----------------------------------------------------------------

## Comentarios teóricos y ejemplos

## Resolución de ejercicios Surtidos de la Práctica 4

## Funciones Exponenciales y Logarítmicas

## Funciones Trigonométricas

## Ejercicios 1 a 10

++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

# EJERCICIOS SURTIDOS

**Ejercicio 1.-** Sean $f(x) = x^2 + 3x + 3$ , $g(x) = \ln(x)$ . Hallar el dominio, los ceros y los conjuntos de positividad y de negatividad de $h = g \circ f$ .

+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-

**Ej 1 Surtidos Pract 4**

$f(x) = x^2 + 3x + 3 \quad g(x) = \ln(x)$ y sea $h = g_{\circ} f$

Hallar Dom (h) , $C^0$ , $C^+$ , $C^-$ de h

---------------------------------------------

Calculamos $h = g_{\circ} f$

$h(x) = g_{\circ} f(x) = g\left(x^2 + 3x + 3\right) = \ln\left(x^2 + 3x + 3\right)$

Cálculo del Dom (h) :

Para poder calcular el ln el argumento debe ser un número mayor que 0

Planteamos eso :

$x^2 + 3x + 3 > 0$

Vamos a completar cuadrados a $x^2 + 3x + 3$ :

+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+

Nota : método de completación de cuadrados

vamos a escribir $x^2 + 3x + 3$ como un binomio al cuadrado del tipo $(x + a)^2$ más lo que sobre para que no cambie la expresión original

De acuerdo al doble producto del primer término por el segundo término que es 3 x

deducimos que el 1 er término es x y el segundo término (para que de 3 x) es $\frac{3}{2}$

porque $2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} = 3x$

Como el 2 do término debería aparecer al cuadrado para ser un binomio al cuadrado,
sumo y resto el cuadrado del segundo término (estoy sumando 0)
para no cambiar la expresión original

**Entonces :** $x^2+3x+3 = x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3 \implies$

$\implies \quad x^2+3x+3 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+3 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

**Efectivamente si desarrollamos llegaremos a la expresión original :**

$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4} = x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4} = x^2+3x+\frac{9}{4}+\frac{3}{4} = x^2+3x+3$

+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+

**Pero entonces resolver** $x^2+3x+3>0$ **es equivalente a resolver** $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

**acá vemos que para cualquier** $x\in\mathbb{R}$ **un número al cuadrado es positivo más otro número positivo siempre dará** $>0$

## Entonces $\text{Dom}(h)=\mathbb{R}$

----------------------------------

**Calculemos** $C^0$, $C^+$, $C^-$ **de h**

$h(x)=\ln\left(x^2+3x+3\right)$

$C^0=\{x\in\text{Dom}(h) : h(x)=0\}$

**Planteamos** $h(x)=0$

$\ln\left(x^2+3x+3\right)=0$ **aplicando la exponencial de base e (inversa del ln ) en ambos miembros :**

$e^{\ln\left(x^2+3x+3\right)}=e^0 \implies x^2+3x+3=1 \implies x^2+3x+3-1=0 \implies x^2+3x+2=0 \quad (*)$

**Completando cuadrados a** $x^2+3x+2$

$x^2+3x+2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ **reemplazamos en** $(*)$

$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0 \implies \left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \implies \sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}} \implies \left|x+\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2} \implies$

**las soluciones son :**

$x+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$ ó $x+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2} \implies x=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-\frac{2}{2}=-1$ ó $x=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-\frac{4}{2}=-2 \implies$

$\implies x=-1$ ó $x=-2$

**Éste es el conjunto de ceros de h (x)**

## $C^0=\{-2,-1\}$

----------------------------------

**Para** $C^+$, $C^-$ **de h**

**Como ln es continua en todo** $\mathbb{R}$

**usaremos el corolario del Teo de Bolzano para afirmar que entre dos ceros consecutivos**

**o bien** $h(x)>0$ **o** $h(x)<0$ **en dicho intervalo, entre raíces consecutivas**

**Tenemos los ceros o raíces :**

$C^0 = \{-2, -1\}$

**Entonces los intervalos de evaluación de h (x) entre raíces serán :**

$(-\infty, -2)$ ; $(-2, -1)$ ; $(-1, +\infty)$

$h(x) = x^2 + 3x + 3$

----------------------------------

**Uso corolario teo de Bolzano :**

**tomamos** $x = -3 \in (-\infty, -2)$ **y evaluamos** $h(-3)$ **para ver su signo**

$h(-3) = \ln\left((-3)^2 + 3 \cdot (-3) + 3\right) = \ln(9 - 9 + 3) = \ln(3) > 0$

**(sabemos que** $\ln(3) > 0$ **porque** $\ln(x) > 0$ **para** $x > 1$**)**

------------------

**tomamos** $x = \frac{(-2-1)}{2} = -\frac{3}{2} \in (-2, -1)$ **y evaluamos** $h\left(-\frac{3}{2}\right)$ **para ver su signo**

$h\left(-\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 3\right) = \ln\left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 3\right) = \ln\left(-\frac{9}{4} + 3\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln(3) - \ln(4)$

$\Longrightarrow \; h\left(-\frac{3}{2}\right) = \ln(3) - \ln(4) < 0$

**(sabemos que** $\ln(3) < \ln(4)$ **porque** $\ln(x)$ **es creciente)**

------------------

**tomamos** $x = 0 \in (-1, +\infty)$ **y evaluamos** $h(0)$ **para ver su signo**

$h(0) = \ln\left((0)^2 + 3 \cdot (0) + 3\right) = \ln(0 + 0 + 3) = \ln(0 + 3) = \ln(3) > 0$

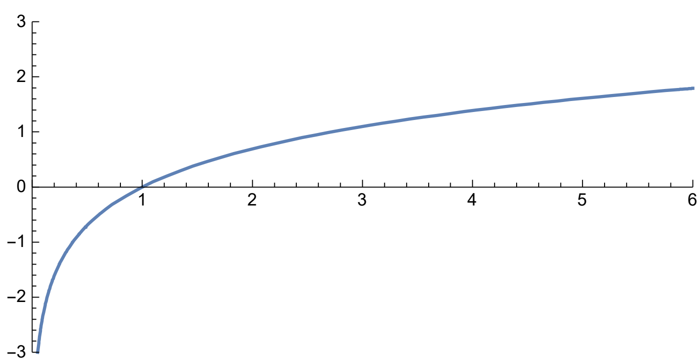
**(sabemos que** $\ln(3) > 0$ **porque** $\ln(x) > 0$ **para** $x > 1$**)**

