Capítulo 4

Espacios vectoriales

Un espacio vectorial es un conjunto con una operación suma y un producto por escalares que cumplen una serie de propiedades (para más detalles, ver el Apéndice al final de este capítulo). Las propiedades de la suma y el producto por un escalar definidos en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y, en general, $\mathbb{R}^n$ hacen que estos conjuntos sean ejemplos de espacios vectoriales reales. También lo son los conjuntos de matrices $\mathbb{R}^{m\times n}$ con la suma y producto por escalares.
En estas notas, cuando nos referimos a un espacio vectorial (en adelante abreviado e.v.) nos referimos a un espacio vectorial real, es decir, a que los escalares están en $\mathbb{R}$. A los elementos de un espacio vectorial los denominamos *vectores*.

4.1. Subespacios

Dentro de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, nos interesará trabajar con ciertos subconjuntos que cumplen propiedades especiales, relacionadas a la operación de suma y al producto por escalares en $\mathbb{V}$.

Definición

Un subconjunto $\mathbb{W}$ de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ es un *subespacio* de $\mathbb{V}$ si se cumplen:

1) El vector nulo O de $\mathbb{V}$ pertenece a $\mathbb{W}$.

2) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son elementos de $\mathbb{W}$, entonces su suma $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ pertenece a $\mathbb{W}$.

3) Si $\mathbf{v}$ es un elemento de $\mathbb{W}$ y c es un número real, entonces el producto $c\mathbf{v}$ pertenece a $\mathbb{W}$.

Algunos casos especiales:

- El conjunto vacío no es un subespacio: no verifica 1).
- El conjunto $\mathbb{W}=\{O\}$ es un subespacio de cualquier e.v. $\mathbb{V}$.
  1) $O\in\mathbb{W}$.
  2) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son elementos de $\mathbb{W}$, la única posibilidad es $\mathbf{u}=O$ y $\mathbf{v}=O$, entonces su suma $\mathbf{u}+\mathbf{v}=O+O=O$ pertenece a $\mathbb{W}$.
  3) Si $\mathbf{v}$ es un elemento de $\mathbb{W}$, la única posibilidad es $\mathbf{v}=O$ y, si $c\in\mathbb{R}$, el producto $c\mathbf{v}=c\,O=O$ pertenece a $\mathbb{W}$.

- El conjunto $\mathbb{V}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

Ejemplo 1. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^2$.

a) $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / x_1 - x_2 = 2\}$

b) $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / x_1 - x_2 = 0\}$

c) $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / x_1 - x_2 \geq 0\}$

Solución: Veamos en cada caso si se verifican las condiciones 1), 2) y 3) de la definición de subespacio.

a) 1) Si $\mathbf{x} = O = (0, 0)$ la condición $0 - 0 = 2$ no se verifica.

Como no se cumple una de las condiciones para ser subespacio:

Respuesta: El conjunto $\mathbb{W}$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

b) 1) $0 - 0 = 0 \implies O \in \mathbb{W}$.

2) Si $\mathbf{u} = (2, 2)$ y $\mathbf{v} = (-3, -3)$, que pertenecen a $\mathbb{W}$ porque $2 - 2 = 0$ y $-3 - (-3) = 0$, vemos que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (-1, -1)$ también pertenece a $\mathbb{W}$, dado que $-1 - (-1) = 0$.

Esto no es suficiente para asegurar la validez de la propiedad: la condición 2) debe cumplirse para **todos** los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de $\mathbb{W}$.

Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ pertenecen a $\mathbb{W}$ entonces verifican $u_1 - u_2 = 0$ y $v_1 - v_2 = 0$. Tenemos que ver si se cumple que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \in \mathbb{W}$, es decir, si se verifica que $(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) = 0$.

Usando propiedades de las operaciones de números podemos reordenar la cuenta $(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) = u_1 + v_1 - u_2 - v_2 = (u_1 - u_2) + (v_1 - v_2)$.

Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{W}$, como dijimos antes, las expresiones en los dos últimos paréntesis valen 0 y entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{W}$.

3) Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{W}$, se cumple que $v_1 - v_2 = 0$, y si $c \in \mathbb{R}$, tenemos que $c\mathbf{v} = (cv_1, cv_2)$ verifica $cv_1 - cv_2 = c(v_1 - v_2) = 0$. Entonces, $c\mathbf{v} \in \mathbb{W}$.

Respuesta: El conjunto $\mathbb{W}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

c) 1) $0 - 0 = 0 \implies O \in \mathbb{W}$.

2) Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ pertenecen a $\mathbb{W}$, se verifican $u_1 - u_2 \geq 0$ y $v_1 - v_2 \geq 0$. Tenemos que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ cumple $(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) = (u_1 - u_2) + (v_1 - v_2) \geq 0 + 0 = 0$ y, por lo tanto, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{W}$.

3) Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{W}$, cumple que $v_1 - v_2 \geq 0$. Para $c \in \mathbb{R}$, tenemos que $c\mathbf{v} = (cv_1, cv_2)$ y la cuenta $cv_1 - cv_2 = c(v_1 - v_2)$ cambia de signo si c es negativo.

Contraejemplo para 3):

Si $c = -1$ y $\mathbf{v} = (2, 1)$, que verifica $2 - 1 \geq 0$ y por lo tanto pertenece a $\mathbb{W}$, vemos que con $c\mathbf{v} = (-2, -1)$ ocurre que $-2 - (-1) = -1 \not\geq 0$ y entonces $-1\mathbf{v} \notin \mathbb{W}$.

Respuesta: El conjunto $\mathbb{W}$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Observación: En general para ver que un subconjunto de un espacio vectorial es un subespacio necesitamos, además de que valga la condición 1), verificar las condiciones 2) y 3) para todos los elementos del conjunto y para todos los valores de $c \in \mathbb{R}$. En cambio, para mostrar que ***no lo es*** alcanza con encontrar un contraejemplo para alguna de las condiciones.

Ejemplo 2. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$.

a) $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{x} = \lambda(1,2,3), \lambda \in \mathbb{R}\}$

b) $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 - 4x_2 - 9x_3 = -3\}$

c) $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0\}$

Solución:

a)
1) Si $\lambda = 0$, entonces $O = 0(1,2,3) \in \mathbb{W}$.
2) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ pertenecen a $\mathbb{W}$, existen valores $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\mathbf{u} = \lambda_1(1,2,3)$ y $\mathbf{v} = \lambda_2(1,2,3)$. Reescribiendo la suma $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(1,2,3) = (\lambda_1 + \lambda_2)(1,2,3)$ tenemos que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es un múltiplo de $(1,2,3)$. Entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{W}$.
3) Si $\mathbf{v} = \lambda(1,2,3)$ y $c \in \mathbb{R}$ tenemos que $c\mathbf{v} = c(\lambda(1,2,3)) = (c\lambda)(1,2,3)$ es múltiplo de $(1,2,3)$ y, por lo tanto, $c\mathbf{v} \in \mathbb{W}$.

Respuesta: El conjunto $\mathbb{W}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

b)
1) $0 - 4 \cdot 0 - 9 \cdot 0 = 0 \neq -3 \implies O \notin \mathbb{W}$.

