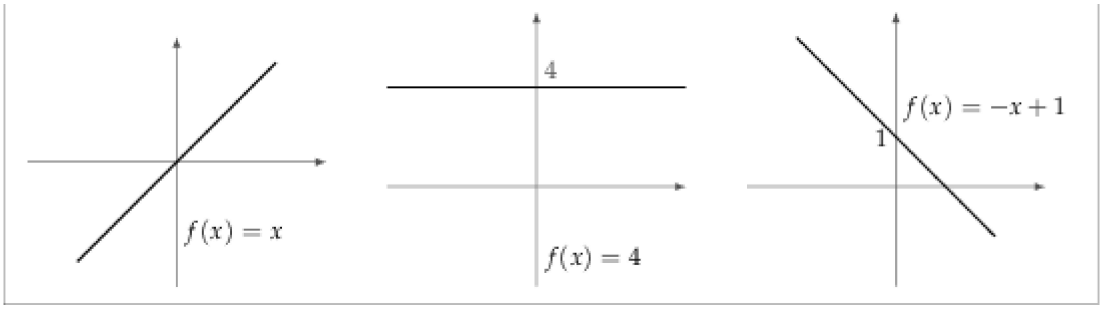
Funciones lineales

Una *función lineal* es una función cuyo gráfico es una recta. Por ejemplo, $f(x) = x$, $f(x) = 4$, $f(x) = -x + 1$ son funciones lineales:



En general, una función lineal tiene una expresión de la forma

$$f(x) = mx + b$$

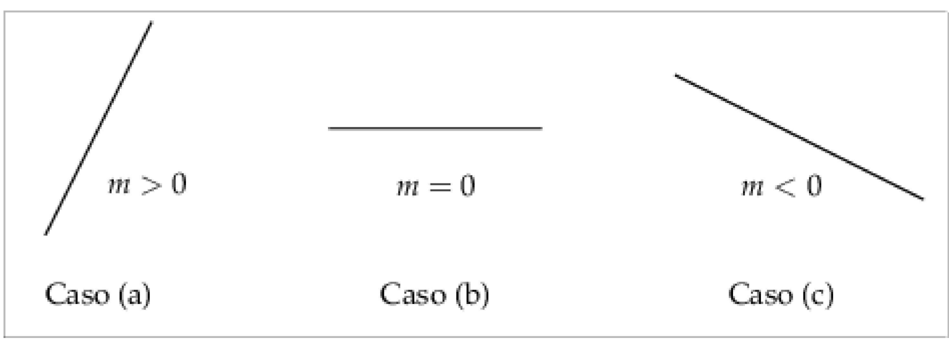
donde m y b son números reales fijos. El gráfico de esta función es la recta de ecuación

$$y = mx + b.$$

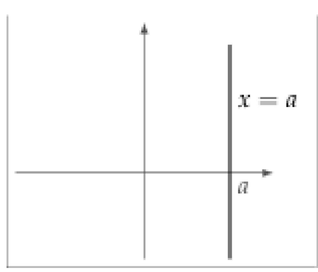
Al número m se lo llama la *pendiente* de la recta y a b, la *ordenada al origen* (b es el valor en el que la recta corta al eje y). Por ejemplo, la función $f(x) = 2x - 3$ tiene como gráfico una recta de pendiente $m = 2$ y ordenada al origen $b = -3$.

Observamos que la pendiente de una recta determina su inclinación. Esencialmente tenemos tres situaciones distintas:

(a) Si $m > 0$, la función $f(x) = mx + b$ es creciente y su gráfico es una recta como en la figura.
(b) Si $m = 0$, la función $f(x) = mx + b$ es constante ($f(x) = b$ para todo x) y su gráfico es una recta horizontal como en la figura.
(c) Si $m < 0$, la función $f(x) = mx + b$ es decreciente y su gráfico es una recta como en la figura.



Observación. Hay otro tipo de rectas en el plano que *no* son gráficos de funciones: las rectas verticales. Estas rectas tienen una ecuación del tipo $x = a$ para un número real a fijo. La recta de ecuación $x = a$ está formada por todos los puntos del plano cuya primera coordenada es a (y que tienen como segunda coordenada a cualquier número real).



Función lineal conociendo dos puntos de su gráfico

El hecho que *por dos puntos dados del plano pasa una única recta* nos dice que para determinar la expresión de una función lineal basta con conocer el valor de la función en dos valores distintos de x. Veamos, en un ejemplo, cómo puede hacerse esto:

Ejemplo. Hallar la función lineal f que cumple $f(7) = 11$ y $f(4) = 5$.