------------------

**Veamos el gráfico del ln (x) para que lo tengan en mente**

```
Plot[{Log[x]}, {x, 0, 6}, PlotRange → {{0, 6}, {-3, 3}}, AspectRatio → 0.5]
```

repre··· logaritmo rango de representación cociente de aspecto




------------------

**Resumiendo el comportamiento del signo de h (x) tenemos :**

**En** $(-\infty, -2)$ $h(x) > 0$

**En** $(-2, -1)$ $h(x) < 0$

**En $(-1, +\infty)$ h (x) > 0**

**Por lo tanto, los conjuntos de positividad y negatividad de**

**$h(x) = \ln(x^2 + 3x + 3)$ son :**

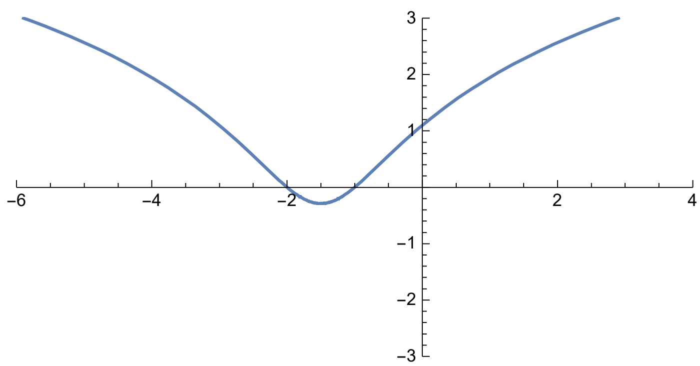
**$C^+ = (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$**

**$C^- = (-2, -1)$**

------------------------

**Veamos el gráfico de h (x)**

```
Plot[{Log[x^2 + 3 x + 3]}, {x, -6, 4}, PlotRange → {{-6, 4}, {-3, 3}}, AspectRatio → 0.5]
```
repre··· logaritmo rango de representación cociente de aspecto




+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-

**Ejercicio 2.** Sean $f(x) = 4 + \ln(x)$, $g(x) = 5x + 2$, $h = f \circ g$ y $h^{-1}$ la función inversa de $h$. Calcular $h^{-1}$ y dar el dominio y la imagen de $h^{-1}$.

------------------------------------------------

**Ej 2 Surtidos Pract 4**

**$f(x) = 4 + \ln(x)$ $g(x) = 5x + 2$ $h = f_\circ g$ y $h^{-1}$ la función inversa de h**

**Calcular : $h^{-1}$ , Dom $(h^{-1})$ e Imagen $(h^{-1})$**

**Veamos quién es h (x)**

**$f_\circ g) x) = f(g(x)) = f(5x + 2) = \ln(5x + 2)$**

**$h(x) = \ln(5x + 2)$**

------------------------

**veamos cuál es el Dom (h) :**

**como el logaritmo está definido para cuando su argumento es positivo, deberá ser :**

$$5x + 2 > 0 \implies 5x > -2 \implies x > -\frac{2}{5}$$

$$\text{Dom}(h) = \left(-\frac{2}{5}, +\infty\right)$$

------------------------------

**Calculemos la inversa de h :**

**planteamos** $y = \ln(5x+2)$ **y despejamos x como función de y**

$y = \ln(5x+2)$ $\Longrightarrow$ **aplicando la función exponencial a ambos miembros :**

$e^y = e^{\ln(5x+2)} \Longrightarrow e^y = 5x+2 \Longrightarrow 5x = e^y - 2 \Longrightarrow x = \dfrac{e^y-2}{5}$

$\Longrightarrow x = \dfrac{e^y-2}{5}$ **intercambiamos** $x \leftrightarrow y \Longrightarrow y = \dfrac{e^x-2}{5}$

**Entonces** $h^{-1}$ **es :**

$$h^{-1}(x) = \frac{e^x-2}{5}$$

**Dom** $(h^{-1}) = \mathbb{R}$ **(porque la función exponencial está definida** $\forall\ x \in \mathbb{R}$**)**

**Imagen** $(h^{-1})$ = **Dom** $(h) = \left(-\dfrac{2}{5}, +\infty\right)$

+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-

**Ejercicio 3**.- Sean $f(x) = 3 - e^{4+2x}$ y $f^{-1}$ la función inversa de $f$. Hallar $f^{-1}(x)$ y dar su dominio.

----------------------------

**Ej 3 Surtidos Pract 4**

$f(x) = 3 - e^{4+2x}$ **Hallar** $f^{-1}$ **y Dom** $(f^{-1})$

**Vemos que Dom** $(f) = \mathbb{R}$ **(porque la función exponencial está definida** $\forall\ x \in \mathbb{R}$**)**

---------------------

**Para calcular** $f^{-1}$ **planteamos** $y = 3 - e^{4+2x}$ **y despejamos x como función de y**

$y = 3 - e^{4+2x} \Longrightarrow e^{4+2x} = 3 - y \Longrightarrow$ **aplicando ln a ambos miembros**

$\ln(e^{4+2x}) = \ln(3-y) \Longrightarrow 4 + 2x = \ln(3-y) \Longrightarrow 2x = \ln(3-y) - 4 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x = \dfrac{\ln(3-y)-4}{2}$ **ahora intercambiamos** $x \leftrightarrow y$

$$f^{-1}(x) = \frac{\ln(3-x)-4}{2}$$

**Calculemos el Dom** $(f^{-1})$ **:**

**como el logaritmo está definido para cuando su argumento es > 0, deberá ser**

$3 - x > 0 \Longrightarrow 3 > x$ **es decir** $x < 3$

**Dom** $(f^{-1}) = (-\infty, 3)$

**Imagen** $(f^{-1})$ = **Dom** $(f) = \mathbb{R}$

+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-

**Ejercicio 4.-** Sea $f(x) = ka^{x-1}$. Hallar $a > 0$ y $k \in \mathbb{R}$, si $f(-1) = 0.7$ y $f(4) = 22.4$.

Para los valores hallados, calcular $f(8)$.

