Noción de límite

conceptual : si tengo la siguiente expresión : $4\,x^3$, pensemos qué sucede cuando $x \to +\infty$?

Imaginen que x vale 1000.

x^3 será $(1000)^3 = 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 = 10^9$, mil millones y por 4, dará 4000 millones.

Y si tomo un x más grande todavía,
es claro que va a dar más grande aún, porque está al cubo.

Entonces para $x \to +\infty$, dará como resultado $+\infty$.

Esta idea del comportamiento de $f(x) = 4\,x^3$ en $+\infty$ se escribe así :

$$\lim_{x \to +\infty} 4\,x^3 = +\infty$$

y se lee "el limite cuando x tiende a $+\infty$ de $4x^3$ es $+\infty$"

Pero que pasa si $x \to -\infty$ (si x tiende a $-\infty$) ?

como x es muy negativo y está elevado al cubo,
el resultado será mucho más negativo, por el cubo.

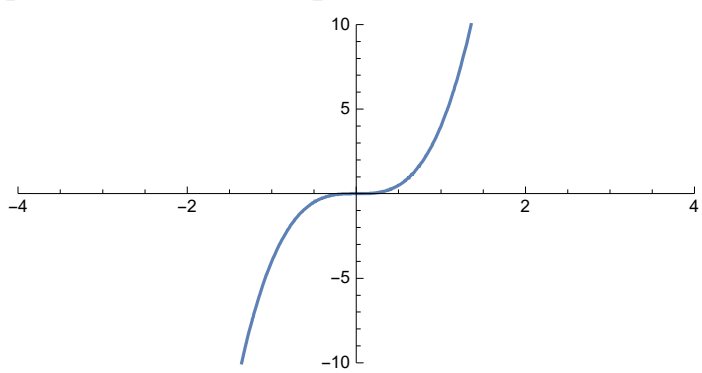
Esta idea del comportamiento de $f(x) = 4\,x^3$ en $-\infty$ se escribe así :

$$\lim_{x \to -\infty} 4\,x^3 = -\infty$$

y se lee "el limite cuando x tiende a $-\infty$ de $4x^3$ es $-\infty$"

In[30]:=
```
Plot[4 x^3, {x, -4, 4}, PlotRange → {{-4, 4}, {-10, 10}}, AspectRatio → 0.5]
```
representación gráfica | rango de representación | cociente de aspecto

Out[30]=



Otro concepto : qué pasa si tengo un número en el numerador,
pero el denominador es más grande ?

Por ejemplo : $\frac{1}{x}$

Si $x = 1000$, $\frac{1}{x}$ da como resultado $\frac{1}{1000} = 0.001$ o sea 10^{-3} .

Y si $x = 1\,000\,000 = 1$ millón $= 10^6$

$\frac{1}{x}$ dará $\frac{1}{1\,000\,000} = \frac{1}{1 \text{ millón}} = 0.000001 = 10^{-6}$

Es decir, que a medida que x sea cada vez más grande,
como está en el denominador, el cociente se va pareciendo más a 0.

En el limite, cuando $x \to +\infty$ $f(x)$ tiende a 0 $\left(f(x) \to 0\right)$

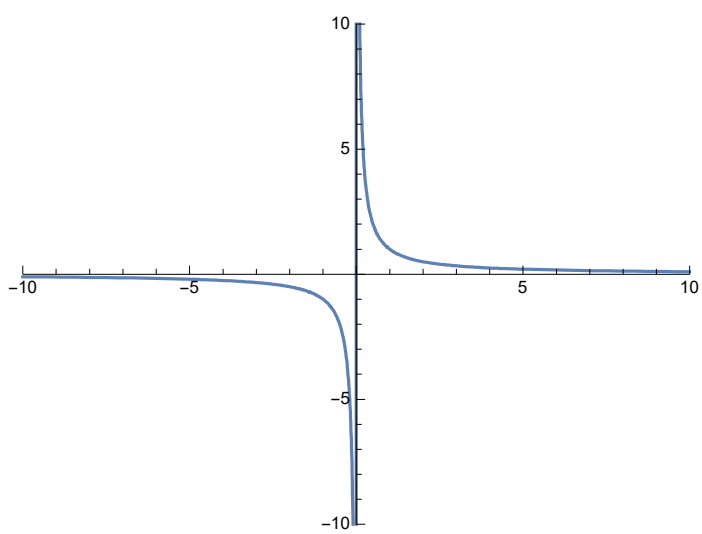
Esta idea del comportamiento de $f(x) = \frac{1}{x}$ en $+\infty$ se escribe así :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ah, pero entonces la recta horizontal $y = 0$ es asíntota horizontal. Ok,
ver definición debajo

In[34]:=
```
Plot[1/x, {x, -10, 10}, PlotRange → {{-10, 10}, {-10, 10}}, AspectRatio → 0.75]
```
representación gráfica | rango de representación | cociente de aspecto

Out[34]=



Idem para x negativos, piensen qué sucede si tomo x cada vez más negativos :

$\frac{1}{x}$ se irá aproximando a 0 , pero con valores negativos,
cerca de 0 (se aproxima por debajo del 0)

$\left(\frac{1}{-1\,000\,000} = -0.000001 = -10^{-6}\right)$, etc. etc., si tomamos valores más negativos

Definición Asíntota horizontal :

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, b un número real, se dice que la recta horizontal $y = b$
es Asíntota horizontal de f (x) para $x \to +\infty$

Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$, c un número real, se dice que la recta horizontal $y = c$
es Asíntota horizontal de f (x) para $x \to -\infty$

Los valores de f (x) se van aproximando cada
vez más al valor b ("por arriba o por debajo de b")
y nunca vale b salvo en el límite cuando x tiende a $+\infty$

De manera similar, los valores de f (x) se van aproximando cada vez más al valor c
("por arriba o por debajo de c")
y nunca vale c salvo en el límite cuando x tiende a $-\infty$

Puede suceder que
1. - f (x) tenga una asíntota horizaontal $y = b$ cuando $x \to +\infty$
y otra asíntota horizontal $y = c$ cuando $x \to -\infty$
ó 2. - que sea la misma $y = b = c$ tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$,
o 3. - que tenga asíntota horizontal $y = e$ sólo cuando $x \to +\infty$ y que para $x \to -\infty$
no tenga asíntota horizontal
o 4. - que tenga asíntota horizontal $y = t$ sólo cuando $x \to -\infty$ y que para $x \to +\infty$
no tenga asíntota horizontal
o 5. - que no tenga asíntota horizontal ni para $x \to +\infty$ ni para $x \to -\infty$

Álgebra de Límites

Sean a, b números reales y f (x) y g (x) dos funciones.

1. - Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = b \implies \lim_{x\to+\infty} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b$

"si existe el límite de cada una de
las funciones, el límite de una suma de funciones
es la suma de los límites de cada una de ellas. Idem con la resta"

2. - Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = b \implies \lim_{x\to+\infty} [f(x)\cdot g(x)] = a\cdot b$

"si existe el límite de cada una de
las funciones, el límite de un producto de funciones
es el producto de los límites de cada una de ellas"

3. - Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = b$ $(b \neq 0) \implies \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{a}{b}$

"si existe el límite de cada una de
las funciones, el límite de un cociente de funciones
es el cociente de los límites de cada una de ellas"

4. - Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ y k es un número real $\implies \lim_{x\to+\infty} [k\cdot f(x)] = k\cdot \lim_{x\to+\infty} f(x) = k\cdot a$

5. - Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = b$ $(a > 0) \implies \lim_{x\to+\infty} f(x)^{g(x)} = a^b$

6. - si k es un número real $\lim_{x\to+\infty} k = k$ $\left(\text{Ejemplo}: \lim_{x\to+\infty} 5 = 5\right)$

7. - Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \implies \lim_{x\to+\infty} |f(x)| = |a|$

7. - Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \pm\infty \implies \lim_{x\to+\infty} [f(x) \pm g(x)] = \pm\infty$

8.1 - Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \pm\infty \implies \lim_{x\to+\infty} [f(x).g(x)] = \pm\infty$ $(\text{si } a > 0)$

8.2 - Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \pm\infty \implies \lim_{x\to+\infty} [f(x).g(x)] = \mp\infty$ $(\text{si } a < 0)$

9.1 - Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ y k es un número real,
$k \neq 0 \implies \lim_{x\to+\infty} [k\cdot f(x)] = k\cdot \lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$

9.2 - Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ y k es un número real, $k \neq 0 \implies \lim_{x\to+\infty} [k / f(x)] = k \Big/ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

10. - Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \pm\infty \implies \lim_{x\to+\infty} [f(x) / g(x)] = 0$ $(\forall\ a \in \mathbb{R})$

Los demás casos de producto y división deben analizarse caso por caso

Los mismos resultados se aplican para cuando el límite se calcula para $x \to -\infty$

Regla para el cálculo de límites cuando $x \to \pm\infty$

Cuando se calcula el límite cuando $x \to \pm\infty$ del cociente de f (x) con g (x)
con f y g funciones polinómicas conviene sacar factor común x elevado al máximo
exponente tanto en numerador como denominador

i) el numerador tiene un exponente en x mayor que en el denominador

$f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$

$g(x) = x^2 + 3x - 4$

Entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x^2-x+5}{2x^2+3x-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}{x^2\left(2+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}$$

simplificando x^3 con x^2 , $\frac{x^3}{x^2} = x$, es decir :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}{\left(2+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\frac{\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}{\left(2+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}\right] =$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}{\left(2+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}\right] = \lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\frac{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}\right)$$

veamos si existen los límites del numerador y del denominador :

teniendo en cuenta que $\frac{2}{x}\to 0$ que $\frac{1}{x^2}\to 0$ y que $\frac{5}{x^3}\to 0$ cuando $x\to+\infty$

entonces en el numerador

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right) = \lim_{x\to+\infty} 1+\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x^3} = 1+0-0+0 = 1$$

Idem en el denominador : $\frac{3}{x}\to 0$ y que $\frac{4}{x^2}\to 0$ cuando $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} 2+\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2} = 2+0-0 = 2$$

Entonces, juntando todo y como existen los límites del numerador y del denominador

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x^2-x+5}{2x^2+3x-4} = \ldots\ldots =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\frac{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}\right) = \ldots = (+\infty)\cdot\frac{1}{2} = +\infty$$

ii) el numerador tiene un exponente en x igual que en el denominador

$f(x) = 3x^2-2x+3$

$g(x) = -2x^2+3x-1$

Entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x+3}{-2x^2+3x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(-2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}$$

simplificando x^2 con x^2 , $\frac{x^2}{x^2} = 1$, queda :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(3 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{\left(-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}$$

veamos si existen los límites del numerador y del denominador :

en el numerador y teniendo en cuenta que $\frac{2}{x} \to 0$ y que $\frac{3}{x^2} \to 0$ cuando $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(3 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} 3 - \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2} = 3 - 0 + 0 = 3$$