Respuesta: El conjunto $\mathbb{W}$ no es subespacio un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

c)
1) $0 - 4 \cdot 0 - 9 \cdot 0 = 0 \implies O \in \mathbb{W}$.
2) Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ pertenecen a $\mathbb{W}$, verifican $u_1 - 4u_2 - 9u_3 = 0$ y $v_1 - 4v_2 - 9v_3 = 0$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$ verifica $(u_1 + v_1) - 4(u_2 + v_2) - 9(u_3 + v_3) = (u_1 - 4u_2 - 9u_3) + (v_1 - 4v_2 - 9v_3) = 0 + 0 = 0$ y, por lo tanto, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{W}$.
3) Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{W}$, cumple que $v_1 - 4v_2 - 9v_3 = 0$, y $c \in \mathbb{R}$, entonces $c\mathbf{v} = (cv_1, cv_2, cv_3)$ verifica $cv_1 - 4cv_2 - 9cv_3 = c(v_1 - 4v_2 - 9v_3) = c \cdot 0 = 0$. Entonces, $c\mathbf{v} \in \mathbb{W}$.

Respuesta: El conjunto $\mathbb{W}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Observaciones:

En el caso a) del ejemplo anterior, las condiciones para ser un subespacio se verifican sin importar cuáles son las coordenadas del vector $(1,2,3)$. Es decir, si en lugar de $(1,2,3)$ tenemos un vector fijo $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ y consideramos $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{x} = \lambda\mathbf{w}, \lambda \in \mathbb{R}\}$, que es el conjunto de todos los múltiplos de $\mathbf{w}$, valen:

1) Si $\lambda = 0$ entonces $O = 0\mathbf{w} \in \mathbb{W}$.

2) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ pertenecen a $\mathbb{W}$, existen valores $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{w}$ y $\mathbf{v} = \lambda_2\mathbf{w}$. Reescribiendo la suma $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{w} + \lambda_2\mathbf{w} = (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{w}$ tenemos que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es un múltiplo de $\mathbf{w}$. Entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{W}$.

3) Si $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$ y $c \in \mathbb{R}$, tenemos que $c\mathbf{v} = c(\lambda\mathbf{w}) = (c\lambda)\mathbf{w}$ es múltiplo de $\mathbf{w}$ y por lo tanto $c\mathbf{v} \in \mathbb{W}$.

Entonces $\mathbb{W}$ resulta ser un subespacio de $\mathbb{R}^3$ cualquiera que sea el vector $\mathbf{w}$.

Algo similar ocurre con el plano que pasa por el origen del ejemplo c). El hecho que $O, \mathbf{u}+\mathbf{v}$ y $c\mathbf{v}$ pertenezcan a $\mathbb{W}$ para $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{W}$, y $c \in \mathbb{R}$, se deduce del mismo modo que en el ejemplo, a partir de que $O, \mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ cumplen la ecuación del plano, independientemente de cuál sea esta ecuación.

En general las rectas y planos ***que pasan por el origen*** forman subespacios en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Es importante destacar que en esos casos, para demostrar que se verifican las condiciones para ser subespacio, se utilizan propiedades de la operación suma y del producto por escalares que son válidas también en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^{mxn}$. Esto hace que conjuntos como

- $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{x} = \lambda\mathbf{v}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ con $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ fijo.
- $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ con $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ fijos.

sean subespacios del e.v. correspondiente.

Varios de los ejemplos anteriores consisten en subespacios descriptos por una ecuación lineal homogénea. Veamos qué ocurre, más generalmente, al considerar conjuntos de soluciones de sistemas lineales homogéneos.

Ejemplo 3. Decidir si el conjunto $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 / A\mathbf{x} = O\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^5$, para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

1) Como el sistema es homogéneo, la solución trivial pertenece al conjunto:

   $AO = O \implies O \in \mathbb{W}$.

2) Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{W}$, entonces se cumplen $A\mathbf{u} = O$ y $A\mathbf{v} = O$, con lo cual la suma $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ verifica $A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = O + O = O$ y pertenece a $\mathbb{W}$.

3) Si $\mathbf{v} \in \mathbb{W}$, cumple $A\mathbf{v} = O$, y si $c \in \mathbb{R}$, entonces $c\mathbf{v}$ verifica $A(c\mathbf{v}) = c(A\mathbf{v}) = O$ y pertenece a $\mathbb{W}$.

Respuesta: El conjunto $\mathbb{W}$ de soluciones del sistema homogéneo es un subespacio de $\mathbb{R}^5$.

Observación: En el ejemplo anterior, la verificación de las condiciones para que $\mathbb{W}$ sea un subespacio no depende de cuál es la matriz del sistema. Las condiciones se cumplen gracias a propiedades de las operaciones definidas para matrices y valen en general para el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo de cualquier tamaño.

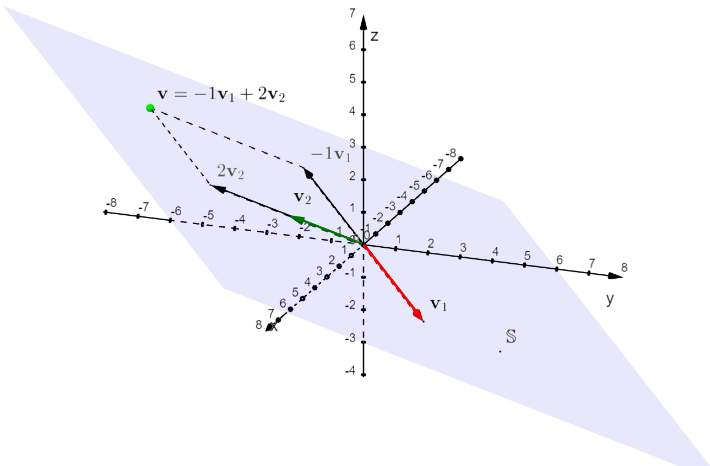
Los conjuntos de la forma $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, A\mathbf{x} = O\}$, con $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ son subespacios de $\mathbb{R}^n$.

4.2. Combinaciones lineales y generadores

Como vimos en la sección anterior, un plano que pasa por el origen es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Este hecho lo dedujimos a partir de ver al plano como el conjunto de las soluciones de una ecuación homogénea. Sin embargo, conocemos otra forma de expresar un plano, que es mediante una ecuación paramétrica. Esto nos permite afirmar, por ejemplo, que el conjunto
$\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{x} = \alpha(3,3,-1) + \beta(1,-2,1), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, ya que sabemos que

$$\mathbf{x} = \alpha(3,3,-1) + \beta(1,-2,1), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

es una descripción paramétrica de un plano que pasa por el origen.
En este caso, los vectores de $\mathbb{R}^3$ que pertenecen al plano $\mathbb{W}$ se generan a partir de las dos direcciones $(3,3,-1)$ y $(1,-2,1)$.



En lo que sigue veremos cómo se generaliza la forma paramétrica de rectas y planos que pasan por el origen en $\mathbb{R}^3$ para representar subespacios de otros espacios vectoriales.