------------------------------------

**Ej 4 Surtidos Pract 4**

**Sea** $f(x) = k \cdot a^{x-1}$

**Hallar** $a > 0$ **y** $k \in \mathbb{R}$ **siendo** $f(-1) = 0.7$ **y** $f(4) = 22.4$

**Como** $f(-1) = 0.7 \implies f(-1) = k \cdot a^{-1-1} = k \cdot a^{-2} = 0.7 \implies$

$\implies k \cdot a^{-2} = 0.7 \implies \frac{k}{a^2} = 0.7 \implies k = 0.7\ a^2 \quad (*)$

**Además como** $f(4) = 22.4$

$\implies f(4) = k \cdot a^{4-1} = k \cdot a^3 = 22.4$ **y como por** $(*)$ $k = 0.7\ a^2$ **reemplazando**

$\implies 0.7\ a^2 \cdot a^3 = 22.4 \implies 0.7\ a^{(2+3)} = 22.4 \implies a^5 = \frac{22.4}{0.7}$

$\implies \sqrt[5]{a^5} = \sqrt[5]{\frac{22.4}{0.7}} \implies a = \sqrt[5]{\frac{22.4}{0.7}} \implies a = \sqrt[5]{32} = 2$

**Luego reemplazando en** $(*)$

$k = 0.7\ a^2 = 0.7\ 2^2 = 0.7 \cdot 4 = 2.8$

## Por lo tanto, $a = 2$ y $k = 2.8$ y $f(x) = 2.8 \cdot 2^{x-1}$

----------------------

**Calculemos** $f(8)$

$f(8) = 2.8 \cdot 2^{8-1} = 2.8 \cdot 2^7 = 2.8 \cdot 128 = 358.4$

## Entonces $f(8) = 358.4$

+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-

**Ejercicio 5.-** Sea $f(x) = 5\,\mathrm{sen}(2x) + 2$. Determinar la imagen de $f$ y hallar los $x \in [-\pi; \pi]$ para los cuales $f$ alcanza el valor máximo.

--------------------------------

**Ej 5 Surtidos Pract 4**

**Sea** $f(x) = 5\ \mathrm{sen}(2x) + 2$

**Hallar Imagen (f) y dar los** $x \in [-\pi, \pi]$ **para los cuales f alcanza el valor máximo**

**Como** $A = 5$ **y** $|A|$ **es la Amplitud tenemos que Amplitud** $= |5| = 5$

**Pero como f tiene una traslación respecto al eje de las "y" en 2 unidades hacia arriba el conjunto Imagen será :**

## Imagen (f) = [-5 + 2, 5 + 2] = [-3, 7]

--------------------------

**Busquemos ahora los máximos de $f(x)$ es decir los x tal que f sea 7 en $[-\pi, \pi]$**

**Como $b = 2$ y b se relaciona con el período T de $f(x)$ mediante la expresión :**

$$|b| = \frac{2\pi}{T} \Longrightarrow |2| = 2 = \frac{2\pi}{T} \Longrightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

### El período de f (x) es $T = \pi$

**Los lugares en donde f alcanza los máximos se verán comprimidos a la mitad respecto a los x del sen (x), debido al factor b**

**Además como $f(x) = 5\,\text{sen}(2x) + 2$ los máximos de $f(x)$ estarán en los mismos x que los máximos de $\text{sen}(2x)$**

**LLamemos $\mathcal{H} = 2x$ entonces buscamos los máximos de $\text{sen}(\mathcal{H})$**

+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-

**Nota : cuando decimos máximos se refiere a los x**
**cuando decimos el Valor máximo que alcanza f nos referimos a las y**

+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-

**los máximos de $\text{sen}(\mathcal{H})$ están en :**

$$\mathcal{H} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \ , \quad k \in \mathbb{Z}$$

**Reemplazando $\mathcal{H} = 2x$ despejamos los x de $f(x)$ para los que alcanza el valor máximo :**

$$2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \Longrightarrow x = \frac{\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \ , \quad k \in \mathbb{Z}$$

**Veamos cuáles de esos x están en $[-\pi, \pi]$**

$k > 0$

$\text{si } k = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 0 \cdot \pi = \frac{\pi}{4}$ sí $\in [-\pi, \pi]$

$\text{si } k = 1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 1 \cdot \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5}{4}\pi$ no $\in [-\pi, \pi]$

-----------------

$k < 0$

$\text{si } k = -1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + (-1) \cdot \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi$ sí $\in [-\pi, \pi]$

$\text{si } k = -2 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + (-2) \cdot \pi = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7}{4}\pi$ no $\in [-\pi, \pi]$