Idem en el denominador : $\frac{3}{x} \to 0$ y que $\frac{1}{x^2} \to 0$ cuando $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} -2 + \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = -2 + 0 - 0 = -2$$

Entonces, juntando todo y como existen los límites del numerador y del denominador

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - 2x + 3}{-2x^2 + 3x - 1} = \ldots\ldots = \frac{\lim_{x\to+\infty} \left(3 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{\lim_{x\to+\infty} \left(-2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{3}{(-2)} = -\frac{3}{2}$$

Cuando el numerador y el denominador tienen como máximo exponente de x el mismo grado el resultado del límite cuando $x \to \pm\infty$ es el cociente de los coeficientes que acompañan a los exponentes de mayor e igual grado

iii) el numerador tiene un exponente en x menor que en el denominador

$f(x) = -2x + 7$

$g(x) = 5x^2 + 3x - 1$

Entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x + 7}{5x^2 + 3x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(-2 + \frac{7}{x}\right)}{x^2\left(5 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}$$

simplificando x con x^2 , queda $\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(-2 + \frac{7}{x}\right)}{x\left(5 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{\left(-2 + \frac{7}{x}\right)}{\left(5 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}\right]$$

veamos si existen los límites de $\frac{1}{x}$ y del numerador y del denominador del 2 do factor :

Por una parte $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

En el numerador y teniendo en cuenta que $\frac{7}{x} \to 0$ cuando $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-2+\frac{7}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} -2 + \lim_{x\to+\infty}\frac{7}{x} = -2+0 = -2$$

Idem en el denominador : como $\frac{3}{x} \to 0$ y que $\frac{1}{x^2} \to 0$ cuando $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(5+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} 5 + \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 5+0-0 = 5$$

Entonces, juntando todo y como existen los límites de $\frac{1}{x}$

y del numerador y del denominador del 2 do factor :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x+7}{5x^2+3x-1} = \ldots\ldots =$$

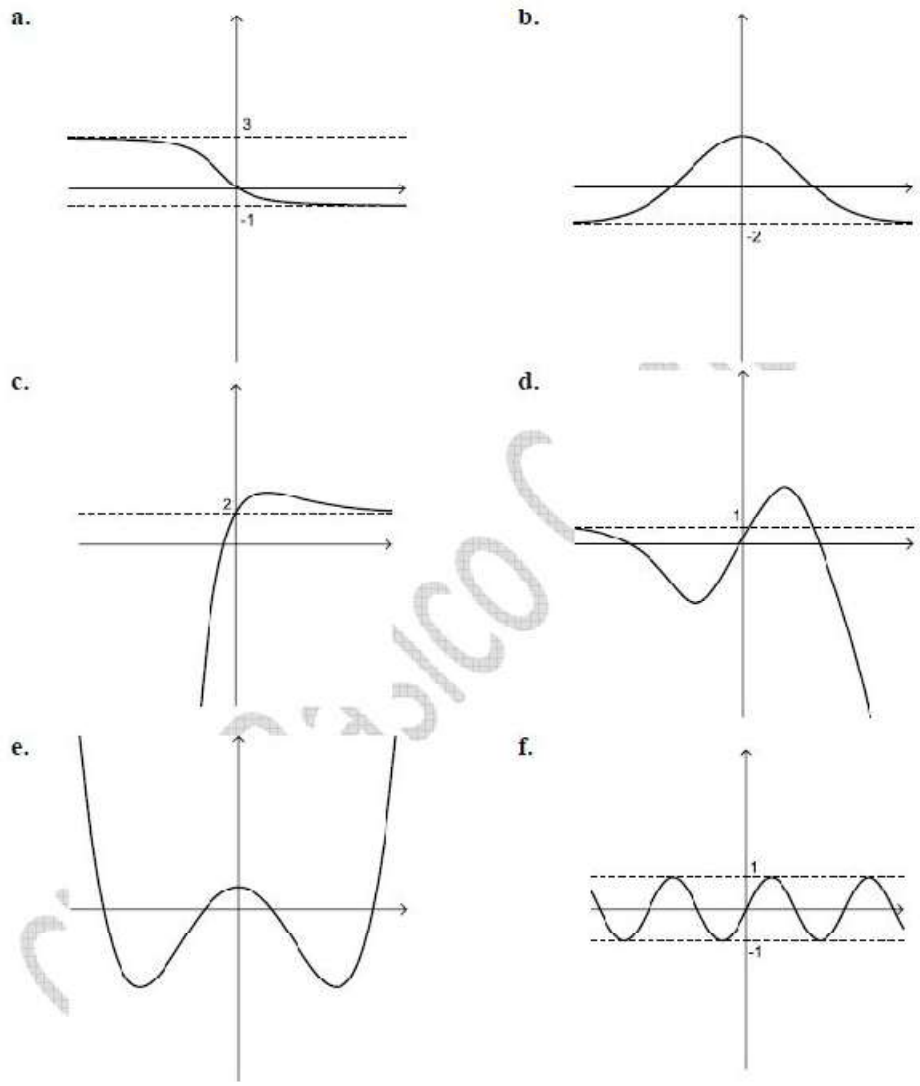
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\,\frac{\left(-2+\frac{7}{x}\right)}{\left(5+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{\lim_{x\to+\infty}\left(-2+\frac{7}{x}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(5+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} = 0\cdot\frac{(-2)}{(5)} = 0$$

Veamos ahora la resolución de algunos ejercicios de la Práctica 3 hasta el Ej 5 inclusive

PRÁCTICA 3

LÍMITE DE FUNCIONES Y ASÍNTOTAS

Ejercicio 1.- Analizando el gráfico de f, determinar, si existen, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.



Ej 1 a) cuando x es muy negativo, es decir, cuando x → -∞ f (x) o sea las imágenes se aproximan al valor y = 3 pero nunca lo alcanzan. En el límite cuando x → -∞ podemos suponer que f (x) será 3. Este resultado lo escribimos así :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$$

Este resultado se ajusta a la definición que hemos dado de Asíntota horizontal :

cuando $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$ decimos que la recta horizontal
$y = 3$ es Asíntota horizontal de $f(x)$ cuando $x \to -\infty$

Cuando $f(x)$ tiene una asíntota como $y =$
3 cuando $x \to -\infty$ suele decirse también que "$f(x)$ tiende
asintóticamente al valor 3 cuando $x \to -\infty$ "

Observación : $f(x)$ tiende asintóticamente al valor 3 por debajo, esto quiere decir
que va tomando valores cada vez más cercanos a 3 cuando x va siendo cada vez más negativo

por ejemplo, 2.9999 ; 2.99999; 2.999999; 2.9999999; .....
en el límite cuando $x \to -\infty$ dará 3

Ahora veamos el comportamiento de $f(x)$ para x muy positivos :

a partir del gráfico de $f(x)$ vemos que se va aproximando al valor 1 ("por arriba del 1")

En este caso escribimos :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

Este resultado también se ajusta a la definición que hemos dado de Asíntota horizontal :

cuando $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ decimos que la recta horizontal
$y = 1$ es Asíntota horizontal de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$.

Cuando $f(x)$ tiene una asíntota como $y =$
1 cuando $x \to +\infty$ suele decirse también que "$f(x)$ tiende
asintóticamente al valor 1 cuando $x \to +\infty$ "

Observación : $f(x)$ tiende asintóticamente al valor 1 por arriba, esto quiere decir
que va tomando valores cada vez más cercanos a 1 cuando x va siendo cada vez más positivo

por ejemplo, 1.0001 ; 1.00001; 1.000001; 1.0000001; .....
en el límite cuando $x \to +\infty$ dará 1

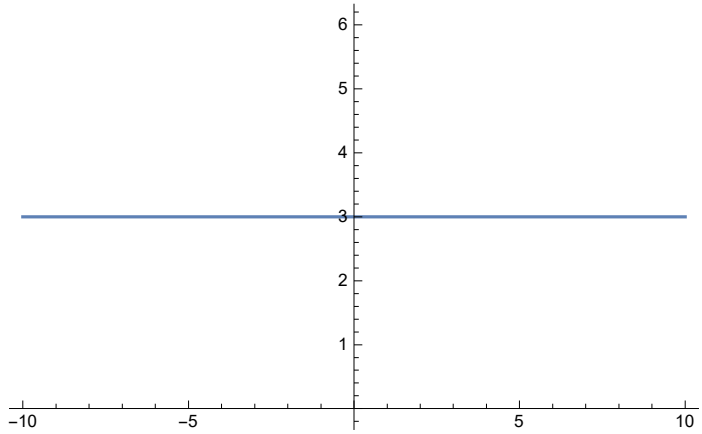
Tip - dato importante :

Recuerden que una función lineal del tipo $f(x) = y = b$ es una recta horizontal
que pasa por b en el eje y

Por ejemplo, $y = 3$

In[12]:=
```
Plot[3, {x, -10, 10}]
```
representación gráfica

Out[12]=



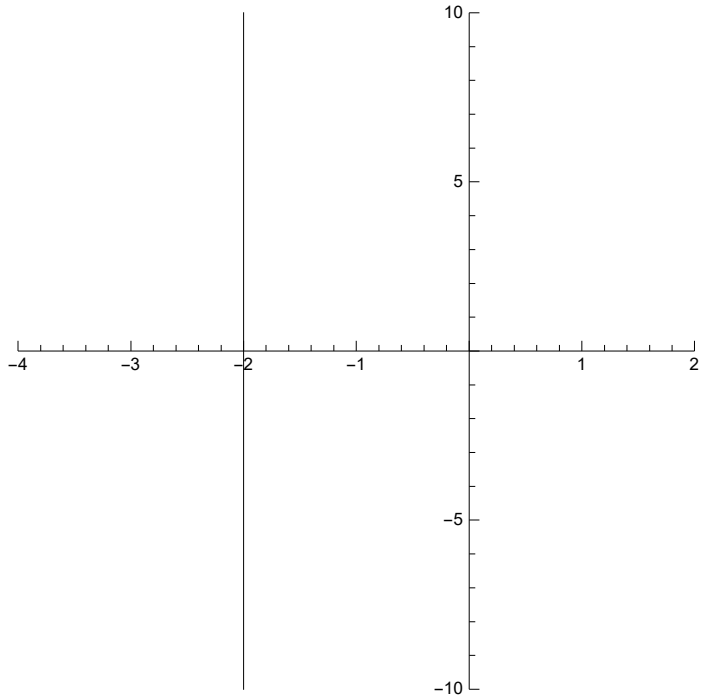
y que una recta vertical (que no es función) se escribe como x = a con a un valor en el eje x

Por ejemplo,

x = -2

In[21]:=
```
Graphics[Line[{{-2, -10}, {-2, 10}}],
 PlotRange → {{-4, 2}, {-10, 10}}, Axes → True, AspectRatio → 1]
```
gráfico línea rango de representación ejes verd··· cociente de aspecto

Out[21]=



Vamos más rápido ahora :