Combinaciones lineales

Dados un e.v. $\mathbb{V}$ y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ elementos de $\mathbb{V}$, se dice que un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ es una *combinación lineal (c.l.)* de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ si existen números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ que verifican

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n.$$

Dado un subconjunto finito $C = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de $\mathbb{V}$, al conjunto formado por todas las combinaciones lineales de vectores de C lo escribimos en forma abreviada con la notación $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$. Así,

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} / \mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n, \text{ con } a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Por ejemplo, el plano $\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{x} = \alpha(3,3,-1) + \beta(1,-2,1), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales del conjunto $C = \{(3,3,-1),(1,-2,1)\}$. En este caso escribimos $\mathbb{W} = \langle (3,3,-1),(1,-2,1) \rangle$.

Propiedad

Dado un espacio vectorial $\mathbb{V}$ y un subconjunto finito $C = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de $\mathbb{V}$, el conjunto $\mathbb{W} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

Subespacio generado

Al conjunto $\mathbb{W} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ se lo denomina el *subespacio generado* por $C = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ y al conjunto C se lo llama un *conjunto de generadores* de $\mathbb{W}$.

Demostración de la propiedad:

1) $0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \dots + 0\mathbf{v}_n = O \implies O \in \mathbb{W}$ (propiedad del producto por escalar $0\mathbf{v} = O$)

2) Si $\mathbf{u} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \dots + b_n\mathbf{v}_n$ y $\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$, podemos reescribir $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ usando las propiedades de la suma y el producto por escalares (ver el Apéndice al final de este capítulo) como

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{w} &= (b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \dots + b_n\mathbf{v}_n) + (c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n) \\ &= (b_1\mathbf{v}_1 + c_1\mathbf{v}_1) + (b_2\mathbf{v}_2 + c_2\mathbf{v}_2) + \dots + (b_n\mathbf{v}_n + c_n\mathbf{v}_n) && \text{EV3 y EV6} \\ &= (b_1 + c_1)\mathbf{v}_1 + (b_2 + c_2)\mathbf{v}_2 + \dots + (b_n + c_n)\mathbf{v}_n && \text{EV8} \end{aligned}$$

Esto muestra que, con $a_1 = b_1 + c_1, a_2 = b_2 + c_2, \dots, a_n = b_n + c_n$, tenemos $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in \mathbb{W}$.

3) Si $\mathbf{u} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \dots + b_n\mathbf{v}_n$ y $c \in \mathbb{R}$, las propiedades EV7 y EV9 implican que

$$\begin{aligned} c\mathbf{u} &= c(b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \dots + b_n\mathbf{v}_n) \\ &= c(b_1\mathbf{v}_1) + c(b_2\mathbf{v}_2) + \dots + c(b_n\mathbf{v}_n) && \text{EV7} \\ &= (cb_1)\mathbf{v}_1 + (cb_2)\mathbf{v}_2 + \dots + (cb_n)\mathbf{v}_n && \text{EV9} \end{aligned}$$

Entonces, con $a_1 = cb_1, a_2 = ca_2, \dots, a_n = cb_n$, se verifica $c\mathbf{u} \in \mathbb{W}$.

Observaciones: Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ pertenecen al subespacio $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$, ya que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + \dots + 0\mathbf{v}_n \\ \mathbf{v}_2 &= 0\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + \dots + 0\mathbf{v}_n \\ \dots & \quad \dots \\ \mathbf{v}_n &= 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 + \dots + 1\mathbf{v}_n \end{aligned}$$

Además, si un subespacio $\mathbb{U}$ de $\mathbb{V}$ contiene a los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ entonces, por cumplir con las condiciones 2) y 3) de la definición de subespacio, tiene que contener a todas las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, es decir, a todos los vectores de $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$.

En este sentido el subespacio $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ es el *menor* subespacio que contiene a los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

De este modo, podemos definir subespacios a partir de conjuntos de generadores. Por ejemplo:

- $\mathbb{W} = \langle (1,2,3,1), (-3,1,2,1), (4,1,1,0) \rangle$ es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.
- Dado un e.v. $\mathbb{V}$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{V}$ y los vectores
  $\mathbf{w}_1 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{w}_2 = -3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{w}_3 = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3,$
  el conjunto $\mathbb{W} = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.
  Lo escribiremos directamente como $\mathbb{W} = \langle 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, -3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3, -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 \rangle$.
- $\mathbb{W} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{2x2}$.

Ejemplo 1. Decidir si el vector $\mathbf{v}$ pertenece al subespacio $\mathbb{S}$ en los siguientes casos.

a) $\mathbb{S} = \langle (1,1,1), (2,1,3) \rangle$ y $\mathbf{v} = (0,1,-1)$.

b) $\mathbb{S} = \langle (1,0,1,0), (0,1,0,-1), (1,-1,1,1) \rangle$ y $\mathbf{v} = (3,-1,3,1)$.

c) $\mathbb{S} = \langle (1,0,1,0), (0,1,0,-1), (1,-1,1,1) \rangle$ y $\mathbf{v} = (3,-1,3,0)$.

Solución:

a) Tenemos que ver si $\mathbf{v} = (0,1,-1)$ es una combinación lineal de los generadores de $\mathbb{S}$, es decir, si existen escalares a y b que verifiquen $(0,1,-1) = a(1,1,1) + b(2,1,3)$.

Igualando coordenadas en la expresión

$$(0,1,-1) = a(1,1,1) + b(2,1,3) = (a+2b, a+b, a+3b)$$

nos queda el sistema

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ a + b = 1 \\ a + 3b = -1 \end{cases}$$

Escalonamos su matriz ampliada para determinar si el sistema tiene solución:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) F_3 + F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Encontramos que el sistema es compatible y por lo tanto $\mathbf{v} \in \mathbb{S}$.

$\boxed{\text{Respuesta: } \mathbf{v} \in \mathbb{S}.}$

Verificación:

Si terminamos de resolver el sistema

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ \quad -b = 1 \end{cases}$$

hallamos $b = -1$ y $a = -2b = 2$. Reemplazamos en el planteo original y nos queda:

$2(1,1,1) - 1(2,1,3) = (0,1,-1)$.

b) Como en el caso anterior, queremos determinar si $\mathbf{v}$ es una combinación lineal de los generadores de $\mathbb{S}$. Planteamos:

$\mathbf{v} = (3,-1,3,1) = a(1,0,1,0) + b(0,1,0,-1) + c(1,-1,1,1) = (a+c, b-c, a+c, -b+c)$

y el sistema para los escalares a, b y c es

$$\begin{cases} a \quad\quad + c = 3 \\ \quad b - c = -1 \\ a \quad\quad + c = 3 \\ \quad -b + c = 1 \end{cases} \text{con matriz asociada} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Escalonamos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_3 - F_1 \to F_3 \\ F_4 + F_2 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible; por lo tanto, existe la combinación lineal que da $\mathbf{v}$.