**Por lo tanto, los máximos de f (x) = 5 sen (2 x) + 2 en [-π, π] son :**

$$x_M = \left\{-\frac{3}{4}\pi,\ \frac{\pi}{4}\right\}$$

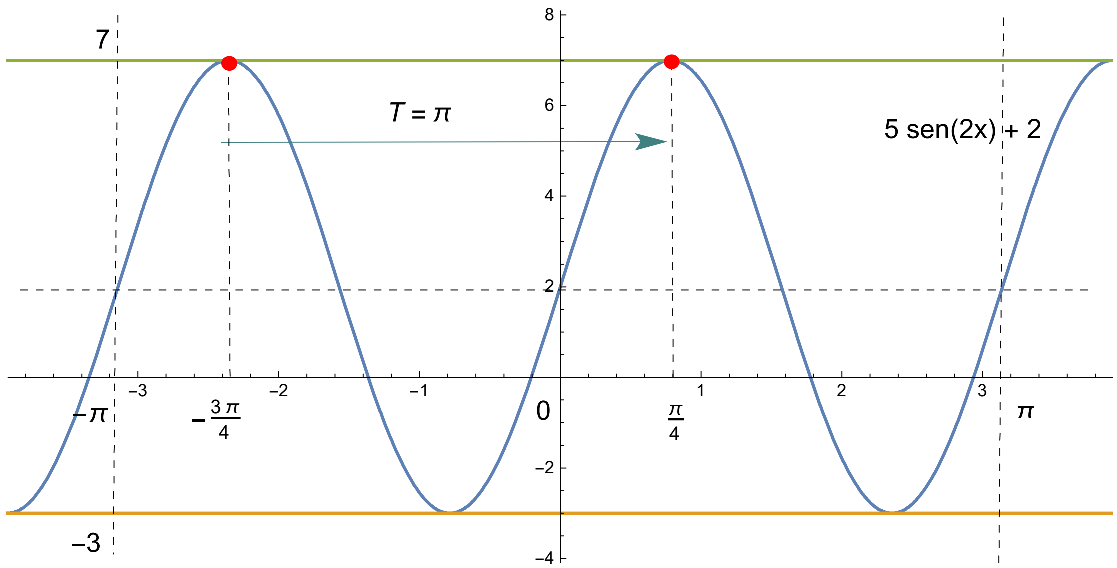
------------------

**Veamos un gráfico de f (x) = 5 sen (2 x) + 2**

```
Plot[{5 Sin[2 x] + 2, -3, 7}, {x, -5/4 π, 5/4 π},
 PlotRange → {{-5/4 π, 5/4 π}, {-4.1, 8.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

represen·· seno

rango de representación cociente de aspecto




+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+

**Ejercicio 6.-** Se sabe que $f(x) = a\,\text{sen}(2x) - 2$ tiene un cero en $x = \frac{\pi}{12}$. Determinar el valor de $a$ e indicar, para el valor de $a$ encontrado, la imagen de $f$.

------------------------------------

**Ej 6 Surtidos Pract 4**

**f (x) = a · sen (2 x) - 2 tiene un cero en** $x = \frac{\pi}{12}$

**Determinar a**

--------------------

**Si** $x = \frac{\pi}{12}$ **es un cero de f (x)** $\Longrightarrow$ $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0$

**Evaluamos f en** $\frac{\pi}{12}$

$$0 = f\left(\frac{\pi}{12}\right) = a \cdot \text{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) - 2 = a \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2 \quad \text{y como sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = a \cdot \frac{1}{2} - 2 = \frac{a}{2} - 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{2} = 2 \quad \Longrightarrow \quad a = 4$$

**Luego** $f(x) = 4 \cdot \text{sen}(2x) - 2$

**Calculemos el conjunto Imagen de f**

**Como A = 4 entonces Amplitud = |A| = |4| = 4**

**y f (x) tiene las imágenes desplazadas en 2 unidades hacia abajo respecto a** $4 \cdot \text{sen}(2x)$

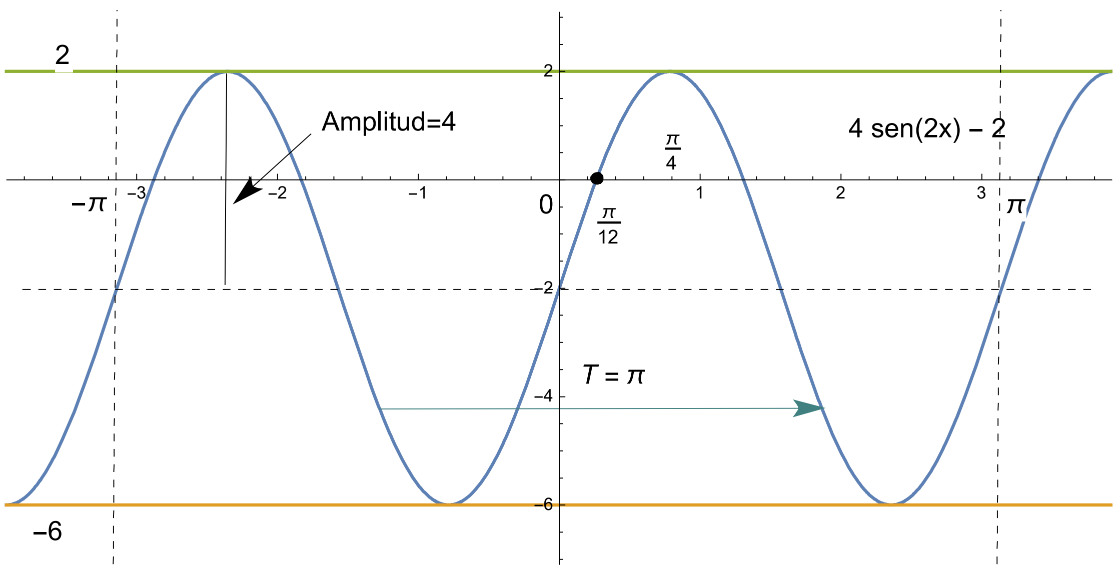
**Imagen (f) = [-4 - 2, 4 - 2] = [-6, 2]**

## Por lo tanto, Imagen (f) = [-6, 2]

------------------

**Veamos un gráfico de** $f(x) = 4 \cdot \text{sen}(2x) - 2$