Ej 1 b) los límites Existen cuando $x \to \pm\infty$ (se usa este símbolo $\exists$) y dan los siguientes valores :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$ **entonces** $y = -2$ **es asíntota horizontal de** $f(x)$ **cuando** $x \to +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$ **entonces** $y = -2$ **es asíntota horizontal de** $f(x)$ **cuando** $x \to -\infty$

Ej 1 c) En este caso los límites Existen cuando $x \to \pm\infty$ (aunque uno de ellos de $-\infty$) y dan los siguientes valores :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ **entonces** $y = 2$ **es asíntota horizontal de** $f(x)$ **cuando** $x \to +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ **entonces** $f(x)$ **no tiene asíntota horizontal cuando** $x \to -\infty$

Ej 1 d) En este caso los límites Existen cuando $x \to \pm\infty$ (aunque uno de ellos de $-\infty$) y dan los siguientes valores :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ **entonces** $f(x)$ **no tiene asíntota horizontal cuando** $x \to +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ **entonces** $f(x)$ $y = 1$ **es asíntota horizontal cuando** $x \to -\infty$

Ej 1 e) En este caso los límites Existen cuando $x \to \pm\infty$ (aunque los dos den $+\infty$) y dan los siguientes valores :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **entonces** $f(x)$ **no tiene asíntota horizontal cuando** $x \to +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ **entonces** $f(x)$ **no tiene asíntota horizontal cuando** $x \to -\infty$

Ej 1 f) En este caso los límites NO Existen cuando $x \to \pm\infty$ (se usa este símbolo $\nexists$) y se escribe de la siguiente manera :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \nexists$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \nexists$

Los límites no existen porque la función oscila indefinidamente tanto cuando $x \to +\infty$ como cuando $x \to -\infty$ y no alcanza un valor constante ó $+\infty$ ó $-\infty$

++

Ejercicio 2.- Calcular.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^5$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x^3}$

e. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\frac{3}{x}+5\right)$

f. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(-2+\frac{7}{x}\right)$

g. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(6-\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(9+\frac{1}{x}\right)}$

h. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-7x^4+9x^2+100\right)$

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(6x^5-2x^3+x+9\right)$

j. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x^5+x^3-3}{x^6+1}$

k. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+4x}{-2x^2+1}$

l. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^3+6}{6x^3+x^2+12x}$

m. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{-x^4+2x^3-5x}{x^3+9x^2+10x}+5\right)$

n. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{8x^3-16x^2}{x+1}\right)$

o. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{x+2}-1\right)\left(6+\frac{1}{x}\right)$

p. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{9x^2-x+1}{-3x^2+7x}\right)\left(\frac{5}{x-4}\right)$

Ej 2 a) Calcular :

$\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2 = +\infty$

Por la propiedad de Álgebra de límites, propiedad 9.1 -

("9.1- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$, k un número real, $k\neq 0$ $\Longrightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty} [k\cdot f(x)]= k\cdot\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$")

$\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2 = 4\cdot\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = 4\cdot(+\infty) = +\infty$

Ej 2 b)

$\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3 = +\infty$

Por la propiedad de Álgebra de límites, propiedad 9.1 -

$\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3 = 3\cdot\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = 3\cdot(+\infty) = +\infty$

Ej 2 c)

$$\lim_{x\to+\infty} -2x^5 = -\infty$$

Por la propiedad de Álgebra de límites, propiedad 9.1 -

$$\lim_{x\to+\infty} -2x^5 = (-2)\cdot\lim_{x\to+\infty} x^5 = (-2)\cdot(+\infty) = -\infty$$

Ej 2 d)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^3} = 0$$

Por la propiedad de Álgebra de límites, propiedad 10. -

$$\left(\text{"10.- Si } \lim_{x\to+\infty} f(x)=a \quad y \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=\pm\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x)/g(x)]=0 \quad (\forall\ a\in\mathbb{R})\text{"}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^3} = \frac{\lim_{x\to+\infty} 2}{\lim_{x\to+\infty} x^3} = \frac{2}{\lim_{x\to+\infty} x^3} = \frac{2}{(+\infty)} = 0$$

Ej 2 e)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-3}{x}+5\right) = 0 + 5 = 5$$

Acá usamos Álgebra de límites de la suma pues como $\exists$ los límites

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{x} = 0 \quad y \quad \lim_{x\to+\infty} 5 = 5 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-3}{x}+5\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-3}{x}\right) + \lim_{x\to+\infty} 5 = 0+5 = 5$$

Ej 2 f)

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\cdot\left(-2+\frac{7}{x}\right) = -\infty$$

Acá usamos Álgebra de límites del producto pues como $\exists$ los límites

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \quad y \quad \lim_{x\to+\infty} \left(-2+\frac{7}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} (-2) + \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{7}{x}\right) = -2+0 = -2$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} x^3\cdot\left(-2+\frac{7}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^3 \cdot \lim_{x\to+\infty} \left(-2+\frac{7}{x}\right) = +\infty\cdot(-2) = -\infty$$

Ej 2 g)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(6-\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(9+\frac{1}{x}\right)} = 0$$

Acá usamos Álgebra de límites del cociente pues como ∃ los límites

$$\lim_{x\to+\infty}\left(6-\frac{5}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} 6 - \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2} = 6-0 = 6 \quad \text{y}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(9+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \lim_{x\to+\infty}\left(9+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \left(\lim_{x\to+\infty} 9 + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\right) = +\infty\cdot(9+0) = +\infty\cdot 9 = +\infty$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(6-\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(9+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\left(6-\frac{5}{x^2}\right)}{\lim_{x\to+\infty} x^2\left(9+\frac{1}{x}\right)} = \ldots\ldots = \frac{6}{(+\infty)} = 0$$

También podríamos haber hecho lo siguiente :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(6-\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(9+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\left(6-\frac{5}{x^2}\right)}{\left(9+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\lim_{x\to+\infty}\left(6-\frac{5}{x^2}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(9+\frac{1}{x}\right)} = 0\cdot\frac{6}{9} = 0$$

Ej 2 h)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-7x^4+9x^2+100\right) = -\infty$$

Acá usamos Álgebra de límites del producto luego de primero sacar factor común el término con x al exponente más alto (x^4)

$$-7x^4+9x^2+100 = x^4\cdot\left(-7+\frac{9}{x^2}+\frac{100}{x^4}\right)$$

pues como ∃ los límites

$$\lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(-7+\frac{9}{x^2}+\frac{100}{x^4}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}(-7) + \lim_{x\to+\infty}\frac{9}{x^2} + \lim_{x\to+\infty}\frac{100}{x^4}\Big) = -7+0+0 = -7$$

Entonces

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-7x^4+9x^2+100\right) = \lim_{x\to+\infty} x^4\left(-7+\frac{9}{x^2}+\frac{100}{x^4}\right) =$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} x^4 \cdot \lim_{x\to+\infty}\left(-7+\frac{9}{x^2}+\frac{100}{x^4}\right) = +\infty\cdot(-7) = -\infty$$

Ej 2 i)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(6x^5 - 2x^3 + x + 9\right) = +\infty$$

De nuevo, usamos Álgebra de límites del producto luego de primero sacar factor común el término con x al exponente más alto $\left(x^5\right)$

$$6x^5 - 2x^3 + x + 9 = x^5 \cdot \left(6 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{9}{x^5}\right)$$

pues como $\exists$ los límites

$$\lim_{x\to+\infty} x^5 = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} \left(6 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{9}{x^5}\right) = 6$$

Entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \left(6x^5 - 2x^3 + x + 9\right) = \lim_{x\to+\infty} x^5 \cdot \left(6 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{9}{x^5}\right)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} x^5 \cdot \lim_{x\to+\infty} \left(6 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{9}{x^5}\right) = +\infty \cdot 6 = +\infty$$

Ej 2 j)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^5 + x^3 - 3}{x^6 + 1} = 0$$

De nuevo, usamos Álgebra de límites del producto y del cociente luego de primero sacar factor común el término con x al exponente más alto $\left(x^5\right)$ en el numerador y x^6 en el denominador

$$\frac{-2x^5 + x^3 - 3}{x^6 + 1} = \frac{x^5 \cdot \left(-2 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^5}\right)}{x^6 \cdot \left(1 + \frac{1}{x^6}\right)} \quad \text{simplificando } \frac{x^5}{x^6} = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad = \frac{1}{x} \cdot \frac{\left(-2 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^5}\right)}{\left(1 + \frac{1}{x^6}\right)}$$

y luego como $\exists$ los límites

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} \left(-2 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^5}\right) = -2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x^6}\right) = 1$$

Entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^5 + x^3 - 3}{x^6 + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 \cdot \left(-2 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^5}\right)}{x^6 \cdot \left(1 + \frac{1}{x^6}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\left(-2 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^5}\right)}{\left(1 + \frac{1}{x^6}\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\lim_{x\to+\infty} \left(-2 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^5}\right)}{\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x^6}\right)} = 0 \cdot \frac{-2}{1} = 0$$

Ej 2 k)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4x}{-2x^2+1} = -\frac{1}{2}$$

De nuevo, usamos Álgebra de límites del producto y del cociente luego de primero sacar factor común el término con x al exponente más alto (x^2) en el numerador y x^2 en el denominador

$$\frac{x^2+4x}{-2x^2+1} = \frac{x^2\cdot\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(-2+\frac{1}{x^2}\right)} \text{ simplificando } \frac{x^2}{x^2}=1 \quad\Longrightarrow\quad = \frac{\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{\left(-2+\frac{1}{x^2}\right)}$$

y luego como $\exists$ los límites

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x^2}\right)=1 \text{ y } \lim_{x\to+\infty}\left(-2+\frac{1}{x^2}\right)=-2$$

Entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4x}{-2x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\cdot\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(-2+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{\left(-2+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Ej 2 l)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3+6}{6x^3+x^2+12x} = \frac{5}{6}$$

De nuevo, usamos Álgebra de límites del producto y del cociente luego de primero sacar factor común el término con x al exponente más alto (x^3) en el numerador y x^3 en el denominador

$$\frac{5x^3+6}{6x^3+x^2+12x} = \frac{x^3\cdot\left(5+\frac{6}{x^3}\right)}{x^3\cdot\left(6+\frac{1}{x}+\frac{12}{x^2}\right)} \text{ simplificando } \frac{x^3}{x^3}=1 \quad\Longrightarrow\quad = \frac{\left(5+\frac{6}{x^3}\right)}{\left(6+\frac{1}{x}+\frac{12}{x^2}\right)}$$

y luego como $\exists$ los límites

$$\lim_{x\to+\infty}\left(5+\frac{6}{x^3}\right)=5 \text{ y } \lim_{x\to+\infty}\left(6+\frac{1}{x}+\frac{12}{x^2}\right)=6$$

Entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3+6}{6x^3+x^2+12x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\cdot\left(5+\frac{6}{x^3}\right)}{x^3\cdot\left(6+\frac{1}{x}+\frac{12}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(5+\frac{6}{x^3}\right)}{\left(6+\frac{1}{x}+\frac{12}{x^2}\right)} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\left(5+\frac{6}{x^3}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(6+\frac{1}{x}+\frac{12}{x^2}\right)} = \frac{5}{6}$$

Ej 2 m)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^4+2x^3-5x}{x^3+9x^2+10x}+5\right)=-\infty$$

De nuevo, usamos Álgebra de límites de la suma y del producto y del cociente
Para el 1 er término, luego de primero sacar factor común el término con x al exponente más alto (x^4) en el numerador y x^3 en el denominador

$$\frac{-x^4+2x^3-5x}{x^3+9x^2+10x}=\frac{x^4\cdot\left(-1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^3}\right)}{x^3\cdot\left(1+\frac{9}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}\ \text{simplificando}\ \frac{x^4}{x^3}=x\quad\Longrightarrow\quad=x\cdot\frac{\left(-1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^3}\right)}{\left(1+\frac{9}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}$$

y luego como $\exists$ los límites

$$\lim_{x\to+\infty}x=+\infty\ \text{ y }\lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^3}\right)=-1\ \text{ y }\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{9}{x}+\frac{10}{x^2}\right)=1\quad\text{ y }\lim_{x\to+\infty}5=5$$

Entonces

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^4+2x^3-5x}{x^3+9x^2+10x}+5\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4+2x^3-5x}{x^3+9x^2+10x}+\lim_{x\to+\infty}5=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\cdot\left(-1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^3}\right)}{x^3\cdot\left(1+\frac{9}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}+\lim_{x\to+\infty}5=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{\left(-1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^3}\right)}{\left(1+\frac{9}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}+\lim_{x\to+\infty}5=$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{9}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}+\lim_{x\to+\infty}5=(+\infty)\cdot\frac{(-1)}{1}+5=(-\infty)+5=-\infty$$

Ej 2 n)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{8x^3-16x^2}{x+1}\right)=+\infty$$

De nuevo, usamos Álgebra de límites del producto y del cociente
luego de primero sacar factor común el término con x al exponente más alto (x^3) en el numerador y x en el denominador

$$\frac{8x^3-16x^2}{x+1}=\frac{x^3\cdot\left(8-\frac{16}{x}\right)}{x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}\ \text{simplificando}\ \frac{x^3}{x}=x^2\quad\Longrightarrow\quad=x^2\cdot\frac{\left(8-\frac{16}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

y luego como $\exists$ los límites

$$\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty\ \text{ y }\lim_{x\to+\infty}\left(8-\frac{16}{x}\right)=8\ \text{ y }\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$$

Entonces

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{8x^3-16x^2}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\cdot\left(8-\frac{16}{x}\right)}{x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{\left(8-\frac{16}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(8-\frac{16}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(8-\frac{16}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=(+\infty)\cdot\frac{8}{1}=+\infty$$

Ej 2 o)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x+2}-1\right)\left(6+\frac{1}{x}\right)=-6$$

De nuevo, usamos Álgebra de límites del producto y de las sumas

y luego como $\exists$ los límites

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x+2}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x+2}-\lim_{x\to+\infty}1=0-1=-1 \quad \text{y}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(6+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}6-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=6-0=6$$

Entonces

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x+2}-1\right)\left(6+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x+2}-1\right)\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(6+\frac{1}{x}\right)=(-1)\cdot 6=-6$$

Ej 2 p)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{9x^2-x+1}{-3x^2+7x}\right)\left(\frac{5}{x-4}\right)=0$$

De nuevo, usamos Álgebra de límites del producto y del cociente
Para el 1 er factor, sacar factor común el término con x al exponente
más alto (x^2) en el numerador y x^2 en el denominador

$$\frac{9x^2-x+1}{-3x^2+7x}=\frac{x^2\left(9-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(-3+\frac{7}{x}\right)} \text{ simplificando } \frac{x^2}{x^2}=1 \quad\Longrightarrow\quad =\frac{\left(9-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-3+\frac{7}{x}\right)}$$

y luego como $\exists$ los límites

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{9x^2-x+1}{-3x^2+7x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(9-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(-3+\frac{7}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(9-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-3+\frac{7}{x}\right)}=\frac{9}{(-3)}=-3 \quad \text{y}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{x-4}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}5}{\lim\limits_{x\to+\infty}(x-4)}=\frac{5}{(+\infty)}=0$$

Entonces

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{9x^2-x+1}{-3x^2+7x}\right)\cdot\left(\frac{5}{x-4}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(9-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(-3+\frac{7}{x}\right)}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{x-4}\right)$$

$$\frac{\lim_{x\to+\infty}\left(9-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(-3+\frac{7}{x}\right)}\cdot\frac{\lim_{x\to+\infty}5}{\lim_{x\to+\infty}(x-4)}=\frac{9}{(-3)}\cdot\frac{5}{(+\infty)}=(-3)\cdot 0=0$$

Ejercicio 3.- Calcular.

a. $\lim_{x\to-\infty}4x^3$

b. $\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x}$

c. $\lim_{x\to-\infty}x\left(9-\frac{2}{x^2}\right)$

d. $\lim_{x\to-\infty}\left(-x^4-7x^3+20\right)$

e. $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-1}{-6x^4+7}$

f. $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-1}{x+5}$

g. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+2}$

h. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2+x+1}$

i. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3}$

j. $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{x-3}+1\right)$

k. $\lim_{x\to-\infty}\frac{15x^3+6x^5}{2x^5-15x^3}$

l. $\lim_{x\to-\infty}\frac{8x^7+x^5+2}{3x^4-1}$

Ej 3 a) Calcular :

$$\lim_{x\to-\infty}4x^3=+\infty$$

Por la propiedad de Álgebra de límites, propiedad 9.1 -

("9.1- Si $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\pm\infty$, k un número real, $k\neq0$ $\Longrightarrow$ $\lim_{x\to+\infty}[k\cdot f(x)]=k\cdot\lim_{x\to+\infty}f(x)=\pm\infty$")

$$\lim_{x\to-\infty}4x^3=4\cdot\lim_{x\to-\infty}x^3=4\cdot(-\infty)=-\infty$$

Ej 3 b)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x}=0$$

Como $\lim_{x\to-\infty}4=4$ y $\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$ existen, Por la propiedad de Álgebra de límites, propiedad 9.2 - aplicada a $x\to-\infty$

$\left(\text{"9.2- Si } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty \text{ y } k \text{ es un número real,}\right.$

$\left. k\neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} [k/f(x)]=k/\lim_{x\to+\infty} f(x)=0\text{"}\right)$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x} = \frac{\lim_{x\to-\infty} 4}{\lim_{x\to-\infty} x} = \frac{4}{(-\infty)} = 0$$

Ej 3 c)

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(9-\frac{2}{x^2}\right) = -\infty$$

Como $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ y $\lim_{x\to-\infty}\left(9-\frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} 9 - \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2} = 9-0=9$ existen,

Por la propiedad de Álgebra de límites,

propiedad 8.1 - aplicada a $x\to-\infty$

$\left(\text{"8.1- Si } \lim_{x\to+\infty} f(x)=a \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=\pm\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x).g(x)]=\pm\infty \quad (\text{si } a>0)\text{"}\right)$

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(9-\frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} x \cdot \lim_{x\to-\infty}\left(9-\frac{2}{x^2}\right) = (-\infty)\cdot 9 = -\infty$$

Ej 3 d)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-x^4-7x^3+20\right) = -\infty$$

Conviene operar sacando factor común el término de x elevado a la máxima potencia :

$$-x^4-7x^3+20 = x^4\left(-1-\frac{7}{x}+\frac{20}{x^4}\right)$$

Como $\lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$

y $\lim_{x\to-\infty}\left(-1-\frac{7}{x}+\frac{20}{x^4}\right) = \lim_{x\to-\infty}(-1) - \lim_{x\to-\infty}\frac{7}{x} + \lim_{x\to-\infty}\frac{20}{x^4} = -1-0+0=-1$ existen,

Por la propiedad de Álgebra de límites,

propiedad 8.2 - aplicada a $x\to-\infty$

$\left(\text{"8.2- Si } \lim_{x\to+\infty} f(x)=a \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=\pm\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x).g(x)]=\pm\infty \quad (\text{si } a<0)\text{"}\right)$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-x^4-7x^3+20\right) = \lim_{x\to-\infty} x^4\left(-1-\frac{7}{x}+\frac{20}{x^4}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^4 \cdot \lim_{x\to-\infty}\left(-1-\frac{7}{x}+\frac{20}{x^4}\right) = (+\infty)\cdot(-1) = -\infty$$

Ej 3 e)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-1}{6x^4+7} = 0$$

Conviene operar sacando factor común el término de x elevado a la máxima potencia tanto en el numerador como en el denominador :

$$\frac{3x-1}{6x^4+7} = \frac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{x^4\left(6+\frac{7}{x^4}\right)} = \frac{1}{x^3}\cdot\frac{\left(3-\frac{1}{x}\right)}{\left(6+\frac{7}{x^4}\right)}$$

Como $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

y $\lim_{x\to-\infty} \left(3-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} 3 - \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 3-0 = 3$ y

$\lim_{x\to-\infty} \left(6+\frac{7}{x^4}\right) = \lim_{x\to-\infty} 6 + \lim_{x\to-\infty} \frac{7}{x^4} = 6+0 = 6$ existen,

Por la propiedades de Álgebra de límites, aplicadas a $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-1}{6x^4+7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{x^4\left(6+\frac{7}{x^4}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x^3}\cdot\frac{\left(3-\frac{1}{x}\right)}{\left(6+\frac{7}{x^4}\right)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3}\cdot\frac{\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)}{\lim_{x\to-\infty}\left(6+\frac{7}{x^4}\right)} = 0\cdot\frac{3}{6} = 0$$

Ej 3 f)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-1}{x+5} = 3$$

Conviene operar sacando factor común el término de x elevado a la máxima potencia tanto en el numerador como en el denominador :

$$\frac{3x-1}{x+5} = \frac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{5}{x}\right)} = 1\cdot\frac{\left(3-\frac{1}{x}\right)}{\left(1+\frac{5}{x}\right)} = \frac{\left(3-\frac{1}{x}\right)}{\left(1+\frac{5}{x}\right)}$$

Como $\lim_{x\to-\infty} \left(3-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} 3 - \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 3-0 = 3$ y

$\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{5}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} 1 + \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x} = 1+0 = 1$ existen,

Por la propiedades de Álgebra de límites, aplicadas a $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-1}{x+5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{5}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{\left(3-\frac{1}{x}\right)}{\left(1+\frac{5}{x}\right)}\right] =$$

$$= \frac{\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)}{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)} = \frac{3}{1} = 3$$

Ej 3 g)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{-x^2+2} = -1$$

Conviene operar sacando factor común el término de x elevado a la máxima potencia tanto en el numerador como en el denominador :

$$\frac{x^2}{-x^2+2} = \frac{x^2}{x^2\left(-1+\frac{2}{x^2}\right)} = \frac{1}{\left(-1+\frac{2}{x^2}\right)}$$

Como $\lim_{x\to-\infty} 1 = 1$ **y**

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty}(-1) + \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2} = (-1)+0 = -1$$ **existen,**

Por la propiedades de Álgebra de límites, aplicadas a $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{-x^2+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2\left(-1+\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\left(-1+\frac{2}{x^2}\right)} =$$

$$= \frac{\lim_{x\to-\infty} 1}{\lim_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{2}{x^2}\right)} = \frac{1}{(-1)} = -1$$

Ej 3 h)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2+x+1} = -\infty$$

Conviene operar sacando factor común el término de x elevado a la máxima potencia tanto en el numerador como en el denominador :

$$\frac{x^3}{x^2+x+1} = \frac{x^3}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{x}{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

Como $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ **y**

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} 1 + \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} + \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2} = 1+0+0 = 1$$ **existen,**

Por la propiedades de Álgebra de límites, aplicadas a $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2+x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \frac{\lim_{x\to-\infty} x}{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{(-\infty)}{1} = -\infty$$

Ej 3 i)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+1}{x^3} = 0$$

Conviene operar sacando factor común el término de x elevado a la máxima potencia tanto en el numerador como en el denominador :

$$\frac{x^2+x+1}{x^3} = \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3} = \frac{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x}$$

Como $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ **y**

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} 1 + \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} + \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2} = 1+0+0 = 1 \quad \text{existen,}$$

Por la propiedades de Álgebra de límites, aplicadas a $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+1}{x-3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x} =$$

$$= \frac{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x\to-\infty} x} = \frac{1}{(-\infty)} = 0$$

Ej 3 j)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{x-3}+1\right) = 1$$

Por la propiedades de Álgebra de límites, aplicadas a $x \to -\infty$

$\left(\text{"1.- Si } \lim_{x\to+\infty} f(x)=a \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=b \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x)\pm g(x)]=a \pm b\text{"}\right)$

Como $\lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x-3} = 0$ **y** $\lim_{x\to-\infty}(1) = 1$ **existen,**

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{x-3}+1\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x-3} + \lim_{x\to-\infty} 1 = 0+1 = 1$$

Ej 3 k)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{15\,x^3 + 6\,x^5}{2\,x^5 - 15\,x^3} = 3$$

Conviene operar sacando factor común el término de x elevado a la máxima potencia tanto en el numerador como en el denominador :

$$\frac{15\,x^3 + 6\,x^5}{2\,x^5 - 15\,x^3} = \frac{6\,x^5 + 15\,x^3}{2\,x^5 - 15\,x^3} = \frac{x^5\left(6 + \frac{15}{x^2}\right)}{x^5\left(2 - \frac{15}{x^2}\right)} = 1 \cdot \frac{\left(6 + \frac{15}{x^2}\right)}{\left(2 - \frac{15}{x^2}\right)} = \frac{\left(6 + \frac{15}{x^2}\right)}{\left(2 - \frac{15}{x^2}\right)}$$

Como $\lim_{x\to-\infty} \left(6 + \frac{15}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} 6 + \lim_{x\to-\infty} \frac{15}{x^2} = 6 + 0 = 6$ y

$\lim_{x\to-\infty} \left(2 - \frac{15}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} 2 - \lim_{x\to-\infty} \frac{15}{x^2} = 2 - 0 = 2$ existen,

Por la propiedades de Álgebra de límites, aplicadas a $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{15\,x^3 + 6\,x^5}{2\,x^5 - 15\,x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6\,x^5 + 15\,x^3}{2\,x^5 - 15\,x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^5\left(6 + \frac{15}{x^2}\right)}{x^5\left(2 - \frac{15}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(6 + \frac{15}{x^2}\right)}{\left(2 - \frac{15}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(6 + \frac{15}{x^2}\right)}{\left(2 - \frac{15}{x^2}\right)} = \frac{\lim_{x\to-\infty} \left(6 + \frac{15}{x^2}\right)}{\lim_{x\to-\infty} \left(2 - \frac{15}{x^2}\right)} = \frac{6}{2} = 3$$

Ej 3 l)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{8\,x^7 + x^5 + 2}{3\,x^4 - 1} = -\infty$$

Conviene operar sacando factor común el término de x elevado a la máxima potencia tanto en el numerador como en el denominador :

$$\frac{8\,x^7 + x^5 + 2}{3\,x^4 - 1} = \frac{x^7\left(8 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^7}\right)}{x^4\left(3 - \frac{1}{x^4}\right)} = x^3 \cdot \frac{\left(8 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^7}\right)}{\left(3 - \frac{1}{x^4}\right)}$$

Como $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ y

$\lim_{x\to-\infty} \left(8 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^7}\right) = \lim_{x\to-\infty} 8 + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x^7} = 8 + 0 + 0 = 8$ y

$\lim_{x\to-\infty} \left(3 - \frac{1}{x^4}\right) = \lim_{x\to-\infty} 3 - \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^4} = 3 - 0 = 3$ existen,

Por la propiedades de Álgebra de límites, aplicadas a $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{8x^7+x^5+2}{3x^4-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^7\left(8+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^7}\right)}{x^4\left(3-\frac{1}{x^4}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[x^3\cdot\frac{\left(8+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^7}\right)}{\left(3-\frac{1}{x^4}\right)}\right] = \lim_{x\to-\infty} x^3\cdot\frac{\lim_{x\to-\infty}\left(8+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^7}\right)}{\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{1}{x^4}\right)}$$

$$= (-\infty)\cdot\frac{8}{3} = -\infty$$

++

Ejercicio 4.- Analizar la existencia de asíntotas horizontales y, cuando existan, dar sus ecuaciones.

a. $f(x)=\dfrac{2x}{x+9}-4$

b. $f(x)=\dfrac{3x+5}{-x+2}$

c. $f(x)=\dfrac{8x}{4x^2+6x+1}$

d. $f(x)=\dfrac{2x^2-5x}{x+6}$

e. $f(x)=\dfrac{6}{x+1}+1$

f. $f(x)=\dfrac{x^6+5x^5+3x^3}{2x^3+x+1}$

g. $f(x)=\dfrac{30x^2-25x+6}{5x^2+6x-3}$

h. $f(x)=\dfrac{3x^2+2x-1}{6x^4-x^3+1}$

Ej 4 Recordemos la definición de

Asíntota horizontal :

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, b un número real, se dice que la recta horizontal $y = b$ es Asíntota horizontal de f (x) para $x \to +\infty$

Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$, c un número real, se dice que la recta horizontal $y = c$ es Asíntota horizontal de f (x) para $x \to -\infty$

Es claro entonces que para buscar AH asíntotas horizontales de f (x) habrá que calcular los límites de f (x) cuando $x \to \pm\infty$

Ej 4 a)

$$f(x) = \frac{2x}{x+9} - 4$$

Calculemos $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+9} - 4$ y $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x+9} - 4$

Para buscar AH de f (x) cuando $x \to +\infty$ calculemos $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+9} - 4$

como existen $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x\left(1+\frac{9}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{9}{x}\right)} = \frac{2}{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{9}{x}\right)} = \frac{2}{1} = 2$

y $\lim_{x\to+\infty} 4 = 4$

Entonces aplicando propiedades del Álgebra de límites

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+9} - 4 = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+9} - \lim_{x\to+\infty} 4$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x\left(1+\frac{9}{x}\right)} - \lim_{x\to+\infty} 4 = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{9}{x}\right)} - \lim_{x\to+\infty} 4 =$$

$$= \frac{2}{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{9}{x}\right)} - \lim_{x\to+\infty} 4 = 2 - 4 = -2$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+9} - 4 = -2$ entonces

la recta horizontal $y = -2$ es AH de f (x) cuando $x \to +\infty$

Para buscar AH de f (x) cuando $x \to -\infty$ calculemos $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x+9} - 4$

como existen $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x\left(1+\frac{9}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{9}{x}\right)} = \frac{2}{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{9}{x}\right)} = \frac{2}{1} = 2$

y $\lim_{x\to-\infty} 4 = 4$

Entonces aplicando propiedades del Álgebra de límites

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x+9} - 4 = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x+9} - \lim_{x\to-\infty} 4$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x\left(1+\frac{9}{x}\right)} - \lim_{x\to-\infty} 4 = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{9}{x}\right)} - \lim_{x\to-\infty} 4 =$$

$$= \frac{2}{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{9}{x}\right)} - \lim_{x\to-\infty} 4 = 2 - 4 = -2$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x+9} - 4 = -2$ entonces

la recta horizontal $y = -2$ es AH de f (x) cuando $x \to -\infty$

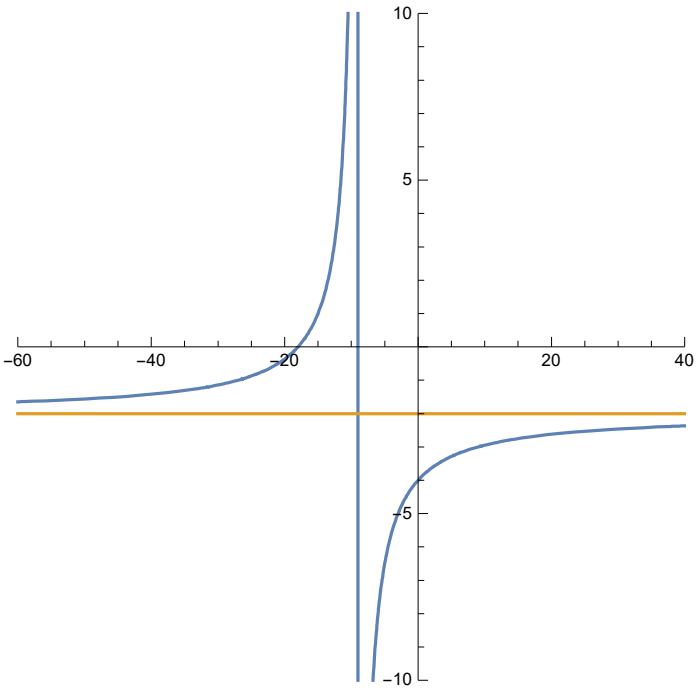
ecuaciones de las AH de f (x) :

$$\begin{cases} \text{si } x \to +\infty & y = -2 \\ \text{si } x \to -\infty & y = -2 \end{cases}$$

In[44]:= $\text{Plot}\left[\left\{\frac{2x}{x+9} - 4, -2\right\}, \{x, -60, 40\}, \text{PlotRange} \to \{\{-60, 40\}, \{-10, 10\}\}, \text{AspectRatio} \to 1\right]$

representación gráfica rango de representación cociente de aspecto

Out[44]=



Ej 4 b)

$$f(x) = \frac{3x+5}{-x+2}$$

Calculemos $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+5}{-x+2}$ **y** $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+5}{-x+2}$

Para buscar AH de f (x) cuando $x \to +\infty$ **calculemos** $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+5}{-x+2}$

Sacamos factor x en numerador y en denominador :

$$\frac{3x+5}{-x+2} = \frac{x\left(3+\frac{5}{x}\right)}{x\left(-1+\frac{2}{x}\right)} = \frac{\left(3+\frac{5}{x}\right)}{\left(-1+\frac{2}{x}\right)}$$

y como existen $\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{5}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} 3 + \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x} = 3+0 = 3$

y $\lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}(-1) + \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = (-1)+0 = -1$

Entonces aplicando propiedades del Álgebra de límites

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+5}{-x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3+\frac{5}{x}\right)}{x\left(-1+\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(3+\frac{5}{x}\right)}{\left(-1+\frac{2}{x}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{5}{x}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{2}{x}\right)} = \frac{3}{(-1)} = -3$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+5}{-x+2} = -3$ **entonces**

la recta horizontal $y = -3$ **es AH de** $f(x)$ **cuando** $x \to +\infty$

Para buscar AH de $f(x)$ **cuando** $x \to -\infty$ **calculemos** $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+5}{-x+2}$

Como el cálculo de límite visto cuando $x \to +\infty$ **no depende de** x**, sino que da** -3

el límite cuando $x \to -\infty$ **dará idéntico resultado**

Por lo tanto, $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+5}{-x+2} = -3$ **entonces**

la recta horizontal $y = -3$ **es AH de** $f(x)$ **cuando** $x \to -\infty$

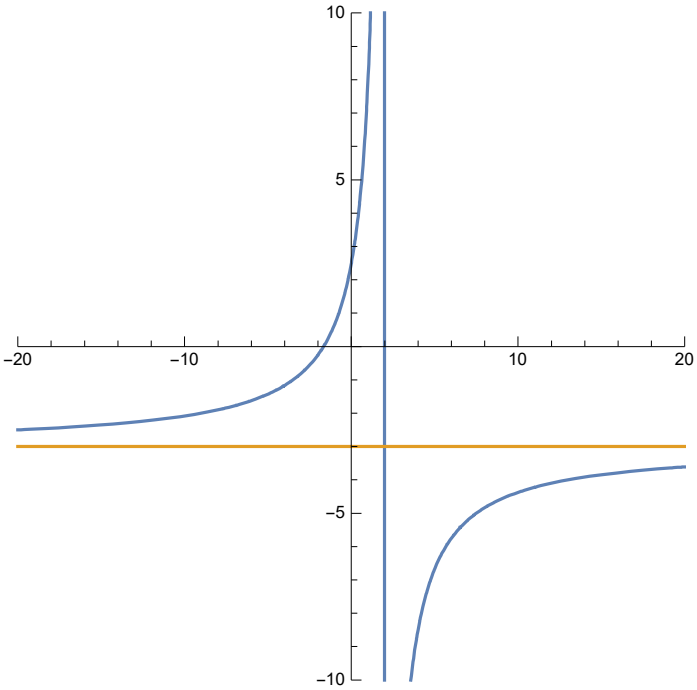
ecuaciones de las AH de $f(x)$ **:**

$$\begin{cases} \text{si } x \to +\infty & y = -3 \\ \text{si } x \to -\infty & y = -3 \end{cases}$$

In[46]:= `Plot[{(3 x + 5)/(-x + 2), -3}, {x, -20, 20}, PlotRange → {{-20, 20}, {-10, 10}}, AspectRatio → 1]`

representación gráfica | rango de representación | cociente de aspecto

Out[46]=



Ej 4 c)

$$f(x) = \frac{8x}{4x^2 + 6x + 1}$$

Calculemos $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{8x}{4x^2 + 6x + 1}$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{8x}{4x^2 + 6x + 1}$

Para buscar AH de f (x) cuando $x \to +\infty$ calculemos $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{8x}{4x^2 + 6x + 1}$

Sacamos factor común x^2 en denominador :

$$\frac{8x}{4x^2 + 6x + 1} = \frac{x \cdot 8}{x^2 \left(4 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{8}{x \left(4 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{8}{\left(4 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}$$

y como existen $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ y

y $\lim\limits_{x \to +\infty} 8 = 8$

y $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(4 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4 + \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{6}{x} + \lim \frac{1}{x^2} = 4 + 0 + 0 = 4$

Entonces aplicando propiedades del Álgebra de límites

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{8\,x}{4\,x^2+6\,x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot 8}{x^2\left(4+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\cdot\frac{8}{\left(4+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 8}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = 0\cdot\frac{8}{4} = 0$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{8\,x}{4\,x^2+6\,x+1} = 0$ entonces

la recta horizontal $y = 0$ (el eje x) es AH de f (x) cuando $x \to +\infty$

Para buscar AH de f (x) cuando $x \to -\infty$ calculemos $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{8\,x}{4\,x^2+6\,x+1}$

Como el cálculo de límite visto cuando $x \to +\infty$ no depende de x, sino que da 0

el límite cuando $x \to -\infty$ dará idéntico resultado

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{8\,x}{4\,x^2+6\,x+1} = 0$ entonces

la recta horizontal $y = 0$ es AH de f (x) cuando $x \to -\infty$

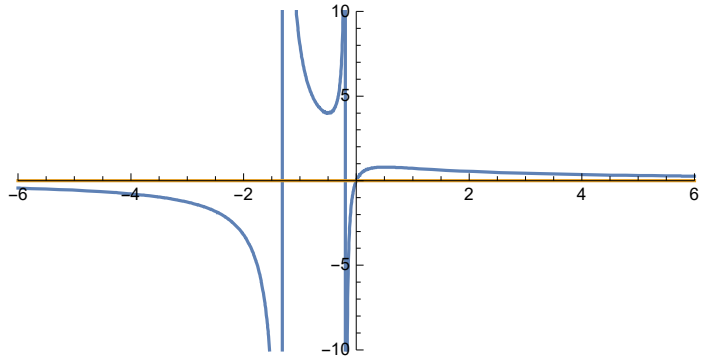
ecuaciones de las AH de f (x) :

$$\begin{cases} \text{si } x \to +\infty & y = 0 \\ \text{si } x \to -\infty & y = 0 \end{cases}$$

In[51]:= $\text{Plot}\left[\left\{\frac{8\,x}{4\,x^2+6\,x+1}, 0\right\}, \{x, -6, 6\}, \text{PlotRange} \to \{\{-6, 6\}, \{-10, 10\}\}, \text{AspectRatio} \to 0.5\right]$

representación gráfica | rango de representación | cociente de aspecto

Out[51]=



Veremos más adelante que esta f (x) tiene además AV Asíntotas verticales y como calcularlas

---

Ej 4 d)

$$f(x) = \frac{2\,x^2-5\,x}{x+6}$$

Calculemos $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x}{x+6}$ y $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-5x}{x+6}$

Para buscar AH de f (x) cuando $x \to +\infty$ calculemos $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x}{x+6}$

Sacamos factor común x^2 en numerador y x en denominador :

$$\frac{2x^2-5x}{x+6} = \frac{x^2\left(2-\frac{5}{x}\right)}{x\left(1+\frac{6}{x}\right)} = x \cdot \frac{\left(2-\frac{5}{x}\right)}{\left(1+\frac{6}{x}\right)}$$

y como existen $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ y

$$\text{y } \lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{5}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} 2 - \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x} = 2-0 = 2$$

$$\text{y } \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x} = 1+0 = 1$$

Entonces aplicando propiedades del Álgebra de límites

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5x}{x+6} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{5}{x}\right)}{x\left(1+\frac{6}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \frac{\left(2-\frac{5}{x}\right)}{\left(1+\frac{6}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \cdot \frac{\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{5}{x}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)} = (+\infty)\cdot\frac{2}{1} = +\infty$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5x}{x+6} = +\infty$ entonces

f (x) NO TIENE AH cuando $x \to +\infty$

Para buscar AH de f (x) cuando $x \to -\infty$ calculemos $\lim_{x\to-\infty}\frac{8x}{4x^2+6x+1}$

El cálculo es similar al visto cuando $x \to +\infty$ que ahora sí depende de x

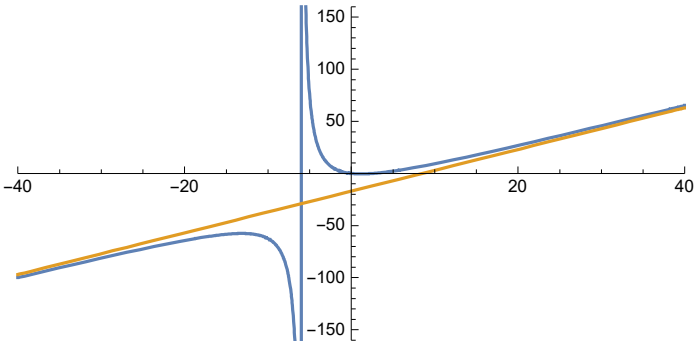
Por lo tanto, $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-5x}{x+6} = \ldots$

$$= \lim_{x\to-\infty} x \cdot \frac{\lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{5}{x}\right)}{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)} = (-\infty)\cdot\frac{2}{1} = -\infty \text{ entonces}$$

f (x) NO TIENE AH cuando $x \to -\infty$

In[60]:=
```
Plot[{(2 x^2 - 5 x)/(x + 6), 2 x - 17}, {x, -40, 40},
 PlotRange → {{-40, 40}, {-160, 160}}, AspectRatio → 0.5]
```
representación gráfica; rango de representación; cociente de aspecto

Out[60]=



Veremos más adelante que esta f (x) tiene
AV Asíntotas verticales y AO Asíntotas oblicuas
y como calcularlas

In[57]:=
```
Limit[((2 x^2 - 5 x)/(x + 6))/x, x → +∞]
```
límite

Out[57]= 2

In[58]:=
```
Limit[(2 x^2 - 5 x)/(x + 6) - 2 x, x → +∞]
```
límite

Out[58]= -17

Ej 4 e)

$$f(x) = \frac{6}{x+1} + 1$$

Calculemos $\lim_{x\to+\infty} \frac{6}{x+1} + 1$ **y** $\lim_{x\to-\infty} \frac{6}{x+1} + 1$

Para buscar AH de f (x) cuando $x \to +\infty$ **calculemos** $\lim_{x\to+\infty} \frac{6}{x+1} + 1$

como existen $\lim_{x\to+\infty} \frac{6}{x+1} = \frac{\lim_{x\to+\infty} 6}{\lim_{x\to+\infty} x+1} = \frac{6}{(+\infty)} = 0$

y $\lim_{x\to+\infty} 1 = 1$

Entonces aplicando propiedades del Álgebra de límites

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6}{x+1} + 1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{x+1} + \lim_{x\to+\infty} 1$$

$$= \frac{\lim_{x\to+\infty} 6}{\lim_{x\to+\infty} x+1} + \lim_{x\to+\infty} 1 = \frac{6}{(+\infty)} + 1 = 0 + 1 = 1$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to+\infty} \frac{6}{x+1} + 1 = 1$ **entonces**

la recta horizontal $y = 1$ **es AH de** $f(x)$ **cuando** $x \to +\infty$

Para buscar AH de $f(x)$ **cuando** $x \to -\infty$ **calculemos** $\lim_{x\to-\infty} \frac{6}{x+1} + 1$

Como el cálculo de límite visto cuando $x \to +\infty$ **no depende de** x**, sino que da 1**

el límite cuando $x \to -\infty$ **dará idéntico resultado**

Por lo tanto, $\lim_{x\to-\infty} \frac{6}{x+1} + 1 = 1$ **entonces**

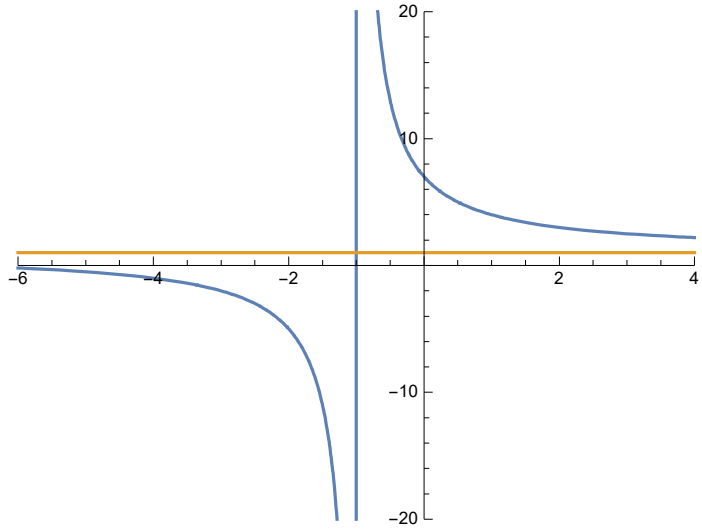
la recta horizontal $y = 1$ **es AH de** $f(x)$ **cuando** $x \to -\infty$

ecuaciones de las AH de $f(x)$ **:**

$$\begin{cases} \text{si } x \to +\infty & y = 1 \\ \text{si } x \to -\infty & y = 1 \end{cases}$$

In[67]:=
```
Plot[{6/(x + 1) + 1, 1}, {x, -6, 4}, PlotRange → {{-6, 4}, {-20, 20}}, AspectRatio → 0.75]
```
representación gráfica | rango de representación | cociente de aspecto

Out[67]=



Ej 4 f)

$$f(x) = \frac{x^6 + 5x^5 + 3x^3}{2x^3 + x + 1}$$

Calculemos $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^6 + 5x^5 + 3x^3}{2x^3 + x + 1}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^6 + 5x^5 + 3x^3}{2x^3 + x + 1}$

Para buscar AH de f (x) cuando $x \to +\infty$ calculemos $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^6 + 5x^5 + 3x^3}{2x^3 + x + 1}$

Sacamos factor común x^6 en numerador y x^3 en denominador :

$$\frac{x^6 + 5x^5 + 3x^3}{2x^3 + x + 1} = \frac{x^6\left(1 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)} = x^3 \cdot \frac{\left(1 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^3}\right)}{\left(2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}$$

y como existen $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ y

$$\text{y } \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^3}\right) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^3} = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$\text{y } \lim_{x\to+\infty}\left(2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x\to+\infty} 2 + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3} = 2 + 0 + 0 = 2$$

Entonces aplicando propiedades del Álgebra de límites

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6 + 5x^5 + 3x^3}{2x^3 + x + 1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^6\left(1 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} x^3 \cdot \frac{\left(1 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^3}\right)}{\left(2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^3 \cdot \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)} = (+\infty) \cdot \frac{1}{2} = +\infty$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^6 + 5x^5 + 3x^3}{2x^3 + x + 1} = +\infty$ entonces

f (x) NO TIENE AH cuando $x \to +\infty$

Para buscar AH de f (x) cuando $x \to -\infty$ calculemos $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^6 + 5x^5 + 3x^3}{2x^3 + x + 1}$

El cálculo es similar al visto cuando $x \to +\infty$ que ahora sí depende de x^3

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^6 + 5x^5 + 3x^3}{2x^3 + x + 1} = \ldots$

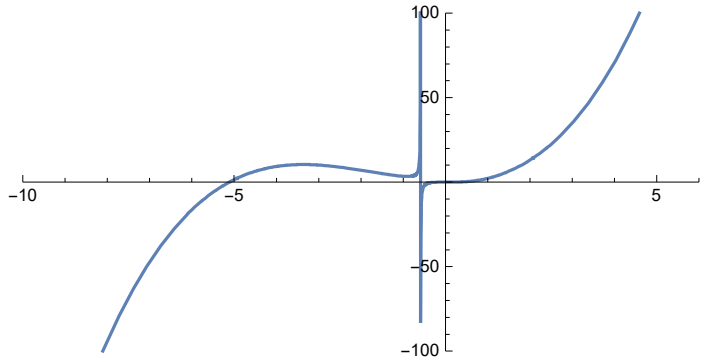
$$= \lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot \frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)} = (-\infty) \cdot \frac{2}{1} = -\infty \text{ entonces}$$

f (x) NO TIENE AH cuando $x \to -\infty$

In[74]:= Plot[$\frac{x^6 + 5x^5 + 3x^3}{2x^3 + x + 1}$, {x, -10, 6},
representación gráfica

PlotRange → {{-10, 6}, {-100, 100}}, AspectRatio → 0.5]
rango de representación cociente de aspecto

Out[74]=



Ej 4 g)

$$f(x) = \frac{30x^2 - 25x + 6}{5x^2 + 6x - 3}$$

Calculemos $\lim_{x\to+\infty} \frac{30x^2 - 25x + 6}{5x^2 + 6x - 3}$ y $\lim_{x\to-\infty} \frac{30x^2 - 25x + 6}{5x^2 + 6x - 3}$

Para buscar AH de f (x) cuando $x \to +\infty$ calculemos $\lim_{x\to+\infty} \frac{30x^2 - 25x + 6}{5x^2 + 6x - 3}$

Sacamos factor común x^2 en numerador y x^2 en denominador :

$$\frac{30x^2 - 25x + 6}{5x^2 + 6x - 3} = \frac{x^2\left(30 - \frac{25}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(5 + \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2}\right)} = 1 \cdot \frac{\left(30 - \frac{25}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}{\left(5 + \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}$$

y como existen

$$\lim_{x\to+\infty}\left(30 - \frac{25}{x} + \frac{6}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} 30 - \lim_{x\to+\infty}\frac{25}{x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x^2} = 30 - 0 + 0 = 30$$

y $$\lim_{x\to+\infty}\left(5 + \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} 5 + \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2} = 5 + 0 - 0 = 5$$

Entonces aplicando propiedades del Álgebra de límites

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{30x^2 - 25x + 6}{5x^2 + 6x - 3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(30 - \frac{25}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(5 + \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(30 - \frac{25}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}{\left(5 + \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to+\infty}\left(30 - \frac{25}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(5 + \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2}\right)} = \frac{30}{5} = 6 \qquad \text{(que no depende de x)}$$

Por lo tanto, $\lim_{x \to +\infty} \frac{30 x^2 - 25 x + 6}{5 x^2 + 6 x - 3} = 6$ entonces

la recta horizontal $y = 6$ es AH de f (x) cuando $x \to +\infty$

Para buscar AH de f (x) cuando $x \to -\infty$ calculemos $\lim_{x \to -\infty} \frac{30 x^2 - 25 x + 6}{5 x^2 + 6 x - 3}$

Como el cálculo de límite visto cuando $x \to +\infty$ no depende de x, sino que da 6

el límite cuando $x \to -\infty$ dará idéntico resultado

Por lo tanto, $\lim_{x \to -\infty} \frac{30 x^2 - 25 x + 6}{5 x^2 + 6 x - 3} = 6$ entonces

la recta horizontal $y = 6$ es AH de f (x) cuando $x \to -\infty$

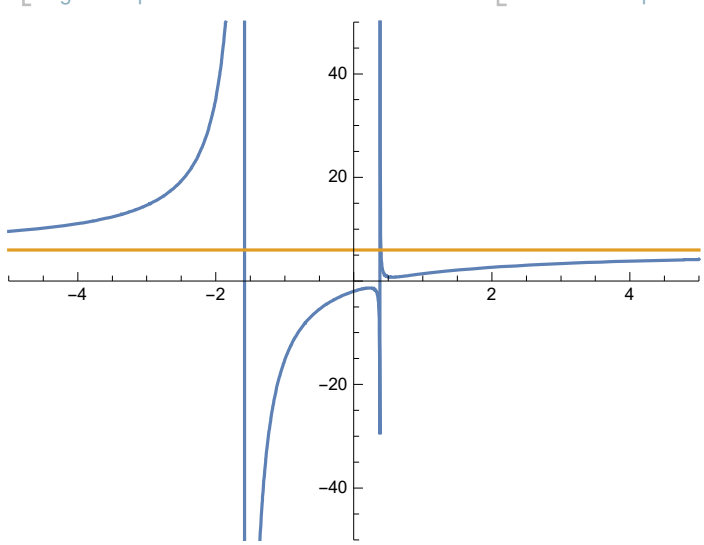
ecuaciones de las AH de f (x) :

$$\begin{cases} \text{si } x \to +\infty & y = 6 \\ \text{si } x \to -\infty & y = 6 \end{cases}$$

In[78]:= $\text{Plot}\left[\left\{\frac{30 x^2 - 25 x + 6}{5 x^2 + 6 x - 3}, 6\right\}, \{x, -5, 5\},\right.$
representación gráfica

$\left.\text{PlotRange} \to \{\{-5, 5\}, \{-50, 50\}\}, \text{AspectRatio} \to 0.75\right]$
rango de representación cociente de aspecto

Out[78]=



Veremos más adelante que esta f (x) tiene además AV Asíntotas verticales y como calcularlas

---

Ej 4 h)

$$f(x) = \frac{3 x^2 + 2 x - 1}{6 x^4 - x^3 + 1}$$

Calculemos $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+2x-1}{6x^4-x^3+1}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2+2x-1}{6x^4-x^3+1}$

Para buscar AH de f (x) cuando $x \to +\infty$ calculemos $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+2x-1}{6x^4-x^3+1}$

Sacamos factor común x^2 en numerador y x^4 en denominador :

$$\frac{3x^2+2x-1}{6x^4-x^3+1} = \frac{x^2\left(3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^4\left(6-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\right)} = \frac{1}{x^2}\cdot\frac{\left(3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(6-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\right)}$$

y como existen $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} 3 + \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 3+0-0 = 3$$

y $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^4}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} 6 - \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} + \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^4} = 6-0+0 = 6$

Entonces aplicando propiedades del Álgebra de límites

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x-1}{6x^4-x^3+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^4\left(6-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\left(3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(6-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\,\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\right)} = 0\cdot\frac{3}{6} = 0 \qquad \text{(que no depende de x)}$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+2x-1}{6x^4-x^3+1} = 0$ entonces

la recta horizontal $y = 0$ es AH de f (x) cuando $x \to +\infty$

Para buscar AH de f (x) cuando $x \to -\infty$ calculemos $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2+2x-1}{6x^4-x^3+1}$

Como el cálculo de límite visto cuando $x \to +\infty$ no depende de x, sino que da 0

el límite cuando $x \to -\infty$ dará idéntico resultado

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2+2x-1}{6x^4-x^3+1} = 0$ entonces

la recta horizontal $y = 0$ es AH de f (x) cuando $x \to -\infty$

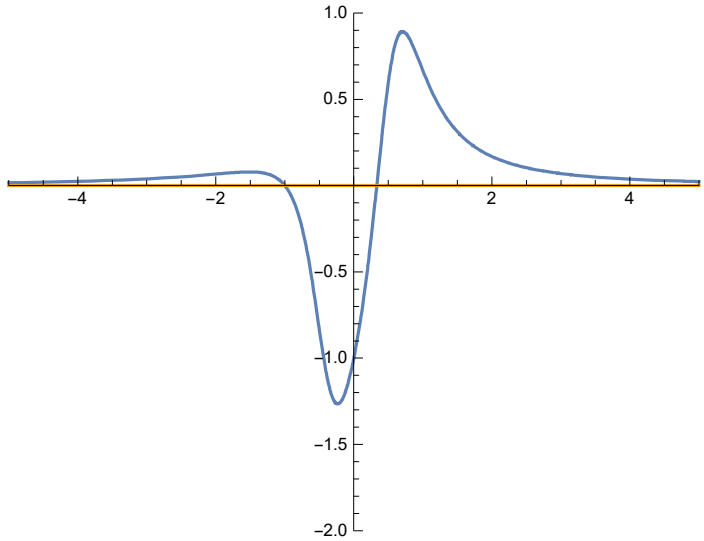
ecuaciones de las AH de f (x) :

$$\begin{cases} \text{si } x \to +\infty & y = 0 \\ \text{si } x \to -\infty & y = 0 \end{cases}$$

In[84]:= $\text{Plot}\left[\left\{\frac{3x^2+2x-1}{6x^4-x^3+1}, 0\right\}, \{x, -5, 5\}, \text{PlotRange} \to \{\{-5, 5\}, \{-2, 1\}\}, \text{AspectRatio} \to 0.75\right]$

representación gráfica rango de representación cociente de aspecto

Out[84]=



++

Ejercicio 5.- Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que se verifique:

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x-5}{ax+1} = 6$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{ax^2-2x+5}{6x^2+1} = -\frac{2}{3}$

c. La recta de ecuación $y = -2$ es asíntota horizontal para $f(x) = \frac{ax}{3x-1} + 1$

Ej 5 a) calcular el valor de "a" siendo :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-5}{ax+1} = 6$$

Sacamos factor común x en numerador y x en denominador :

$$\frac{3x-5}{ax+1} = \frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{x\left(a+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\left(3-\frac{5}{x}\right)}{\left(a+\frac{1}{x}\right)}$$

y como existen

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{5}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} 3 - \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x} = 3-0 = 3$$

$$\text{y} \lim_{x\to+\infty}\left(a+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} a + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = a+0 = a$$

Entonces aplicando propiedades del Álgebra de límites

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-5}{ax+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{x\left(a+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(3-\frac{5}{x}\right)}{\left(a+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{5}{x}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(a+\frac{1}{x}\right)} = \frac{3}{a}$$

El problema pedía determinar a siendo que el límite es 6

Igualando :

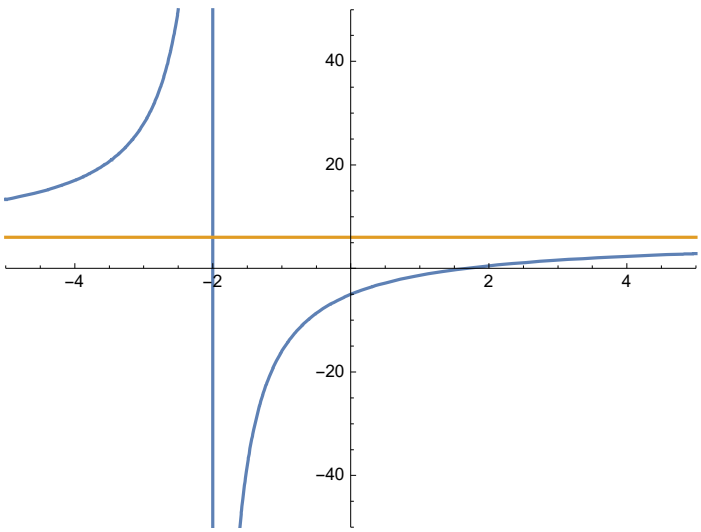
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-5}{ax+1} = \frac{3}{a} = 6 \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{a} = 6 \quad \Longrightarrow \quad \frac{3}{6} = a \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} = a$$

$$f(x) = \frac{3x-5}{\frac{1}{2}x+1}$$

In[85]:= `Plot[{(3 x - 5)/(1/2 x + 1), 6}, {x, -5, 5}, PlotRange → {{-5, 5}, {-50, 50}}, AspectRatio → 0.75]`

representación gráfica | rango de representación | cociente de aspecto

Out[85]=



Ej 5 b) calcular el valor de "a" siendo :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^2-2x+5}{6x^2+1} = -\frac{2}{3}$$

Sacamos factor común x^2 en numerador y x^2 en denominador :

$$\frac{ax^2-2x+5}{6x^2+1} = \frac{x^2\left(a-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(6+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\left(a-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{\left(6+\frac{1}{x^2}\right)}$$

y como existen

$$\lim_{x\to+\infty}\left(a-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty} a-\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2}=a-0+0=a$$

$$\text{y}\quad \lim_{x\to+\infty}\left(6+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty} 6+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=6+0=6$$

Entonces aplicando propiedades del Álgebra de límites

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2-2x+5}{6x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(a-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(6+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(a-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{\left(6+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to+\infty}\left(a-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(6+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{a}{6}$$

El problema pedía determinar a siendo que el límite es $-\frac{2}{3}$

Igualando :

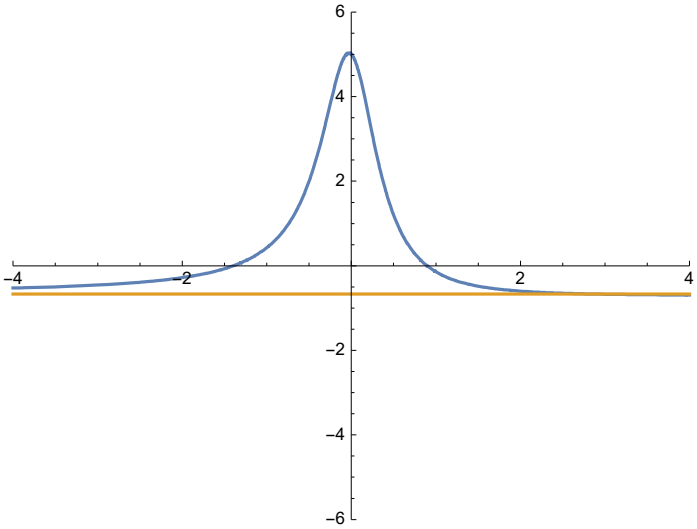
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2-2x+5}{6x^2+1}=\frac{a}{6}=-\frac{2}{3}\quad\Longrightarrow\quad\frac{a}{6}=-\frac{2}{3}\quad\Longrightarrow\quad a=-4$$

$$f(x)=\frac{-4x^2-2x+5}{6x^2+1}$$

In[89]:=
```
Plot[{(-4 x^2 - 2 x + 5)/(6 x^2 + 1), -2/3}, {x, -4, 4},
 PlotRange → {{-4, 4}, {-6, 6}}, AspectRatio → 0.75]
```
representación gráfica

rango de representación cociente de aspecto

Out[89]=



Ej 5 c) calcular el valor de "a" siendo que la recta de ecuación y = -2 es AH Asíntota horizontal de f (x) = $\frac{ax}{3x-1}+1$ **:**

Si y = -2 es AH de f (x) entonces

o bien $\lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{3x-1}+1=-2$ o $\lim_{x\to-\infty} \frac{ax}{3x-1}+1=-2$

Calculemos el $\lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{3x-1}+1$

Sacamos factor común x en el denominador :

$$\frac{ax}{3x-1}+1=\frac{a\cdot x}{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}+1=\frac{a}{\left(3-\frac{1}{x}\right)}+1$$

Luego

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{ax}{3x-1}+1\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{a\cdot x}{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}+1\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{a}{\left(3-\frac{1}{x}\right)}+1\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{\left(3-\frac{1}{x}\right)}+\lim_{x\to+\infty}1=\frac{\lim_{x\to+\infty}a}{\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)}+\lim_{x\to+\infty}1=\frac{a}{3}+1$$

Pero este límite debe ser -2 porque y = -2 es AH de f (x)

Igualando :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{ax}{3x-1}+1\right]=.\ .\ .\ .\ .\ .=\frac{a}{3}+1=-2$$

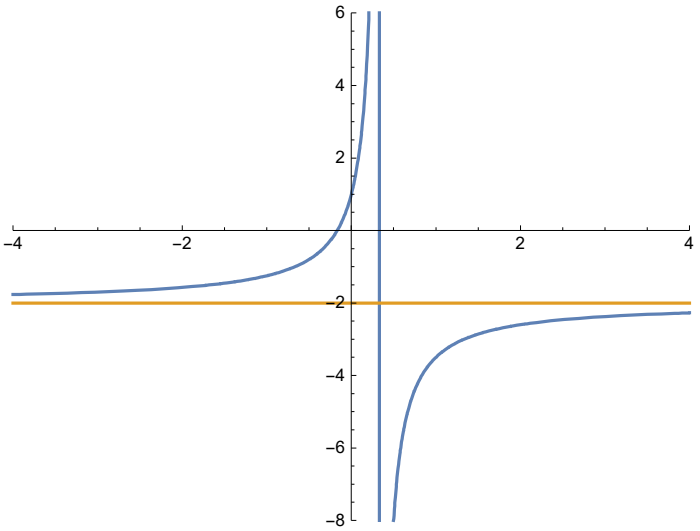
es decir :

$$\frac{a}{3}+1=-2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{a}{3}=-2-1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{a}{3}=-3 \quad\Longrightarrow\quad a=-9$$

$$f(x)=\frac{-9x}{3x-1}+1$$

In[92]:=
```
Plot[{(-9 x)/(3 x - 1) + 1, -2}, {x, -4, 4}, PlotRange → {{-4, 4}, {-8, 6}}, AspectRatio → 0.75]
```
representación gráfica rango de representación cociente de aspecto

Out[92]=



++