Como f es una función lineal sabemos que $f(x)$ tiene una expresión de la forma

$$f(x) = mx + b,$$

donde m y b son números reales fijos. Veamos cómo determinar los valores de m y b a partir de los datos.

Sabemos que $f(7) = 11$ y, reemplazando $x = 7$ en la ecuación de f obtenemos que

$$f(7) = m.7 + b,$$

En consecuencia, debe ser

$$7m + b = 11$$

De la misma manera, como $f(4) = 5$ y al reemplazar $x = 4$ en la ecuación de f se obtiene que

$$f(4) = m.4 + b,$$

resulta que

$$4m + b = 5.$$

Concluimos entonces que m y b deben cumplir simultáneamente las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 7m + b = 11 \\ 4m + b = 5 \end{cases}$$

Para resolver este sistema de dos ecuaciones podemos, por ejemplo, restar la primera ecuación menos la segunda. Obtenemos así el valor de m:

$$\begin{aligned} (7m + b) - (4m + b) &= 11 - 5 \\ (7 - 4)m &= 11 - 5 \\ m &= \frac{11 - 5}{7 - 4} \\ m &= 2. \end{aligned}$$

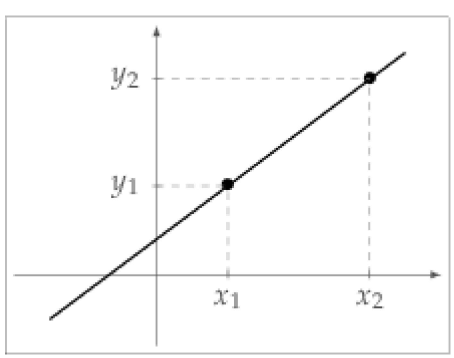
Finalmente, para obtener el valor de b, reemplazamos el valor de m hallado en cualquiera de las dos ecuaciones originales y despejamos:

$$7m + b = 11 \iff 7.2 + b = 11 \iff b = 11 - 14 \iff b = -3.$$

Reemplazando los valores hallados, $m = 2$ y $b = -3$, en la expresión de $f(x)$, obtenemos que

$$\boxed{f(x) = 2x - 3}$$

En general, si f es una función lineal tal que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$, con $x_1 \neq x_2$, el gráfico de f es la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).



De la misma manera que en el ejemplo anterior, se puede ver que la pendiente de esta recta es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Función lineal conociendo la pendiente y un punto de su gráfico

Una función lineal queda determinada a partir de la pendiente y un punto de su gráfico.

Ejemplo. Hallar la función lineal f tal que su gráfico es una recta de pendiente $m = -\frac{1}{2}$ que pasa por el punto $P = (4, 3)$.

Sabemos que, siendo f una función lineal, la expresión de $f(x)$ es de la forma

$$f(x) = mx + b,$$

donde m es la pendiente de la recta que es el gráfico de f. Esta pendiente es uno de los datos de los que disponemos: $m = -\frac{1}{2}$, con lo cual, podemos asegurar que

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + b$$

para algún número real b.

Por otro lado, sabemos que el punto $P = (4, 3)$ está en el gráfico de f. Esto significa que

$$f(4) = 3.$$

Reemplazando $x = 4$ en la expresión de $f(x)$, obtenemos que

$$f(4) = -\frac{1}{2}.4 + b = -2 + b.$$

Luego, debe ser

$$-2 + b = 3,$$

de donde deducimos que

$$b = 5.$$

Reemplazando el valor de b hallado en la expresión de $f(x)$, obtenemos que la función es

$$\boxed{f(x) = -\frac{1}{2}x + 5}$$

En general, si f es una función lineal cuyo gráfico es una recta de pendiente m que pasa por un punto dado (x_0, y_0), se puede ver que el valor de $f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ es

$$f(x) = m(x - x_0) + y_0.$$

Si aplicamos esta fórmula en el ejemplo anterior, donde $m = -\frac{1}{2}$ y un punto del gráfico es $(4, 3)$, obtenemos que

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x - 4) + 3$$

Veamos que el valor de $f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ coincide con el obtenido en el ejemplo, operando en la fórmula anterior:

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x - 4) + 3 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.4 + 3 = -\frac{1}{2}x + 2 + 3 = -\frac{1}{2}x + 5$$