```
Plot[{4 Sin[2 x] - 2, -6, 2}, {x, -5/4 π, 5/4 π},
represen·· seno
 PlotRange → {{-5/4 π, 5/4 π}, {-7.1, 3.1}}, AspectRatio → 0.5]
rango de representación                cociente de aspecto
```




+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+

**Ejercicio 7.**- Indicar los ceros y los conjuntos de positividad y de negatividad de

$$f(x) = 2\cos^2(x) + \cos(x) \quad \text{para} \quad x \in [0; \pi].$$

-------------------------------------

**Ej 7 Surtidos Pract 4**

**Encontrar** $C^0, C^+, C^-$ **de** $f(x) = 2\cos^2(x) + \cos(x) \qquad x \in [0, \pi]$

$C^0 = \{x \in \text{Dom}(f) : f(x) = 0\}$

**Planteamos** $f(x) = 0$

$2\cos^2(x) + \cos(x) = 0$ **sacando factor común** $\cos(x)$ :

$\cos(x) \cdot [2\cos(x) + 1] = 0$

**Este producto será 0 cuando** $\cos(x) = 0$ ó $2\cos(x) + 1 = 0$

**Es decir** $\cos(x) = 0$ ó $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

$S_1$ : **soluciones de** $\cos(x) = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ , $k \in \mathbb{Z}$

-------

$S_2$ **y** $S_3$ : **soluciones de** $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

**coseno negativo implica arcos en el 2 do y 3 er cuadrante**

**El arco del 1 er cuadrante que genera un valor en módulo igual a** $\frac{1}{2}$ **es** $\hat{t} = \frac{\pi}{3}$

**El arco del 2 do cuadrante será :** $\pi - \hat{t} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

**El arco del 3 er cuadrante será :** $\pi + \hat{t} = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$

**Entonces, soluciones de** $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ :

$S_2$ : $x = \frac{2}{3}\pi + p \cdot 2\pi$ , $p \in \mathbb{Z}$

$S_3$ : $x = \frac{4}{3}\pi + q \cdot 2\pi$ , $q \in \mathbb{Z}$

**Por lo tanto, en todo** $\mathbb{R}$**, el** $C^0$ **de** $f(x) = 2\cos^2(x) + \cos(x)$ **es** $S_1 \bigcup S_2 \bigcup S_3$

$$C^0 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{2}{3}\pi + p \cdot 2\pi, p \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x = \frac{4}{3}\pi + q \cdot 2\pi, q \in \mathbb{Z}\right\}$$

-----------------

**Veamos cuáles de estas soluciones están en** $[0, \pi]$

**para las** $S_1$

$k > 0$

**si** $k = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} + 0 \cdot \pi = \frac{\pi}{2}$ **sí** $\in [0, \pi]$

**si** $k = 1 \implies x = \frac{\pi}{2} + 1 \cdot \pi = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3}{2}\pi$ **no** $\in [0, \pi]$

$k < 0$

**si** $k = -1 \implies x = \frac{\pi}{2} + (-1) \cdot \pi = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$ **no** $\in [0, \pi]$

$\tilde{S}_1 = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ **es cero de** $f(x) = 2\cos^2(x) + \cos(x)$ **en** $[0, \pi]$

--------

**para las $S_2$**

$p > 0$

si $p = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2}{3}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi$ sí $\in [0, \pi]$

si $p = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2}{3}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi + 2\pi = \frac{8}{3}\pi$ no $\in [0, \pi]$

$p < 0$

si $p = -1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2}{3}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi - 2\pi = -\frac{4}{3}\pi$ no $\in [0, \pi]$

$\tilde{S}_2 = \left\{\frac{2}{3}\pi\right\}$ es cero de $f(x) = 2\cos^2(x) + \cos(x)$ en $[0, \pi]$

--------

**para las $S_3$**

$q > 0$

si $q = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{4}{3}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi$ no $\in [0, \pi]$

$q < 0$

si $q = -1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{4}{3}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi - 2\pi = -\frac{2}{3}\pi$ no $\in [0, \pi]$

$\tilde{S}_3 = \{\phi\}$ no hay ceros de $f(x) = 2\cos^2(x) + \cos(x)$ en $[0, \pi]$

Por lo tanto, en $[0, \pi]$, el $C^0$ de $f(x) = 2\cos^2(x) + \cos(x)$ es $\tilde{S}_1 \bigcup \tilde{S}_2 \bigcup \tilde{S}_3$

$C^0 = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi\right\}$ en $[0, \pi]$

-----------------------------

$C^+$, $C^-$ de $f(x) = 2\cos^2(x) + \cos(x) \qquad x \in [0, \pi]$

Como $f(x)$ es continua

usaremos el corolario del Teo de Bolzano para afirmar que entre dos ceros consecutivos

o bien $f(x) > 0$ o $f(x) < 0$ en dicho intervalo, entre raíces consecutivas

Tenemos los ceros o raíces :

$C^0 = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi\right\}$ en $[0, \pi]$

Entonces los intervalos de evaluación de $f(x)$ entre raíces serán :

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right); \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi\right); \left(\frac{2}{3}\pi, \pi\right]$

$f(x) = 2\cos^2(x) + \cos(x)$

---------------------------------

**Uso corolario teo de Bolzano :**

**tomamos x** $= \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ **y evaluamos f** $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ **para ver su signo**

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

------------------

**tomamos x** $= \frac{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi\right)}{2} = \frac{\left(\frac{(3+4)}{6}\pi\right)}{2} = \frac{7}{12}\pi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi\right)$ **y evaluamos f** $\left(\frac{7}{12}\pi\right)$ **para ver su signo**

$$f\left(\frac{7}{12}\pi\right) = 2\cos^2\left(\frac{7}{12}\pi\right) + \cos\left(\frac{7}{12}\pi\right) = -0.1248444488869593 < 0$$

------------------

**tomamos x** $= \frac{\left(\frac{2}{3}\pi + \pi\right)}{2} = \frac{\left(\frac{(2+3)}{3}\pi\right)}{2} = \frac{5}{6}\pi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi\right)$ **y evaluamos f** $\left(\frac{5}{6}\pi\right)$ **para ver su signo**

$$f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = 2\cos^2\left(\frac{5}{6}\pi\right) + \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = 0.6339745962155614 > 0$$

------------------

**Resumiendo el comportamiento del signo de f (x) tenemos :**

**En** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ $f(x) > 0$

**En** $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi\right)$ $f(x) < 0$

**En** $\left(\frac{2}{3}\pi, \pi\right]$ $f(x) > 0$

**Por lo tanto, los conjuntos de positividad y negatividad de**

$f(x) = 2\cos^2(x) + \cos(x)$ **en** $[0, \pi]$ **son :**

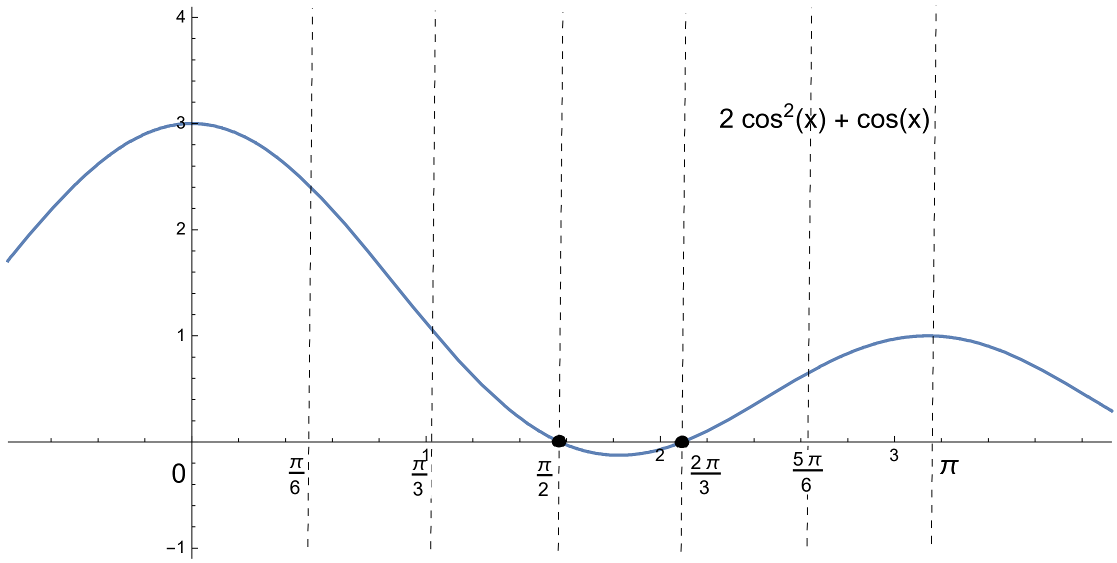
$$C^+ = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}\pi, \pi\right]$$

$$C^- = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi\right)$$

------------------------------