$\boxed{\text{Respuesta: } \mathbf{v} \in \mathbb{S}.}$

Verificación:

Como el sistema es compatible, aunque sea indeterminado para verificar que $\mathbf{v} \in \mathbb{S}$ solo necesitamos usar una de las soluciones. Por ejemplo, si $c = 1$, entonces $b = c - 1 = 0$ y $a = 3 - c = 2$. Usando estos valores de a, b y c:

$2(1,0,1,0) + 0(0,1,0,-1) + 1(1,-1,1,1) = (3,-1,3,1)$.

c) Planteamos, como en los ejemplos anteriores,

$\mathbf{v} = (3,-1,3,0) = a(1,0,1,0) + b(0,1,0,-1) + c(1,-1,1,1) = (a+c, b-c, a+c, -b+c)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a \quad\quad + c = 3 \\ \quad b - c = -1 \\ a \quad\quad + c = 3 \\ \quad -b + c = 0 \end{cases} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Escalonamos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_3 - F_1 \to F_3 \\ F_4 + F_2 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) F_3 \leftrightarrow F_4 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es incompatible; por lo tanto, no existen a, b, c que cumplan lo requerido.

Respuesta: $\mathbf{v} \notin \mathbb{S}$.

Ejemplo 2. Dados $\mathbb{S} = \langle (2,2,2,2), (1,3,0,2) \rangle$ y $\mathbb{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$, decidir si $\mathbb{S} \subset \mathbb{H}$.

Solución: Como $\mathbb{H}$ es un subespacio, si contiene a los vectores $(2,2,2,2)$ y $(1,3,0,2)$ del conjunto de generadores de $\mathbb{S}$, entonces contiene a todas las combinaciones lineales de estos vectores, es decir, a todos los vectores de $\mathbb{S}$. Entonces, si vemos que los generadores de $\mathbb{S}$ cumplen con la ecuación de $\mathbb{H}$, entonces todos los vectores de $\mathbb{S}$ pertenecerán a $\mathbb{H}$:

$(2,2,2,2) \in \mathbb{H}: \quad -3 \cdot 2 + 2 + 2 \cdot 2 = 0$

$(1,3,0,2) \in \mathbb{H}: \quad -3 \cdot 1 + 3 + 2 \cdot 0 = 0$

Respuesta: $\mathbb{S} \subset \mathbb{H}$

Ejemplo 3. Hallar un conjunto de generadores del subespacio

$$\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0\}.$$

Solución: El subespacio $\mathbb{S}$ está definido por una ecuación lineal homogénea, con lo cual, es un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen. Sabemos entonces que podemos describirlo, alternativamente, en forma paramétrica. Usaremos una ecuación paramétrica para obtener un conjunto de generadores de $\mathbb{S}$.
A partir de la ecuacion del plano $x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0$, despejamos $x_1 = 4x_2 + 9x_3$. Entonces, los puntos del plano son los $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ de la forma

$$\mathbf{x} = (4x_2 + 9x_3, x_2, x_3) = x_2(4,1,0) + x_3(9,0,1), \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R},$$

es decir, son las combinaciones lineales de los vectores $(4,1,0)$ y $(9,0,1)$. Por lo tanto, estos vectores forman un conjunto de generadores de $\mathbb{S}$.

Respuesta: $\{(4,1,0), (9,0,1)\}$ es un conjunto de generadores de $\mathbb{S}$.

Verificación:

Necesitamos asegurarnos que los generadores están en el subespacio $\mathbb{S}$ y son suficientes para formar un plano:

$(4,1,0) \in \mathbb{S}$: $\quad 4-4\cdot 1-9\cdot 0=0$

$(9,0,1) \in \mathbb{S}$: $\quad 9-4\cdot 0-9\cdot 1=0$

Además, $(4,1,0)$ y $(9,0,1)$ no son múltiplos uno del otro.
Entonces, $\alpha(4,1,0)+\beta(9,0,1)$, con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ es una ecuación paramétrica del plano $\mathbb{S}$.

Observación: Para el subespacio $\mathbb{S}$, $\{(4,1,0),(9,0,1)\}$ no es el único conjunto de generadores. Cualquier par de vectores, no múltiplos entre sí, que pertenezcan a $\mathbb{S}$ forman un conjunto de generadores de este plano.
Por ejemplo, $\{(3,3,-1),(1,-2,1)\}$ es otro conjunto de generadores de $\mathbb{S}$. Reemplazando en la ecuación, verificamos que ambos vectores pertenecen a $\mathbb{S}$. Además, no son múltiplos entre sí: $(3,3,-1)=k(1,-2,1)$ conduce a una contradicción al despejar k.
En consecuencia, vemos que $\mathbb{S}$ coincide con el plano $\mathbb{W}=\langle(3,3,-1),(1,-2,1)\rangle$ con el que trabajamos al comienzo de esta sección.

Ejemplo 4. Hallar un conjunto de generadores del subespacio $\mathbb{S}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5/A\mathbf{x}=O\}$, con $A=\begin{pmatrix}1&2&1&-2&1\\2&-1&0&1&2\\0&5&2&-5&0\end{pmatrix}$.

Solución: Al igual que con planos que pasan por el origen, la forma paramétrica de las soluciones del sistema $A\mathbf{x}=O$ nos sirve para encontrar generadores de $\mathbb{S}$.
(Nota: Para explicitar que estamos trabajando con un sistema de ecuaciones, escribiremos la última columna de 0 en la matriz ampliada del sistema homogéneo.)
Resolvamos el sistema

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&1&-2&1&0\\2&-1&0&1&2&0\\0&5&2&-5&0&0\end{array}\right) F_2-2F_1\to F_2 \left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&1&-2&1&0\\0&-5&-2&5&0&0\\0&5&2&-5&0&0\end{array}\right)$$

$$F_3+F_2\to F_3 \left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&1&-2&1&0\\0&-5&-2&5&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

Observemos que el rango de esta matriz es 2. Como hay 5 incógnitas, quedarán 3 variables libres. Volviendo a las ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ \quad - 5x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

despejamos

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 = -\frac{2}{5}x_3 + x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2\left(-\frac{2}{5}x_3 + x_4\right) + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 = -\frac{2}{5}x_3 + x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & = -\frac{1}{5}x_3 - x_5 \\ \quad x_2 & = -\frac{2}{5}x_3 + x_4 \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son los $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$ de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \left(-\frac{1}{5}x_3 - x_5, -\frac{2}{5}x_3 + x_4, x_3, x_4, x_5\right) \\ &= x_3\left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 1, 0, 0\right) + x_4\,(0,1,0,1,0) + x_5\,(-1,0,0,0,1) \end{aligned}$$

con $x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$.

Respuesta: $\left\{\left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 1, 0, 0\right), (0,1,0,1,0), (-1,0,0,0,1)\right\}$ es un conjunto de generadores para el subespacio $\mathbb{S}$.

Verificación:

Más adelante veremos una verificación completa. Por ahora podemos corroborar que los generadores que encontramos pertenecen al subespacio verificando que cumplen las ecuaciones:

$\left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 1, 0, 0\right) \in \mathbb{S}$:

$$A\begin{pmatrix} -1/5 \\ -2/5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/5 \\ -2/5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(0,1,0,1,0) \in \mathbb{S}$:

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(-1,0,0,0,1) \in \mathbb{S}$:

$$A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Observación: Como mencionamos antes estos generadores no son únicos. Por ejemplo podemos usar múltiplos no nulos: $\{(-1,-2,5,0,0), (0,1,0,1,0), (-1,0,0,0,1)\}$ también es un conjunto de generadores de $\mathbb{S}$.

