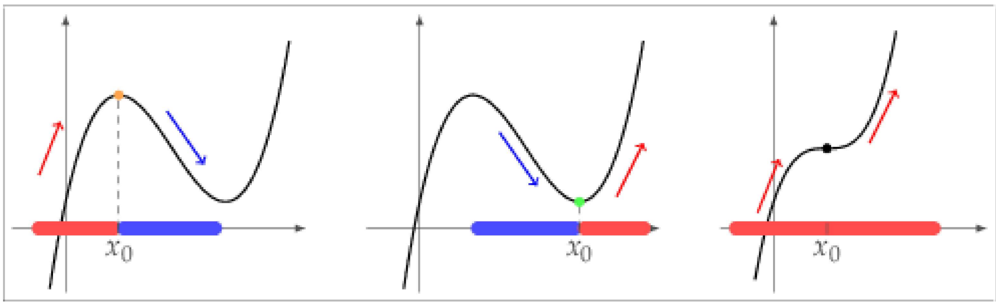
Puntos críticos para hallar extremos relativos

Como vimos anteriormente, si f es una función que tiene un extremo relativo en $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$, deberá ocurrir alguna de las dos situaciones siguientes:

- $f'(x_0) = 0$
- f no es derivable en x_0

Llamaremos ***puntos críticos de*** f a todos los $x \in \mathrm{Dom}(f)$ que cumplen alguna de estas dos condiciones. Estos puntos críticos son los ***candidatos*** a presentar máximos o mínimos relativos de f, pero como vimos, ***no todo punto crítico da un máximo o mínimo local de*** f.

¿Cómo podemos determinar si en un punto crítico x_0, la función f tiene un máximo o un mínimo local (o no tiene un extremo relativo)? Para una función f continua, la presencia de un extremo relativo en x_0 está determinada por un cambio en el crecimiento de la función a la izquierda y a la derecha de x_0, como ilustran los gráficos siguientes:



- Si f es creciente a la izquierda de x_0 y decreciente a su derecha, entonces f tiene un máximo local en x_0.
- Si f es decreciente a la izquierda de x_0 y creciente a su derecha, entonces f tiene un mínimo local en x_0.
- Si f es siempre creciente (o siempre decreciente), tanto a la derecha como a la izquierda de x_0, entonces f no tiene un extremo local en x_0.

Recordando la relación entre crecimiento y decrecimiento de f y el signo de su derivada f', para una función continua derivable a izquierda y a derecha de x_0, podemos dar el siguiente criterio:

Criterio de la primera derivada.

- Si $f'(x) > 0$ a la izquierda de x_0 y $f'(x) < 0$ a la derecha de x_0, entonces f tiene un máximo relativo en x_0.
- Si $f'(x) < 0$ a la izquierda de x_0 y $f'(x) > 0$ a la derecha de x_0, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.
- Si $f'(x)$ tiene el mismo signo a la izquierda y a la derecha de x_0, entonces f no tiene un máximo ni un mínimo relativo en x_0.

Ejemplo. Sea $f(x) = -3x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 3$. Hallar los extremos relativos de f.

Como f es un polinomio, es derivable en todo $\mathbb{R}$. Entonces, los puntos críticos de f, que serán nuestros candidatos para hallar los extremos relativos, son los $x \in \mathbb{R}$ tales que $f'(x) = 0$.

Tenemos que $f'(x) = -12x^3 + 24x^2 - 12x$. Factorizamos esta expresión para hallar sus ceros, sacando factor común $-12x$ y luego buscando las raíces de la cuadrática que se obtiene:

$$f'(x) = -12x^3 + 24x^2 - 12x = -12x(x^2 - 2x + 1) = -12x(x-1)^2$$

Ahora $f'(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$ o $x = 1$, con lo cual

Puntos críticos de $f = \{0, 1\}$.

Para determinar si son máximos, mínimos o no son extremos relativos, aplicamos el criterio de la primera derivada, para lo cual estudiamos el signo de f' (lo que nos da los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f). Teniendo en cuenta que f' es una función continua, hallamos sus intervalos de positividad y negatividad aplicando el corolario del Teorema de Bolzano: consideramos los ceros de f', que son $x = 0$ y $x = 1$, y estudiamos el signo de f' en los intervalos $(-\infty; 0)$, $(0, 1)$ y $(1; +\infty)$ determinados por estos puntos, en cada uno de los cuales f' tendrá signo constante.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
	$f'(-2) > 0$		$f'(0,5) < 0$		$f'(2) < 0$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$

Concluimos que f es creciente en $(-\infty; 0)$ y decreciente en $(0; +\infty)$ (ya que es decreciente en $(0; 1)$ y $(1; +\infty)$ y es continua en $x = 1$). En consecuencia, f tiene un máximo local en $x = 0$ y no tiene mínimos locales. Notar que $x = 1$ es un punto crítico que no da lugar a un extremo local, ya que $f'(x) < 0$ (es decir, f es decreciente) tanto a izquierda como a derecha de $x = 1$.

$$\boxed{f \text{ tiene un máximo local en } x = 0}$$