```
Plot[{2 Cos[x]^2 + Cos[x]}, {x, -1/4 π, 5/4 π},
 PlotRange → {{-1/4 π, 5/4 π}, {-1.1, 4.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

representación gráfica | coseno | rango de representación | cociente de aspecto




+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+

**Ejercicio 8.**- Sea $f(x)=2\,\mathrm{sen}(2x+\frac{\pi}{4})$. Hallar los ceros y los valores máximo y mínimo de $f$.

-----------------------------------

**Ej 8 Surtidos Pract 4**

**$f(x) = 2\,\mathrm{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ Encontrar $C^0$ y los valores máximo y mínimo de f**

**Como A = 2 y |A| es la Amplitud, entonces Amplitud = |2| = 2**

**y como f (x) no tiene traslación según el eje de las "y" el conjunto Imagen es :**

**Imagen (f) = [-2, 2]**

**Luego, los valores máximo y mínimo de f son :**

**Valor Máximo = 2**

**Valor Mínimo = - 2**

-----------------------------

**Calculemos $C^0$ de $f(x) = 2\,\mathrm{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$**

**$C^0 = \{x \in \mathrm{Dom}(f) : f(x) = 0\}$**

**planteamos f (x) = 0**

**$2\,\mathrm{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \implies \mathrm{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{0}{2} = 0$**

**llamemos $\mathcal{H} = 2x + \frac{\pi}{4}$ entonces $\mathrm{sen}(\mathcal{H}) = 0$**

**Los ceros de sen ($\mathcal{H}$) están en :**

**$\mathcal{H} = k \cdot \pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$**

**Reemplazando** $\mathcal{H} = 2x + \frac{\pi}{4}$ **para despejar x :**

$$2x + \frac{\pi}{4} = k \cdot \pi \quad \Longrightarrow \quad 2x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\left(-\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi\right)}{2} = -\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}$$

**Entonces en :**

$$x = -\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

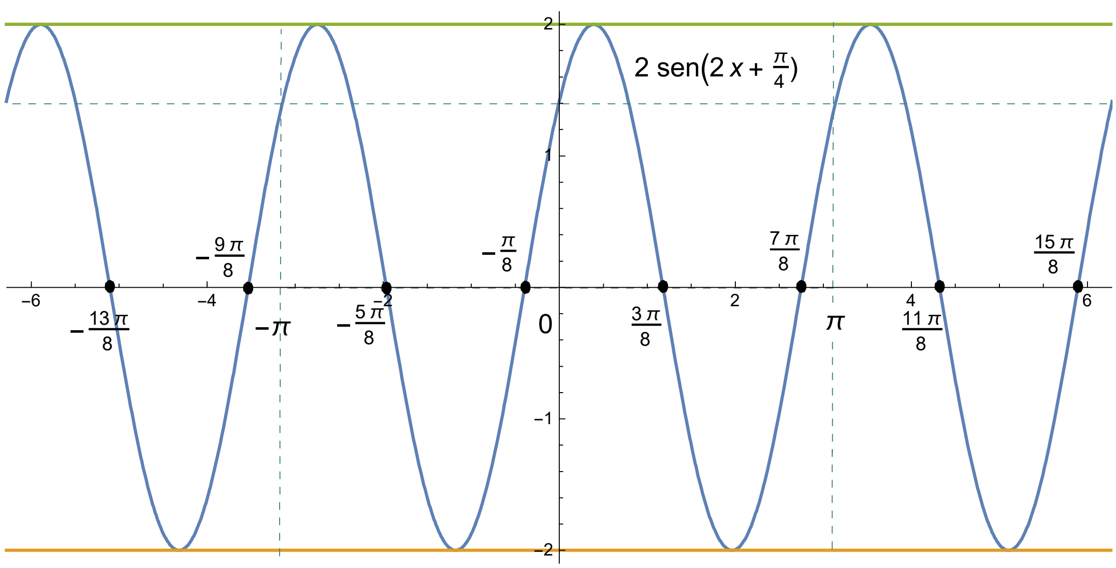
**están los ceros de f (x) = 2 sen** $\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$C^0 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = -\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

-----------------------------

**Veamos el gráfico de f (x) = 2 sen** $\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

```
Plot[{2 Sin[2 x + π/4], -2, 2}, {x, -2 π, 2 π},
     represen··· seno
 PlotRange → {{-2 π, 2 π}, {-2.1, 2.1}}, AspectRatio → 0.5]
 rango de representación              cociente de aspecto
```




+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+

**Ejercicio 9.-** Sea $f:[0;\pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2\cos(x + \frac{\pi}{2})$. Encontrar todos los puntos en que el gráfico de $f$ corta a la recta de ecuación $y = -1$.