Ejemplo 5. Hallar un conjuto de generadores del subespacio

$$\mathbb{S} = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2\times 2} / \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} .X = X. \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Solución: Como en los ejemplos anteriores, vamos a resolver la ecuación que define $\mathbb{S}$ y escribir sus soluciones en forma paramétrica.
Si escribimos $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ la ecuación queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} - x_{21} & x_{12} - x_{22} \\ 2x_{21} & 2x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & -x_{11} + 2x_{12} \\ x_{21} & -x_{21} + 2x_{22} \end{pmatrix}$$

Igualamos lugar a lugar y reescribimos las ecuaciones como un sistema lineal homogéneo en las incógnitas $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{11} - x_{21} & = & x_{11} \\ x_{12} - x_{22} & = & -x_{11} + 2x_{12} \\ 2x_{21} & = & x_{21} \\ 2x_{22} & = & -x_{21} + 2x_{22} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccccccccc} & & & & -x_{21} & & & = & 0 \\ x_{11} & - & x_{12} & & & - & x_{22} & = & 0 \\ & & & & x_{21} & & & = & 0 \\ & & & & x_{21} & & & = & 0 \end{array} \right.$$

Este sistema es equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_{11} & - & x_{12} & & & - & x_{22} & = & 0 \\ & & & & x_{21} & & & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_{11} & = & x_{12} + x_{22} \\ x_{21} & = & 0 \end{array} \right.$$

Por lo tanto, las soluciones $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ son de la forma

$$X = \begin{pmatrix} x_{12} + x_{22} & x_{12} \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix} = x_{12} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_{22} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_{12}, x_{22} \in \mathbb{R},$$

es decir, los elementos de $\mathbb{S}$ son las combinaciones lineales de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Respuesta: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto de generadores para el subespacio $\mathbb{S}$.

En $\mathbb{R}^n$ también se puede hacer el camino inverso: dado un subespacio por medio de un conjunto de generadores podemos hallar un sistema homogéneo de ecuaciones cuyas soluciones forman el mismo subespacio.
Esto ya lo sabemos hacer, por ejemplo, en el caso de planos en $\mathbb{R}^3$: a partir de una ecuación paramétrica del plano, podemos hallar una ecuación implícita. Veámoslo ahora con mayor generalidad.

Ejemplo 6. Hallar un sistema de ecuaciones cuyo conjunto de soluciones sea el subespacio $\mathbb{S} = \langle (1, 0, 1, -2, 2), (1, 2, 3, 1, -2) \rangle$.

Solución: Los puntos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$ que pertenecen al subespacio $\mathbb{S}$ son aquellos para los cuales existen escalares $a, b \in \mathbb{R}$ que verifican

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = a(1, 0, 1, -2, 2) + b(1, 2, 3, 1, -2) = (a + b, 2b, a + 3b, -2a + b, 2a - 2b)$$

lo que equivale a que sea compatible el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a & + & b & = & x_1 \\ & & 2b & = & x_2 \\ a & + & 3b & = & x_3 \\ -2a & + & b & = & x_4 \\ 2a & - & 2b & = & x_5 \end{array}\right.$$

Observar que, aunque estamos buscando condiciones para las coordenadas de $\mathbf{x}$, las incógnitas en este sistema son las variables a y b. Las coordenadas x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 actúan como parámetros del sistema. Escalonamos:

$$\left(\begin{array}{rr|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 \\ 1 & 3 & x_3 \\ -2 & 1 & x_4 \\ 2 & -2 & x_5 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_3 - F_1 \to F_3 \\ F_4 + 2F_1 \to F_4 \\ F_5 - 2F_1 \to F_5 \end{array} \left(\begin{array}{rr|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 \\ 0 & 2 & x_3 - x_1 \\ 0 & 3 & x_4 + 2x_1 \\ 0 & -4 & x_5 - 2x_1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_3 - F_2 \to F_3 \\ 2F_4 - 3F_2 \to F_4 \\ F_5 + 2F_2 \to F_5 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 \\ 0 & 0 & (x_3 - x_1) - (x_2) \\ 0 & 0 & 2(x_4 + 2x_1) - 3(x_2) \\ 0 & 0 & (x_5 - 2x_1) + 2(x_2) \end{array}\right)$$

Para que el sistema sea compatible es necesario y suficiente que se anulen los coeficientes de la última columna en las filas donde todas las incógnitas (a y b) tienen coeficientes 0:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 2 & x_2 \\ 0 & 0 & (x_3 - x_1) - (x_2) \\ 0 & 0 & 2(x_4 + 2x_1) - 3(x_2) \\ 0 & 0 & (x_5 - 2x_1) + 2(x_2) \end{array}\right)$$

Es decir, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$ pertenece al subespacio $\mathbb{S}$ si y solo si las coordenadas de $\mathbf{x}$ cumplen simultáneamente las ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} (x_3 - x_1) - (x_2) & = & 0 \\ 2(x_4 + 2x_1) - 3(x_2) & = & 0 \\ (x_5 - 2x_1) + 2(x_2) & = & 0 \end{array}\right.$$

que, reordenadas, nos dan un sistema de ecuaciones para $\mathbb{S}$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 0 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & & & + & 2x_4 & & & = & 0 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Respuesta: } \mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 / -x_1 - x_2 + x_3 = 0; 4x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 0; -2x_1 + 2x_2 + x_5 = 0\}.}$$

Verificación:

Más adelante veremos una verificación completa.
Por el momento, corroboremos que los generadores de $\mathbb{S}$ son soluciones del sistema encontrado:

$(1,0,1,-2,2)$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -1 & - & 0 & + & 1 & & & & & = & 0 \\ 4\cdot 1 & - & 3\cdot 0 & & & + & 2(-2) & & & = & 0 \\ -2\cdot 1 & + & 2\cdot 0 & & & & & + & 2 & = & 0 \end{array}\right.$$

$(1,2,3,1,-2)$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -1 & - & 2 & + & 3 & & & & & = & 0 \\ 4\cdot 1 & - & 3\cdot 2 & & & + & 2\cdot 1 & & & = & 0 \\ -2\cdot 1 & + & 2\cdot 2 & & & & & + & (-2) & = & 0 \end{array}\right.$$

Observaciones: En $\mathbb{R}^n$ tenemos dos formas de describir un subespacio: como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas o a través de un conjunto de generadores, y podemos, cuando sea necesario, pasar de una descripción a la otra.

