PRÁCTICA 2

SISTEMAS LINEALES Y MATRICES

Ejercicio 1.- Dado el sistema lineal

$$S \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

¿Cuáles de las siguientes 4-uplas son soluciones de S? ¿y del sistema homogéneo asociado?

$\mathbf{x} = (2,2,1,0)$ $\mathbf{y} = (1,1,1,4)$ $\mathbf{z} = (0,0,0,0)$

$\mathbf{u} = (-2, \frac{-5}{3}, \frac{10}{3}, -7)$ $\mathbf{v} = (-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ $\mathbf{w} = (-1, -2, 3, -7)$

Ejercicio 2.- Determinar, si existen, a y b para que $(2, -2, 1)$ sea solución de

$$\begin{cases} x_1 + 2ax_2 + x_3 = -1 \\ ax_2 - bx_3 = -4 \\ bx_1 + x_2 + (2a-b)x_3 = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 3.- Obtener un sistema equivalente al dado, cuya matriz ampliada sea escalonada en las filas reducida.

a) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 4.- Resolver por el método de eliminación de Gauss el sistema cuya matriz aumentada es $(A \vdots \mathbf{b})$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathbf{b} = (1,2,-1,0)$, $\mathbf{b} = (0,0,0,0)$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathbf{b} = (1,2,1,2)$, $\mathbf{b} = (2,0,-1,1)$, $\mathbf{b} = (0,0,0,0)$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathbf{b} = (5,3,2)$, $\mathbf{b} = (-1,1,2)$, $\mathbf{b} = (2,1,1)$, $\mathbf{b} = (0,0,0)$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathbf{b} = (2,1,2)$, $\mathbf{b} = (0,0,0)$, $\mathbf{b} = (1,0,0)$, $\mathbf{b} = (0,1,0)$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathbf{b} = (3,1,-1)$, $\mathbf{b} = (0,-1,-2)$, $\mathbf{b} = (0,0,0)$, $\mathbf{b} = (1,1,2)$

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 2 & 1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathbf{b} = (1,2,3,2)$, $\mathbf{b} = (1,-3,0,3)$

Ejercicio 5.- Determinar si el sistema tiene soluciones no triviales, sin resolverlo.

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0 \end{cases}$

Ejercicio 6.- Mostrar tres elementos de cada uno de los conjuntos siguientes.

a) $\mathbb{S}_1 = \left\{ A \in \mathbb{R}^{3\times3} / a_{ij} = a_{ji}, \ 1 \le i, j \le 3 \right\}$ (matrices simétricas)

b) $\mathbb{S}_2 = \left\{ A \in \mathbb{R}^{3\times3} / a_{ij} + a_{ji} = 1, \ 1 \le i, j \le 3 \right\}$

c) $\mathbb{S}_3 = \left\{ A \in \mathbb{R}^{3\times3} / a_{ij} = -a_{ji}, \ 1 \le i, j \le 3 \right\}$ (matrices antisimétricas)

d) $\mathbb{S}_4 = \left\{ A \in \mathbb{R}^{4\times4} / \sum_{i=1}^{4} a_{ii} = 0 \right\}$ (matrices de traza nula)

e) $\mathbb{S}_5 = \left\{ A \in \mathbb{R}^{3\times4} / A \text{ tiene alguna fila nula} \right\}$

f) $\mathbb{S}_6 = \left\{ A \in \mathbb{R}^{3\times3} / a_{ij} = 0, \text{ si } i > j \right\}$ (matrices triangulares superiores)

Ejercicio 7.- Efectuar, cuando sea posible, los cálculos indicados.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) BA ii) BC iii) CB iv) AB v) $BA - C$

vi) ED vii) DA viii) $EA + D$ ix) $AE + 3C$

Ejercicio 8.- Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, hallar

a) la tercera fila de AB

b) la tercera columna de BA

c) el coeficiente c_{32} de $C = BAB$

Ejercicio 9.- Determinar todas las matrices B que verifican:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 10.- Hallar todas las matrices $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 11.- Hallar todas las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que AX + B = BX + A.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 12.- Determinar cuáles de las siguientes matrices son inversibles; exhibir la inversa cuando exista.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $H = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $G + H$

Ejercicio 13.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Decidir si A^{-1} es solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 14.- Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Si $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ son soluciones de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, hallar 4 soluciones de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 15.- Sean (1,3,1), (2,2,4) y (2,0,4) soluciones de un sistema lineal no homogéneo.

a) Hallar dos rectas distintas tales que todos sus puntos sean soluciones del sistema homogéneo asociado.

b) Econtrar un plano tal que todos sus puntos sean soluciones del sistema no homogéneo.

Ejercicio 16.- Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son soluciones de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es solución de $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Encontrar una recta de soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 17.- Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbb{S}_0 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ / \ A\mathbf{x} = \mathbf{0} \right\}$.

Encontrar todos los $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$ tales que $B\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 18.- Dadas $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} a \\ a-3 \\ a+1 \end{pmatrix}$, determinar todos los valores de a para los cuales el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ es compatible.

Resolver el sistema para alguno de los valores de a hallados.