-----------------------------------

**Ej 9 Surtidos Pract 4**

$f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

**Encontremos todos los puntos en que el gráfico de f corta a la recta de ecuación y = -1**

**Para ello planteamos :**

$$f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad \Longrightarrow \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

**Si llamamos $\mathcal{H} = x + \frac{\pi}{2}$ resolveremos $\cos(\mathcal{H}) = -\frac{1}{2}$ para luego reemplazar para despejar x**

**Entonces $\cos(\mathcal{H}) = -\frac{1}{2}$**

**se da para arcos en el 2 do y 3 er cuadrante y el arco en el 1 er cuadrante que tiene**

**$\cos(\hat{t}) = \frac{1}{2}$ es $\hat{t} = \frac{\pi}{3}$**

**Entonces :**

**el arco del 2 do cuadrante es $\pi - \hat{t} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$**

**el arco del 3 er cuadrante es $\pi + \hat{t} = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$**

**Tenemos dos conjuntos de soluciones para $\cos(\mathcal{H}) = -\frac{1}{2}$**

$$S_1 \quad \mathcal{H} = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \text{ó} \qquad S_2 \quad \mathcal{H} = \frac{4}{3}\pi + z \cdot 2\pi, \quad z \in \mathbb{Z}$$

**Reemplazando $\mathcal{H} = x + \frac{\pi}{2}$ despejamos x :**

**para $S_1$**

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi = \frac{(-3+4)}{6}\pi + k \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$S_1 : \quad x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

**para $S_2$**

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{4}{3}\pi + z \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}\pi + z \cdot 2\pi = \frac{(-3+8)}{6}\pi + z \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi + z \cdot 2\pi$$

$$S_2 : \quad x = \frac{5}{6}\pi + z \cdot 2\pi, \quad z \in \mathbb{Z}$$

$$S_1 \bigcup S_2 = \left\{x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{x = \frac{5}{6}\pi + z \cdot 2\pi, \quad z \in \mathbb{Z}\right\}$$

----------------

**Como Dom (f) = $[0, \pi]$**

**veamos cuáles de las soluciones están en $[0, \pi]$**

**para las $S_1$**

**si k = 0** $\quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + 0 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}$ $\qquad$ sí $\in [0, \pi]$

**si k = 1** $\quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + 1 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13}{6}\pi$ $\qquad$ no $\in [0, \pi]$

si k = -1 $\Longrightarrow$ $x = \frac{\pi}{6} + (-1) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11}{6}\pi$ no $\in [0, \pi]$

----------

para las $S_2$

si z = 0 $\Longrightarrow$ $x = \frac{5}{6}\pi + 0 \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi$ sí $\in [0, \pi]$

si z = 1 $\Longrightarrow$ $x = \frac{5}{6}\pi + 1 \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi + 2\pi = \frac{17}{6}\pi$ no $\in [0, \pi]$

si z = -1 $\Longrightarrow$ $x = \frac{5}{6}\pi + (-1) \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi - 2\pi = -\frac{7}{6}\pi$ no $\in [0, \pi]$

**El conjunto de x en donde el gráfico de f se corta con y = -1 en $[0, \pi]$ es :**

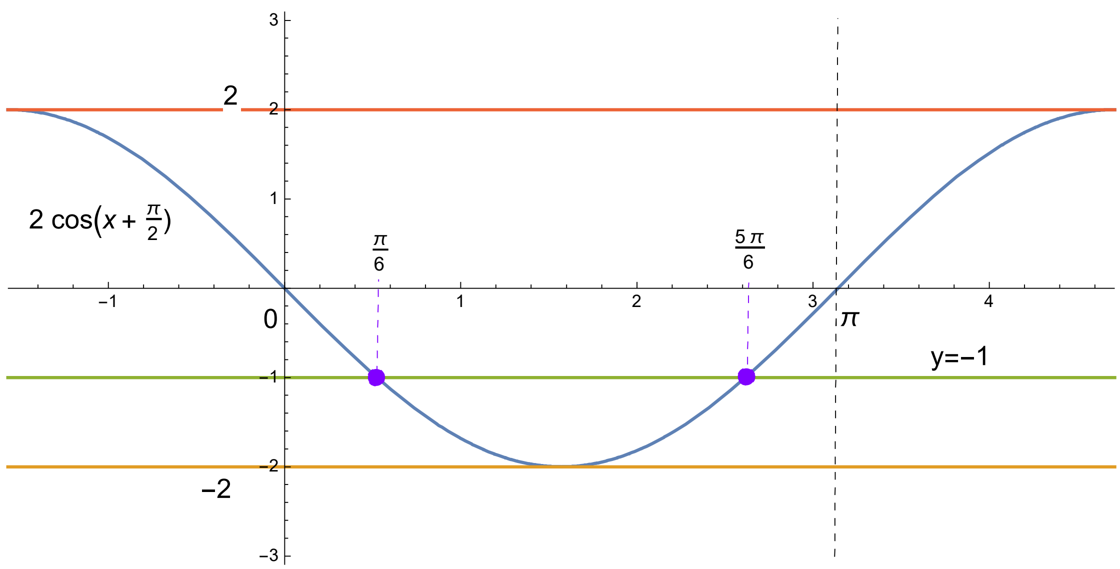
$$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right\}$$

----------------------

**Veamos el gráfico de** $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

```
Plot[{2 Cos[x + π/2], -2, -1, 2}, {x, -π/2, 3/2 π},
 PlotRange → {{-π/2, 3/2 π}, {-3.1, 3.1}}, AspectRatio → 0.5]
```

represen·· coseno
rango de representación cociente de aspecto




+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+-+

**Ejercicio 10.**- Sea $f(x) = 2 + \text{sen}(x + \pi)$. Determinar todos los $x \in [-2\pi; 3\pi]$ tales que $f(x) = \frac{5}{2}$.

