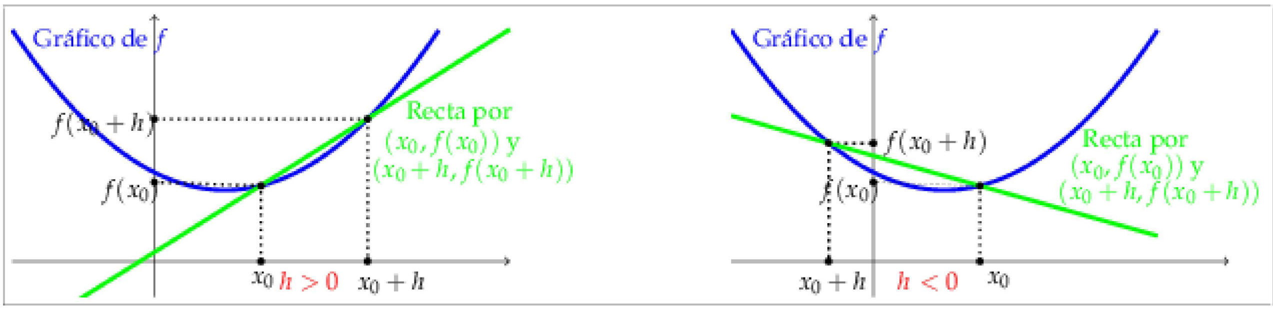
Derivada y recta tangente

Definición de derivada

Sea f una función y $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$. Consideramos un valor x_0+h cercano a x_0 (notar que si $h>0$ este punto está a la derecha de x_0 y que si $h<0$, este punto está a la izquierda de x_0). Trazamos la recta que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ con $(x_0+h, f(x_0+h))$ como indica la figura siguiente



Ahora, hacemos variar el valor x_0+h de forma tal que se acerque a x_0 (es decir, vemos qué pasa cuando h se acerca a 0). Intuitivamente, diremos que la recta tangente al gráfico de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ es la recta límite (si existe) de las rectas que pasan por $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+h, f(x_0+h))$ cuando h tiende a 0 tanto por la derecha como por la izquierda.

En la siguiente animación se ve cómo, a medida que h se acerca a 0, las rectas se van acercando a la recta tangente:

Derivada

La derivada de f en x_0 es la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ si esta recta existe. Como para un h fijo, la pendiente de la recta que pasa por $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+h, f(x_0+h))$ es

$$m = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

entonces la ***derivada de** f **en** x_0*, que se nota $f'(x_0)$, se define como

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

si este límite existe. En este caso diremos que f es derivable en x_0.

Ahora podemos dar una definición precisa de recta tangente: Si f es derivable en x_0, la ***recta tangente al gráfico de** f **en*** $(x_0, f(x_0))$ es la recta de pendiente $f'(x_0)$ que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$.

Ejemplo. Dada la función $f(x)=x^2$, calcular $f'(1)$. Hallar la recta tangente al gráfico de f en el punto $(1, f(1))$.

Para calcular $f'(1)$ usaremos la definición de derivada. Notar que en este caso $x_0=1$:

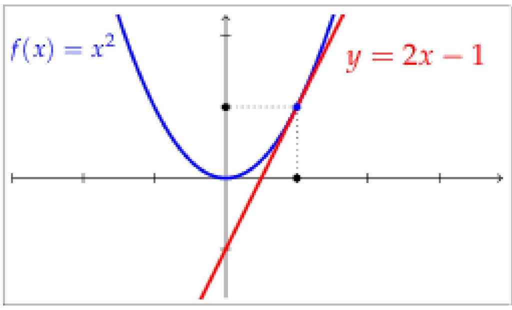
$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{1}+2h+h^2-\cancel{1}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}} = 2$$

Es decir, $\boxed{f'(1)=2.}$

Ahora, calculamos la recta tangente al gráfico de f en el punto $(1, f(1)) = (1,1)$. Por la definición, buscamos la recta de pendiente 2 que pasa por el $(1,1)$. La recta tiene la forma $y=2x+b$. Como pasa por el punto $(1,1)$, debe valer $1 = 2.1+b$, con lo que $b=1-2=-1$. Es decir, la recta tangente que buscamos es

$$\boxed{y=2x-1}$$

Podemos ver lo que calculamos en el siguiente gráfico:



En el ejemplo anterior, hallamos la derivada de $f(x) = x^2$ en $x_0 = 1$. Ahora vamos a calcular la derivada de la función $f(x) = x^2$ **para cualquier valor** x_0**:**

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2hx_0 + h^2 - \cancel{x_0^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x_0 + h)}{\cancel{h}} = 2x_0$$

Entonces, tenemos que $f'(x_0) = 2x_0$ para cualquier valor de x_0.

La función que a cada valor de x le asigna el valor de la derivada de f en x se llama *función derivada de* f y se nota f'. A la derivada de f en x la notamos $f'(x)$ o $(f(x))'$.

En el ejemplo anterior vimos que, si $f(x) = x^2$, entonces su función derivada es $f'(x) = 2x$.

La derivada puede no existir. Por ejemplo, en el siguiente gráfico, se ve una función que no es derivable en x_0:

Función no derivable

En general, no vamos a hallar derivadas calculando límites, sino basándonos en algunas derivadas básicas y aplicando ciertas propiedades de la derivación.