Si en un ejemplo como el anterior, al escalonar el sistema planteado obtenemos un sistema que es compatible independientemente de las coordenadas de $\mathbf{x}$, podemos concluir que cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es una combinación lineal de los vectores considerados, es decir, que el subespacio generado por esos vectores es todo el espacio $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 7. Hallar un sistema de ecuaciones para el subespacio

$$\mathbb{S} = \langle (1,0),(1,2),(-3,1) \rangle .$$

Solución: Un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ pertenece al subespacio $\mathbb{S}$ si existen $a,b,c \in \mathbb{R}$ que verifican

$$(x_1,x_2) = a(1,0) + b(1,2) + c(-3,1),$$

lo que equivale a que sea compatible el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & - & 3c & = & x_1 \\ & & 2b & + & c & = & x_2 \end{array}\right.$$

Como este sistema es compatible independientemente de $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ concluimos que cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ pertenece al subespacio $\mathbb{S}$, es decir, $\mathbb{S} = \mathbb{R}^2$.

$\boxed{\text{Respuesta: } \mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / 0 = 0\}}$

Ejemplo 8. Decidir si el conjunto $C = \{(-2,2,3),(1,0,1),(4,-2,-1)\}$ genera $\mathbb{R}^3$.

Solución: Veamos si todos los vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ se pueden escribir como combinación lineal de los vectores de C, es decir, si para todo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ que cumplen

$$(x_1, x_2, x_3) = a(-2, 2, 3) + b(1, 0, 1) + c(4, -2, -1).$$

Esto equivale a que sea compatible el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2a & + & b & + & 4c & = & x_1 \\ 2a & & & - & 2c & = & x_2 \\ 3 & + & b & - & c & = & x_3 \end{array}\right. \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|l} -2 & 1 & 4 & x_1 \\ 2 & 0 & -2 & x_2 \\ 3 & 1 & -1 & x_3 \end{array}\right)$$

Escalonamos:

$$\begin{array}{c} F_2 + F_1 \to F_2 \\ 2F_3 + 3F_1 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|c} -2 & 1 & 4 & x_1 \\ 0 & 1 & 2 & x_2 + x_1 \\ 0 & 5 & 10 & 2x_3 + 3x_1 \end{array}\right) F_3 - 5F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{rrr|c} -2 & 1 & 4 & x_1 \\ 0 & 1 & 2 & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -2x_1 - 5x_2 + 2x_3 \end{array}\right)$$

Encontramos que el sistema no es compatible para todos los valores $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Solo lo es cuando se cumple $-2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0$.

Respuesta: El conjunto C no genera $\mathbb{R}^3$.

Observación: En el ejemplo anterior, al analizar la compatibilidad del sistema, encontramos que el conjunto C genera el subespacio $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / -2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0\}$.

4.3. Independencia lineal

Un espacio vectorial puede estar generado por distintos conjuntos de vectores y además, dos conjuntos de generadores del mismo espacio vectorial pueden tener distinta cantidad de elementos.
Por ejemplo, la recta $\mathbb{L}\colon X = \lambda(1, -1, 2)$ la podemos escribir como $\mathbb{L} = \langle(1, -1, 2)\rangle$, pero también como $\mathbb{L} = \langle(1, -1, 2), (2, -2, 4)\rangle$. De hecho, los elementos del subespacio $\langle(1, -1, 2), (2, -2, 4)\rangle$ son los vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ de la forma

$$\mathbf{v} = a(1, -1, 2) + b(2, -2, 4), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Teniendo en cuenta que $(2, -2, 4) = 2(1, -1, 2)$, obtenemos:

$$\mathbf{v} = a(1, -1, 2) + 2b(1, -1, 2) = (a + 2b)(1, -1, 2), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

y concluimos que estos vectores son los puntos de la recta $\langle(1, -1, 2)\rangle$. Es decir,

$$\langle(1, -1, 2), (2, -2, 4)\rangle = \langle(1, -1, 2)\rangle.$$

En otras palabras, podemos suprimir el vector $(2, -2, 4)$ del conjunto de generadores y el subespacio generado es el mismo (en este caso, la recta $\mathbb{L}$). Esto se debe, como vimos, a que $(2, -2, 4) \in \langle(1, -1, 2)\rangle$.

Al analizar $\langle(1,-1,2),(2,-2,4)\rangle$ de la misma manera, pero usando que $(1,-1,2)=\frac{1}{2}(2,-2,4)$, podemos concluir que $\langle(1,-1,2),(2,-2,4)\rangle=\langle(2,-2,4)\rangle$, o sea, que alternativamente, podemos suprimir $(1,-1,2)$.

Cuando tenemos un subespacio nos interesa expresarlo de la manera más simple posible. En este contexto, lo que buscamos es trabajar con conjuntos de generadores que sean lo más chicos posible, o sea, en los que no podamos suprimir ningún vector sin perder elementos del subespacio.
En el ejemplo anterior, el haber podido eliminar uno de los vectores del conjunto de generadores $\{(1,-1,2),(2,-2,4)\}$ y seguir teniendo el mismo subespacio generado se debe a que los vectores satisfacen una relación de *dependencia lineal*:

$$2\cdot(1,-1,2)+(-1)\cdot(2,-2,4)=(0,0,0),$$

la que nos permitió expresar a uno de ellos en función del otro despejando:

$$(2,-2,4)=2\cdot(1,-1,2) \quad \text{ó} \quad (1,-1,2)=\frac{1}{2}\cdot(2,-2,4).$$

En lo que sigue vamos a estudiar las nociones de dependencia e independencia lineal de vectores en un espacio vectorial $\mathbb{V}$, utilizarlas para analizar la minimalidad de los conjuntos de generadores de $\mathbb{V}$ e introducir una noción de *dimensión*.

Dependencia e independencia lineal

Decimos que un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ es *linealmente dependiente* si existen escalares $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ **no todos iguales a** 0 tales que:

$$a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2+\cdots+a_n\mathbf{v}_n=O.$$

En caso contrario, decimos que $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ es *linealmente independiente*; es decir, cuando la **única** manera de escribir al vector O como combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ es con todos los escalares iguales a 0. Así, $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente si dados $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ tales que

$$a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2+\cdots+a_n\mathbf{v}_n=O,$$

entonces, necesariamente,

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=0.$$

También decimos que los vectores $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ son linealmente dependientes (respectivamente, independientes) cuando el conjunto $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ es linealmente dependiente (respectivamente, independiente).

Observación: Dados vectores $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ siempre es posible escribir al vector nulo O como combinación lineal de esos vectores, simplemente como

$$0\cdot\mathbf{v}_1+0\cdot\mathbf{v}_2+\cdots+0\cdot\mathbf{v}_n=O.$$

La diferencia entre vectores linealmente independientes y dependientes es si ésta es la única opción o no.

Por ejemplo, el conjunto $\{(1,-1,2),(2,-2,4)\}$ es linealmente dependiente ya que

$$2(1,-1,2)+(-1)(2,-2,4)=(0,0,0).$$

Escribimos al vector nulo como combinación de ambos vectores usando los escalares 2 y -1. En este caso pudimos verlo a simple vista porque $(1,-1,2)$ y $(2,-2,4)$ son múltiplos.

Ejemplo 1. Decidir si $\{(1,1,1),(1,2,3)\}$ es linealmente independiente.

Solución. Estos dos vectores no son uno múltiplo del otro. Para ver si son linealmente dependientes o linealmente independientes tenemos que ver si podemos escribir al vector nulo como combinación lineal de los vectores involucrados usando escalares distintos de 0 o no. Es decir, primero escribimos a $(0,0,0)$ como combinación lineal de ambos vectores,

$$\begin{aligned} a(1,1,1)+b(1,2,3)&=(0,0,0),\\ (a+b,a+2b,a+3b)&=(0,0,0). \end{aligned}$$

Si igualamos coordenada a coordenada obtenemos un sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} a+b &= 0,\\ a+2b &= 0,\\ a+3b &= 0. \end{cases}$$

Resolviendo ese sistema vemos que la única solución es $a=0$ y $b=0$. Es decir, la única forma de escribir al vector nulo como combinación lineal de $(1,1,1)$ y $(1,2,3)$ es usando escalares a y b iguales a 0. Concluimos que el conjunto es linealmente independiente.

Respuesta: El conjunto $\{(1,1,1),(1,2,3)\}$ es linealmente independiente.

Observación: Cuando tenemos sólo dos vectores podemos determinar si son linealmente dependientes viendo si son múltiplos. Esta regla **no** sirve cuando el conjunto tiene más de dos vectores.

Ejemplo 2. Decidir si $\{(1,0,1),(1,2,3),(0,2,2)\}$ es linealmente independiente.

Solución. Nuevamente la idea es analizar cómo son todas las combinaciones lineales posibles que dan como resultado el vector nulo y ver si hay una sola (con todos los escalares iguales a 0) o si hay otra posibilidad. Planteamos entonces,

$$\begin{aligned} a(1,0,1)+b(1,2,3)+c(0,2,2)&=(0,0,0),\\ (a+b,2b+2c,a+3b+2c)&=(0,0,0). \end{aligned}$$

Igualando cada coordenada,

$$\begin{cases} a + \ \ b & = \ 0, \\ \quad\ 2b + 2c & = \ 0, \\ a + 3b + 2c & = \ 0. \end{cases}$$

Para resolver el sistema planteamos su matriz ampliada y la escalonamos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \ F_3 - F_1 \to F_3 \ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \ F_3 - F_2 \to F_3 \ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Como tenemos 3 incógnitas y luego de escalonar hay dos ecuaciones no nulas concluimos que es un sistema compatible indeterminado.
Las soluciones de este sistema representan todas las posibles combinaciones lineales de los vectores que dan como resultado $(0,0,0)$. Por lo tanto, que el sistema tenga infinitas soluciones quiere decir que hay más de una combinación lineal posible y que los vectores son linealmente dependientes.

Respuesta: El conjunto $\{(1,0,1),(1,2,3),(0,2,2)\}$ es linealmente dependiente.

Observación: Cuando tenemos tres o más vectores ya no podemos saber si son linealmente dependientes sólo viendo si alguno es múltiplo de otro o no. En este ejemplo, la combinación lineal que da el vector nulo se forma usando los tres vectores.

Ejemplo 3. Hallar alguna combinación lineal de $(1,0,1),(1,2,3)$ y $(0,2,2)$ que dé $(0,0,0)$ y tal que sus coeficientes no sean todos 0.

Solución: Para encontrar una combinación lineal que dé el vector nulo tendríamos que encontrar alguna solución del sistema que planteamos en el ejemplo anterior. Al escalonar la matriz ampliada del sistema, llegamos a que es equivalente a:

$$\begin{cases} a + \ \ b & = \ 0, \\ \quad\ 2b + 2c & = \ 0. \end{cases}$$

De la segunda ecuación tenemos que $b = -c$ y, si reemplazamos esto en la primera, queda $a - c = 0$, es decir, que $a = c$. Entonces, cualquier combinación lineal de los vectores dados con escalares de la forma $(c,-c,c)$, con $c \in \mathbb{R}$, da como resultado $(0,0,0)$. Si tomamos, por ejemplo, $c = 1$ tenemos que

$$1(1,0,1) - 1(1,2,3) + 1(0,2,2) = (0,0,0).$$

Respuesta: Una combinación lineal posible es $1(1,0,1) - 1(1,2,3) + 1(0,2,2) = (0,0,0)$.

Podemos reescribir la combinación lineal de los vectores que nos da el vector nulo en el ejemplo anterior como

$$(1,0,1) + (0,2,2) = (1,2,3).$$

Vemos entonces que $(1,2,3)$ es una combinación lineal de $(1,0,1)$ y $(0,2,2)$. Como estamos trabajando con vectores de $\mathbb{R}^3$, podemos interpretar esto geométricamente: $(1,2,3)$ pertenece al plano que pasa por $(1,0,1)$, $(0,2,2)$ y $(0,0,0)$.
Esto es justamente lo que podemos detectar cuando estudiamos la dependencia o independencia lineal de un conjunto de vectores: si alguno de los vectores dados es una combinación de los restantes o no.

Si un conjunto de vectores es linealmente dependiente alguno de ellos es combinación lineal de otros, y recíprocamente.

En el ejemplo, a partir de la expresión de $(1,2,3)$ como una combinación lineal de $(1,0,1)$ y $(0,2,2)$:

$$(1,2,3) = (1,0,1) + (0,2,2)$$

podemos, despejando, hallar una comabinación lineal de los tres vectores que da el vector nulo:

$$(1,0,1) + (0,2,2) - (1,2,3) = (0,0,0).$$

Observación: Siempre que planteamos una combinación lineal de vectores igualada a cero llegamos a un sistema homogéneo. Para saber si los vectores son linealmente independientes o linealmente dependientes nos interesa saber si este sistema es compatible determinado o compatible indeterminado y no necesitamos resolverlo.

Ejemplo 4. Decidir si el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente independiente.

Solución: En primer lugar planteamos una combinación lineal del conjunto que dé la matriz nula:

$$a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \quad \begin{pmatrix} a-b & a+2b \\ b+c & b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Igualar lugar a lugar nos lleva al sistema:

$$\begin{cases} a - b = 0, \\ a + 2b = 0, \\ b + c = 0, \\ b + c = 0, \end{cases}$$

que tiene como matriz ampliada a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Ahora tenemos que decidir si el sistema es compatible determinado o indeterminado. Para esto, escalonamos la matriz. Si hacemos las operaciones $F_2 - F_1 \to F_2$ y $F_4 - F_3 \to F_4$ tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ahora hacemos $F_3 - \frac{1}{3}F_2 \to F_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Por lo tanto, el sistema es compatible determinado y, como consecuencia, el conjunto dado es linealmente independiente.

Respuesta: El conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente independiente.

Ejemplo 5. Decidir si $\{(0,0,0),(1,2,3),(1,1,0)\}$ es linealmente independiente.

Solución: Este es un ejemplo muy particular porque uno de los vectores involucrados es el vector nulo. Es muy fácil entonces formarlo como combinación lineal de estos tres vectores usando algún escalar no nulo. Por ejemplo:

$$1(0,0,0) + 0(1,2,3) + 0(1,1,0) = (0,0,0).$$

O sea, el conjunto de vectores es linealmente dependiente.

Respuesta: El conjunto $\{(0,0,0),(1,2,3),(1,1,0)\}$ es linealmente dependiente.

Observación: Si observamos el ejemplo con atención vemos que no importó cuáles eran los vectores no nulos del conjunto: el hecho de que esté el vector nulo alcanzó para ver que son linealmente dependientes.