Ejercicio 19.-

a) Encontrar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema S tiene solución única.

$$S \begin{cases} (k^2-1)x_1 + x_2 + kx_3 = 0 \\ (k-1)x_2 + x_3 = 0 \\ (k+2)x_3 = 0 \end{cases}$$

b) Determinar todos los valores de k para los cuales el sistema S admite solución no trivial

$$S \begin{cases} (k+1)x_1 - 2x_2 + kx_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + (k+2)x_2 + kx_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + kx_3 + (k+4)x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + kx_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 20.- Encontrar todos los valores de a y b para los cuales los sistemas cuyas matrices ampliadas se dan a continuación son compatibles.

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 2 & a & b \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & b \\ 0 & a+1 & a^2-1 & b+2 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & a+1 & -a-1 & b+a \end{array}\right)$ d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2+a & b \\ 2 & a-4 & -4 & 2 \\ a-2 & 0 & 12 & 1 \end{array}\right)$

Ejercicio 21.- Resolver el sistema para todos los valores de b.

$$\begin{cases} x_1 + bx_2 + 2x_3 - x_4 = b+2 \\ x_1 + bx_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 3bx_2 + 2x_3 - 2x_4 = b \end{cases}$$

Ejercicio 22.- Encontrar todos los valores de a y b para los cuales (2,0,–1) es la única solución del sistema $\begin{cases} 2x_1 - ax_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - bx_3 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$

Ejercicio 23.- Hallar todos los valores de k para los cuales

M = {λ(1,1,0,0)+(2,0,–1,0) , $\lambda \in \mathbb{R}$} es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ (k^2-1)x_2 + 2x_4 = -k^2+1 \\ (k+1)x_3 + 4x_4 = -k-1 \end{cases}$$

Ejercicio 24.- Determinar, para todos los valores reales de a y b, si el sistema cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 2+a & 2-a \\ -1 & -a & a & b \end{array}\right)$ es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

Ejercicio 25.- Encontrar todos los valores de a y b para los cuales el sistema cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ -a & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -a & a & b \end{array}\right)$ tiene como conjunto solución una recta.

EJERCICIOS SURTIDOS

1. Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 + A + I = 0$.

Demostrar que $A^{-1} = -I - A$.

2. Determinar $a, b \in \mathbb{R}$ para que $(1,-1,2,-1)$ sea solución del sistema cuya matriz aumentada es $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & a & 2 \\ -2b & -2 & 0 & 2 & 2 \\ a & -4 & -b & 5 & 4 \end{array}\right)$.

Para los valores hallados resolver el sistema.

3. Se considera el sistema $\begin{cases} 2ax_1 - x_2 - 3cx_3 - 3x_4 = 2 \\ -x_1 + ax_2 + 2bx_3 + cx_4 = 1 \\ x_1 - cx_2 + ax_3 + bx_4 = 0 \\ bx_1 - 2ax_2 - 3cx_3 - 5x_4 = -7 \end{cases}$

Hallar los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ para los cuales $X = (2,-1,-1,2)$ es solución del sistema.

4. Encontrar una matriz X que satisfaga la ecuación

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = X\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Se sabe que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son soluciones del sistema $Ax = b$. Hallar alguna solución de $Ax = b$ que también sea solución de $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 9$.

6. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el conjunto de soluciones del sistema $\begin{cases} x + 2ky + z = 1 \\ kx + 2y + kz = k \\ 2y + kz = k-2 \end{cases}$ es una recta contenida en el plano $x - 4y + 2z = 4$.

7. Se sabe que $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es solución de $3A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y que $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ es solución de $2A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Encontrar cuatro soluciones distintas del sistema $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

8. Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que $\{(2,0,-3)\}$ es el conjunto de soluciones del sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + ax_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$

9. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B \in \mathbb{R}^{3\times3}$ una matriz inversible y $C \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tales que $BC=A$.

Hallar las soluciones del sistema $B^2C\mathbf{x} = 2B\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)$.

10. Hallar todos los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema

$S: \begin{cases} x_1 + 3x_2 + ax_3 - x_4 = b \\ 2x_1 + 2x_2 - ax_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = b \end{cases}$ es compatible indeterminado.

Resolver el sistema para alguno de los valores hallados.

11. Sean $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 1 & 0 & k\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Hallar todos los valores de $k\in\mathbb{R}$ para los cuales el sistema $A\mathbf{x}=2\mathbf{x}-B\mathbf{x}$ tiene infinitas soluciones. Resolver el sistema para alguno de los valores de k hallados.

12. Se sabe que (1,2,0) y (3,0,–1) son soluciones de un sistema no homogéneo S. Hallar una solución de S que sea también solución del sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

13. Sean en $\mathbb{R}^4$ los sistemas

$$S_1\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases} \quad \text{y} \quad S_2\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 + ax_3 = b \end{cases}$$

Hallar todos los valores de $a,b\in\mathbb{R}$ para los cuales S_1 y S_2 tienen infinitas soluciones comunes. Para los valores hallados encontrar todas las soluciones comunes.