--------------------------------

**Ej 10 Surtidos Pract 4**

$f(x) = 2 + \text{sen}(x + \pi) \qquad f : [-2\pi, 3\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

**Encontremos todos los** $x \in [-2\pi, 3\pi]$ **tales que** $f(x) = \frac{5}{2}$

**Para ello planteamos :**

$$2 + \text{sen}(x + \pi) = \frac{5}{2} \quad \Longrightarrow \quad \text{sen}(x + \pi) = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{sen}(x + \pi) = \frac{1}{2}$$

**Si llamamos** $\mathcal{H} = x + \pi$ **resolveremos** $\text{sen}(\mathcal{H}) = \frac{1}{2}$ **para luego reemplazar para despejar x**

**Entonces** $\text{sen}(\mathcal{H}) = \frac{1}{2}$ **es positivo**

**y se da para arcos en el 1 er y 2 do cuadrante**

$$\mathcal{H} = \frac{\pi}{6}$$

**Entonces :**

**el arco del 1 er cuadrante es** $\mathcal{H} = \frac{\pi}{6}$

**el arco del 2 do cuadrante es** $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$

**Tenemos dos conjuntos de soluciones para** $\text{sen}(\mathcal{H}) = \frac{1}{2}$

$S_1 \quad \mathcal{H} = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \qquad$ ó $\qquad S_2 \quad \mathcal{H} = \frac{5}{6}\pi + z \cdot 2\pi, \quad z \in \mathbb{Z}$

**Reemplazando** $\mathcal{H} = x + \pi$ **despejamos x :**

**para** $S_1$

$$x + \pi = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad x = -\pi + \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi = \frac{(-6+1)}{6}\pi + k \cdot 2\pi = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$S_1 : \quad x = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

**para** $S_2$

$$x + \pi = \frac{5}{6}\pi + z \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad x = -\pi + \frac{5}{6}\pi + z \cdot 2\pi = \frac{(-6+5)}{6}\pi + z \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{6} + z \cdot 2\pi$$

$S_2 : \quad x = -\frac{\pi}{6} + z \cdot 2\pi, \quad z \in \mathbb{Z}$

$$S_1 \bigcup S_2 = \left\{x = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{x = -\frac{\pi}{6} + z \cdot 2\pi, \quad z \in \mathbb{Z}\right\}$$

----------------

**Como** $\text{Dom}(f) = [-2\pi, 3\pi]$

**veamos cuáles de las soluciones están en** $[-2\pi, 3\pi]$ $\quad -\frac{12}{6}\pi = -2\pi \;,\; \frac{18}{6}\pi = 3\pi$

**para las** $S_1$

**si** $k = 0 \implies x = -\frac{5}{6}\pi + 0 \cdot 2\pi = -\frac{5}{6}\pi$ — sí $\in [-2\pi, 3\pi]$

**si** $k = 1 \implies x = -\frac{5}{6}\pi + 1 \cdot 2\pi = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi = \frac{7}{6}\pi$ — sí $\in [-2\pi, 3\pi]$

**si** $k = 2 \implies x = -\frac{5}{6}\pi + 2 \cdot 2\pi = -\frac{5}{6}\pi + 4\pi = \frac{19}{6}\pi$ — no $\in [-2\pi, 3\pi]$

**si** $k = -1 \implies x = -\frac{5}{6}\pi + (-1) \cdot 2\pi = -\frac{5}{6}\pi - 2\pi = -\frac{17}{6}\pi$ — no $\in [-2\pi, 3\pi]$

----------

**para las** $S_2$

**si** $z = 0 \implies x = -\frac{\pi}{6} + 0 \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{6}$ — sí $\in [-2\pi, 3\pi]$

**si** $z = 1 \implies x = -\frac{\pi}{6} + 1 \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11}{6}\pi$ — sí $\in [-2\pi, 3\pi]$

**si** $z = 2 \implies x = -\frac{\pi}{6} + 2 \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{23}{6}\pi$ — no $\in [-2\pi, 3\pi]$

**si** $z = -1 \implies x = -\frac{\pi}{6} + (-1) \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{13}{6}\pi$ — no $\in [-2\pi, 3\pi]$

**El conjunto de x en donde** $f(x) = \frac{5}{2}$ **en** $[-2\pi, 3\pi]$ **es :**

$$\left\{-\frac{5}{6}\pi,\ -\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi\right\}$$

$f(x) = 2 + \text{sen}(x + \pi)$

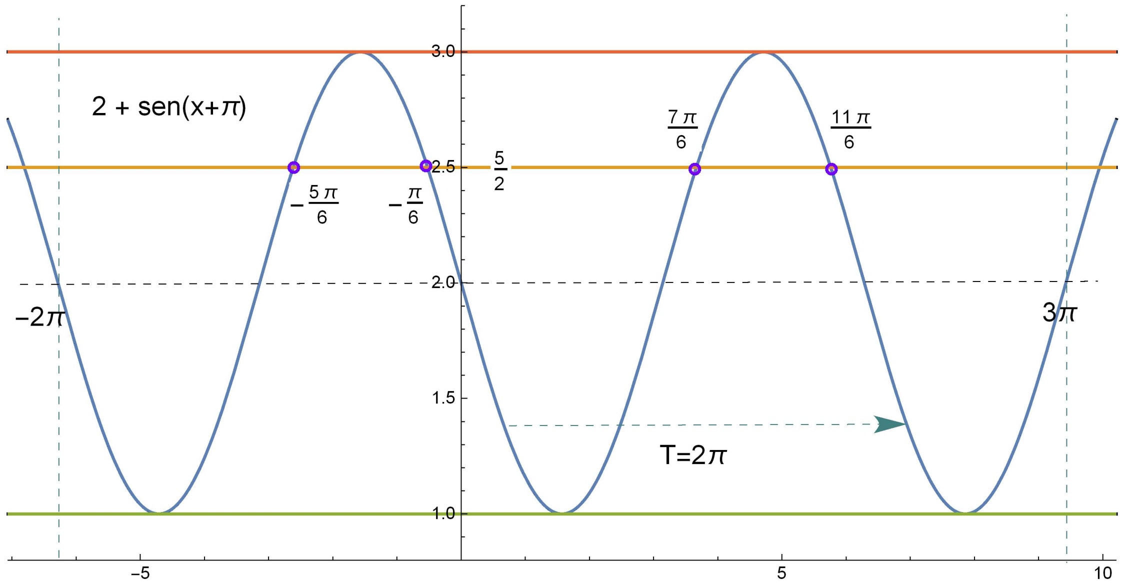
----------------------

**Veamos el gráfico de** $f(x) = 2 + \text{sen}(x + \pi)$

```
Plot[{2 + Sin[x + π], 5/2, 1, 3}, {x, -9π/4, 13π/4},
 PlotRange → {{-9π/4, 13π/4}, {0.8, 3.2}}, AspectRatio → 0.5]
```

representa·· seno

rango de representación cociente de aspecto


2 + sen(x+π)
−2π
3π
−5π/6
−π/6
5/2
7π/6
11π/6
T=2π
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
−5
5
10

+ − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − + − +