Capítulo 0

Preliminares

0.1 Conjuntos – Definiciones básicas

Conjuntos, pertenencia e inclusión

Un *conjunto* es una colección de objetos. A los objetos que forman un conjunto, se los llama *elementos* del conjunto. En un conjunto, no importa el orden de los elementos, ni se tienen en cuenta repeticiones de elementos.
Si el conjunto H es la colección de números formada por -3, 4 y $\sqrt{2}$, H es un conjunto y se lo puede escribir así: $H = \{-3, 4, \sqrt{2}\}$.
Si A es un conjunto y a es un elemento de A, se dice que *a pertenece* a A, y se escribe $a \in A$. Si un objeto b no pertenece a un conjunto A, escribimos $b \notin A$. En nuestro ejemplo anterior $-3 \in H$ y $2,23 \notin H$.
Dos conjuntos que se utilizan frecuentemente en matemática son los siguientes:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, el conjunto de los números naturales;
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, el conjunto de los números enteros.

Dos formas de describir un conjunto son por *extensión* y por *comprensión*. Por ejemplo, el conjunto C que contiene a todos los números naturales del 1 al 4 se puede definir como sigue:

- (por *extensión*) enumerando todos sus elementos, escritos entre llaves: $C = \{1, 2, 3, 4\}$ (notar que así fue como definimos al conjunto H de antes, elemento por elemento) ;
- (por *comprensión*) a través de una propiedad que verifican los elementos del conjunto y ningún otro: $C = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 4\}$ (lo que se lee: el conjunto C es el de los n que pertenecen a $\mathbb{N}$ tales que n es menor o igual que 4). Los dos puntos o la barra / son símbolos indistintos que se leen "tal que" o "tales que".

Otros conjuntos que se utilizan frecuentemente en matemática son los siguientes:

- $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\right\}$, el conjunto de los números racionales (fracciones con numerador y denominador enteros);
- $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales, que corresponen a todos los desarrollos decimales posibles (finitos e infinitos) con signo positivo o negativo.

Se define el *conjunto vacío* como el conjunto que no tiene ningún elemento, y se lo representa con el símbolo $\emptyset$.

Dos conjuntos A y B son *iguales* si tienen exactamente los mismos elementos. En este caso, se escribe $A = B$.
Se dice que un conjunto B *está incluido* en un conjunto A, o que B es un *subconjunto* de A, si cada elemento de B es un elemento de A. En este caso, se nota $B \subset A$. Si B no es un subconjunto de A, escribimos $B \not\subset A$.
Con los ejemplos anteriores, $C \subset \mathbb{N}$ y $H \not\subset \mathbb{N}$ (porque $-3 \notin \mathbb{N}$ y $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$).

Unión, intersección y diferencia de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos.

- La *unión* de A y B, que se nota $A \cup B$, es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen al conjunto A o al conjunto B (o sea, los elementos que pertenecen a alguno de los dos conjuntos, incluyendo los que pertenecen a ambos); es decir,

  $$A \cup B = \{x : \ x \in A \ \text{ o } \ x \in B\}.$$

  Con los ejemplos anteriores, $C \cup H = \{-3, 1, 2, 3, 4, \sqrt{2}\}$.

- La *intersección* de A y B, que se nota $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B; es decir,

  $$A \cap B = \{x : \ x \in A \ \text{ y } \ x \in B\}.$$

  Con los ejemplos anteriores, $C \cap H = \{4\}$.

  Otro ejemplo: $\{1, 2, 3\} \cap \{5, 6\} = \emptyset$ pues los conjuntos no tienen elementos en común.

  Cuando dos conjuntos no tienen elementos en común, es decir, cuando su intersección es el conjunto vacío, se dice que son *disjuntos*.

- La *diferencia* de conjuntos "A menos B", que se nota $A - B$, es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B; es decir,

  $$A - B = \{x : \ x \in A \ \text{ y } \ x \notin B\}.$$

  Con los ejemplos anteriores, $C - H = \{1, 2, 3\}$ y $H - C = \{-3, \sqrt{2}\}$.

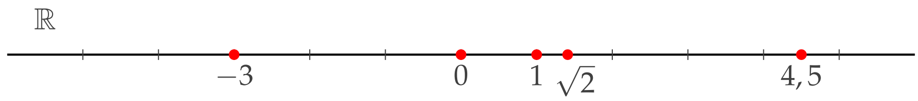
  Notar que, como sucede en el ejemplo, en general, las diferencias $A - B$ y $B - A$ no son iguales.

0.2 La recta real, el plano y el espacio

La recta real $\mathbb{R}$

Los números reales pueden representarse en una recta (en general, por convención, se dibuja una recta horizontal). Fijamos un punto como el 0 y otro punto a su derecha como el 1. Todos los puntos de la recta van a representar números y cada número real se puede representar con un punto.

Los números a la derecha del 0 serán los positivos y los números a la izquierda del 0 serán los negativos. La escala de su ubicación está definida por la distancia entre el 0 y el 1 (el 2 estará al doble de distancia, el -3 al triple, el $4,5$ a 4 unidades y media de distancia del 0, $\sqrt{2}$ a $1,41421356...$ unidades).



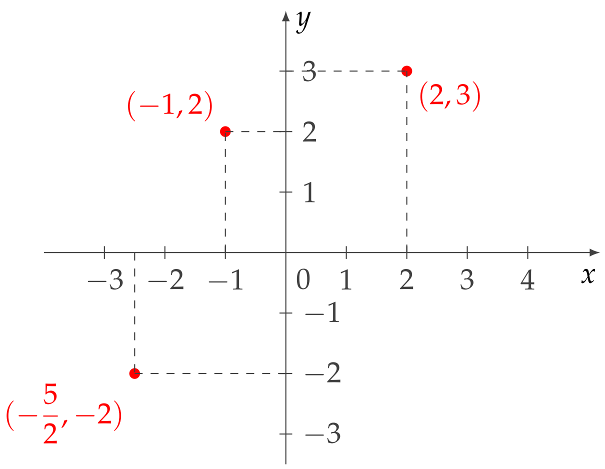
Se define el *módulo* o *valor absoluto* de un número real x (y se escribe $|x|$) como la distancia del número x al 0. Por lo tanto $|3| = 3$, $|-2| = 2$ y $|0| = 0$. Notar que, como el módulo es una distancia, siempre será mayor o igual que 0. Entonces, por ejemplo, se tiene que

$$\{x \in \mathbb{R} : |x| = 5\} = \{-5, 5\},$$

ya que -5 y 5 son todos los números que distan 5 del 0.

El plano $\mathbb{R}^2$

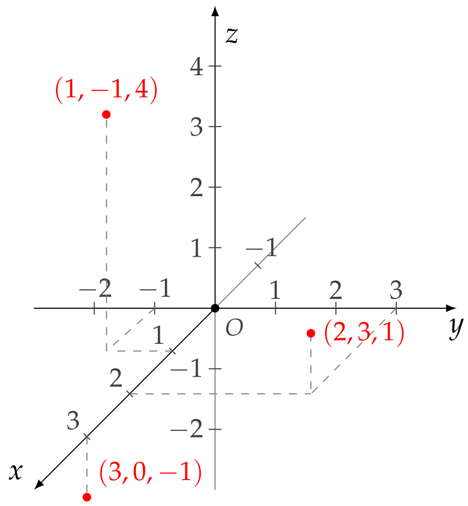
Podemos identificar puntos en el plano usando *pares ordenados* de núme-ros reales, por ejemplo $(2,3)$, $(-1,2)$, $(-\frac{3}{2}, -2)$. Al primer número del par se lo llama *primera coordenada* y, al segundo, *segunda coordenada*.
Para esto, dibujamos en el plano dos rectas perpendiculares que llamaremos *ejes*. A la recta horizontal la llamaremos *eje x* y a la vertical, *eje y*. Los dos ejes se cortan en un punto, que llamaremos *origen de coordenadas*, al que le asignamos el par de números $(0,0)$. A este plano lo llamaremos *plano real* o $\mathbb{R}^2$.
Ahora ya podemos representar pares ordenados, teniendo en cuenta que la primera coordenada corresponde al eje x y la segunda, al eje y. Por ejemplo, el punto $(2,3)$ está ubicado 2 hacia la derecha y 3 hacia arriba a partir del origen de coordenadas. De la misma forma, $(-1,2)$ está 1 hacia la izquierda y 2 hacia arriba del origen, y $(-\frac{5}{2}, -2)$ está $\frac{5}{2}$ hacia la izquierda y 2 hacia abajo del origen:



El espacio $\mathbb{R}^3$

En forma análoga a lo visto en el plano real, podemos representar puntos en el espacio. En este caso, en lugar de pares ordenados usaremos *ternas ordenadas* de números reales, por ejemplo, $(2, 3, 1)$, $(1, -1, 4)$, $(3, 0, -1)$. Como antes, los números que forman la terna se llaman *coordenadas*.

Para esto, a partir del plano real con ejes x e y (que representamos en el espacio en forma horizontal), agregamos una tercera recta perpendicular y que lo corta en el origen, a la que llamamos *eje* z. Al conjunto de todas las ternas (x, y, z) de números reales lo notaremos $\mathbb{R}^3$. La tercera coordenada z representa la ”altura” a la que está el punto respecto del plano del ”piso”. Por ejemplo, para representar el punto $(2, 3, 1)$, podemos ubicar en primer lugar el punto de coordenadas $x = 2, y = 3$ en el plano horizontal y luego subir 1 unidad, como indica su tercera coordenada. Similarmente, el punto $(1, -1, 4)$ está ubicado 4 unidades hacia arriba del punto de coordenadas $x = 1, y = -1$ en el plano horizontal. El punto $(3, 0, -1)$, al tener tercera coordenada negativa, está 1 unidad hacia abajo del punto con $x = 3, y = 0$ del plano horizontal.

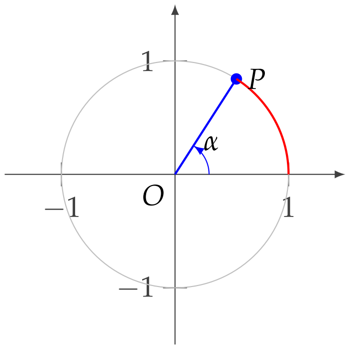


0.3 Ángulos, seno y coseno

Ángulos medidos en radianes

En esta materia los ángulos, a menos que se indique lo contrario, se expresarán en radianes.

La medida de un ángulo α en radianes puede definirse como la longitud del arco sobre la circunferencia de radio 1, desde el semieje x positivo, en sentido antihorario, hasta el punto P tal que el ángulo entre el semieje x positivo y el segmento $\overline{OP}$ es α.

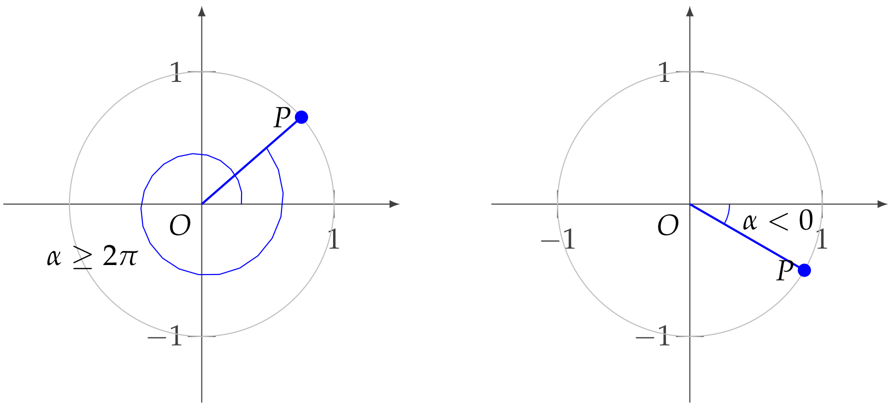


Por ejemplo, un ángulo de $180°$, que corresponde a media circunferencia, mide π radianes, ya que la longitud de la circunferencia de radio 1 es 2π. Similarmente, un ángulo recto (de $90°$), que corresponde a un cuarto de circunferencia, mide $\frac{\pi}{2}$ radianes.
Más generalmente, para convertir a radianes ángulos dados en el sistema sexagesimal se utiliza la relación:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\beta}{180°}$$

donde α es el ángulo medido en radianes y β el ángulo medido en grados.

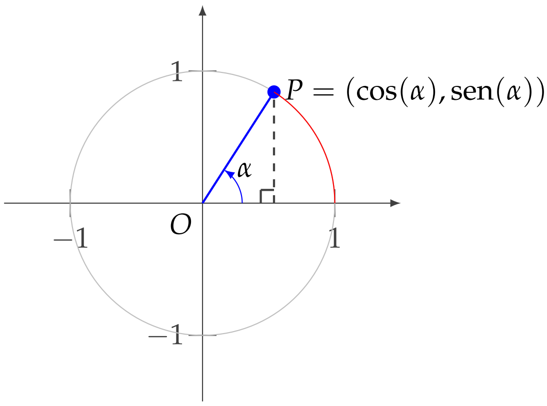
A cada punto de la circunferencia de radio 1 le corresponde un ángulo α tal que $0 \leq \alpha < 2\pi$ y recíprocamente.
Sin embargo, podemos considerar también ángulos mayores o iguales a 2π o menores que 0 y asociarles similarmente un punto en la circunferencia de radio 1. A continuación podemos ver ejemplos gráficos de estas situaciones:



Los ángulos mayores a 2π resultan de dar más de un giro sobre la circunferencia. Por ejemplo, el ángulo $\frac{5\pi}{2}$ corresponde a una vuelta y cuarto (es decir, $2\pi + \frac{\pi}{2}$). Por lo tanto, a los ángulos $\frac{5\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ les corresponde el mismo punto en la circunferencia de radio 1.
Los ángulos negativos se definen recorriendo la circunferencia en sentido horario desde el semieje x positivo. Por ejemplo, el ángulo $-\frac{\pi}{2}$ se obtiene al hacer un cuarto de vuelta en sentido horario. Así, el punto de la circunferencia de radio 1 que le corresponde a este ángulo es el mismo que el que le corresponde al ángulo $\frac{3\pi}{2}$, que se obtiene al hacer tres cuartos de vuelta en sentido antihorario.

Seno y coseno

A partir de los ángulos y los puntos que les asociamos en la circunferencia de radio 1, podemos definir las llamadas funciones *trigonométricas* (por esto a la circunferencia de radio 1 en $\mathbb{R}^2$ también se la llama *circunferencia trigonométrica*).



En la figura, P está en el primer cuadrante, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
En términos de las longitudes de los catetos adyacente (CA), cateto opuesto (CO) e hipotenusa (H) podemos definir el coseno y el seno de α como:

$$\cos(\alpha) = \frac{CA}{H} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{CO}{H}$$

Como la hipotenusa mide 1 (es el radio de la circunferencia), resulta que $CA = \cos(\alpha)$ y $CO = \operatorname{sen}(\alpha)$ y, por lo tanto, las coordenadas de P son $(\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha))$.
Para un ángulo α al que le corresponda un punto P de la circunferencia de radio 1 ubicado en otro cuadrante, los valores para $\cos(\alpha)$ y $\operatorname{sen}(\alpha)$ se definen por las coordenadas del punto P asociado. Por ejemplo, $\cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$ y $\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2}) = -1$, ya que al ángulo $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ le corresponde el punto $P = (-1, 0)$.
De esta forma quedan definidos el coseno y el seno para cualquier ángulo $\alpha \in \mathbb{R}$ como las coordenadas x e y, respectivamente, del punto P de la circunferencia trigonométrica que le corresponde al ángulo α.

Tabla de valores de seno y coseno para algunos ángulos frecuentes

α	$0° \mid 0$	$30° \mid \frac{\pi}{6}$	$45° \mid \frac{\pi}{4}$	$60° \mid \frac{\pi}{3}$	$90° \mid \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen}(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0