Si un conjunto de vectores contiene al vector nulo entonces es linealmente dependiente.

Ejemplo 6. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el conjunto

$$\{(1,0-1,0),(1,1,-1,2),(2,3,-2,k)\}$$

es linealmente independiente.

Solución: Para que el conjunto sea linealmente independiente, debemos ver que la única combinación lineal de los vectores que da el vector $(0,0,0,0)$ es con todos los escalares iguales a 0. Planteamos:

$$a(1,0,-1,0)+b(1,1,-1,2)+c(2,3,-2,k)=(0,0,0,0)$$

que, igualando coordenada a coordenada, nos conduce al sistema,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & + & 2c & = & 0 \\ & & b & + & 3c & = & 0 \\ -a & - & b & - & 2c & = & 0 \\ & & 2b & + & kc & = & 0 \end{array}\right.$$

Buscamos entonces los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales este sistema es compatible determinado. Escribimos la matriz y escalonamos:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & k & 0 \end{array}\right) \; F_3+F_1 \to F_3 \; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & k & 0 \end{array}\right)$$

$$F_4-2F_2 \to F_4 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-6 & 0 \end{array}\right) F_3 \leftrightarrow F_4 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & k-6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Mirando la última matriz concluimos que el sistema es compatible determinado si $k-6 \neq 0$, es decir, si $k \neq 6$, mientras que para $k=6$ es compatible indeterminado.

Respuesta: El conjunto $\{(1,0-1,0),(1,1,-1,2),(2,3,-2,k)\}$ es linealmente independiente si y sólo si $k \neq 6$.

Ejemplo 7. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3 \in \mathbb{V}$. Sabiendo que $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ es linealmente independiente decidir si $\{2\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2,-3\mathbf{v}_2+2\mathbf{v}_3,-\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3\}$ lo es.

Solución. De la misma manera que antes, planteamos una combinación lineal de los vectores igualada al vector nulo, al que llamaremos simplemente O:

$$a(2\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)+b(-3\mathbf{v}_2+2\mathbf{v}_3)+c(-\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3)=O.$$

Las propiedades de la suma y el producto por escalares del espacio vectorial $\mathbb{V}$ nos permiten reescribir el lado izquierdo de esta igualdad como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$:

$$\begin{array}{rcll} 2a\mathbf{v}_1+a\mathbf{v}_2-3b\mathbf{v}_2+2b\mathbf{v}_3-c\mathbf{v}_1+c\mathbf{v}_2-c\mathbf{v}_3 & = & O & \text{EV7 y EV9} \\ 2a\mathbf{v}_1-c\mathbf{v}_1+a\mathbf{v}_2-3b\mathbf{v}_2+c\mathbf{v}_2+2b\mathbf{v}_3-c\mathbf{v}_3 & = & O & \text{EV6} \\ (2a-c)\mathbf{v}_1+(a-3b+c)\mathbf{v}_2+(2b-c)\mathbf{v}_3 & = & O & \text{EV8} \end{array}$$

Como tenemos una combinación lineal de $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ que da O y estos vectores son linealmente independientes, cada uno de los escalares involucrados debe ser 0. Entonces:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & & & - & c & = & 0, \\ a & - & 3b & + & c & = & 0, \\ & & 2b & - & c & = & 0. \end{array}\right.$$

Notemos que a, b y c son los coeficientes de la combinación lineal que planteamos en primer lugar. Llegamos a que deben ser soluciones de un sistema lineal homogéneo. Entonces nos queda determinar si este sistema admite una única solución o infinitas. Para eso planteamos la matriz y escalonamos.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \; 2F_2 - F_1 \to F_2 \; \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \; 3F_3 + F_2 \to F_3 \; \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Como el sistema es compatible indeterminado, los vectores son linealmente dependientes.

Respuesta: $\{2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, -3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3, -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3\}$ es linealmente dependiente.

4.4. Bases y dimensión

Como comentamos al comienzo de la sección anterior, de los distintos conjuntos de generadores que puede tener un espacio vectorial, estamos interesados en buscar aquellos que tengan la menor cantidad de vectores que sea posible. La independencia lineal es la propiedad que nos asegurará esta buena característica en un conjunto de generadores.

Bases de un espacio vectorial

Un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una *base* de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ si es linealmente independiente y genera $\mathbb{V}$.

Una base es un conjunto de generadores en el que no “sobra” ninguno.
Por ejemplo $\{(1, -1, 2)\}$ es una base de $\langle(1, -1, 2)\rangle$, pues lo genera y es linealmente independiente. En cambio, $\{(1, -1, 2), (2, -2, 4)\}$ no es una base, porque si bien genera el subespacio no es linealmente independiente.

Un mismo espacio vectorial puede tener muchas (infinitas) bases distintas, pero todas tienen la misma cantidad de vectores.

Dimensión de un espacio vectorial

Llamamos *dimensión* de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ a la cantidad de vectores que forman una base de $\mathbb{V}$. Escribimos $\dim(\mathbb{V})$ para referirnos a la dimensión de $\mathbb{V}$.

Por ejemplo, la recta $\langle(1, -1, 2)\rangle$ tienen dimensión 1 ya que $\{(1, -1, 2)\}$ es una base y está formada por un vector.
Si queremos calcular la dimensión del plano $\mathbb{S} = \langle(1, 1, 0), (1, 2, 3)\rangle$ tenemos que dar una base. Los vectores $(1, 1, 0)$ y $(1, 2, 3)$ lo generan y además son linealmente independientes (como son sólo dos podemos saberlo porque no son múltiplos). Entonces $\{(1, 1, 0), (1, 2, 3)\}$ es una base de $\mathbb{S}$. Por lo tanto, $\dim(\mathbb{S}) = 2$.

¿Es la única base posible? No, cualquier otro par de vectores linealmente independientes que estén en $\mathbb{S}$ formarán una base. Por ejemplo, podemos tomar $\{(1,1,0),(2,3,3)\}$. Lo que nunca podremos conseguir es una base de $\mathbb{S}$ que no tenga 2 vectores.

Consideremos ahora $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$. Para obtener la dimensión de $\mathbb{V}$, tenemos que dar una base. Hay una forma muy fácil de hacerlo. Tomemos

$$E = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

Veamos que E es una base de $\mathbb{R}^3$. Verifiquemos que $\mathbb{R}^3 = \langle(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\rangle$, es decir, que todo vector de $\mathbb{R}^3$ es combinación lineal de los vectores de E. Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ es fácil encontrar la combinación lineal, ya que

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

Falta ver que $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es linealmente independiente. Si planteamos

$$a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = (0,0,0),$$

igualando coordenadas tenemos que

$$\begin{cases} a = 0, \\ b = 0, \\ c = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, E es linealmente independiente. En consecuencia, E es una base de $\mathbb{R}^3$ y, entonces, $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Esta base se llama la base *canónica* de $\mathbb{R}^3$.

Observación: Podemos construir bases similares para $\mathbb{R}^n$, para cualquier n. Por ejemplo, $E_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ y $E_4 = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ son las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente. Por lo tanto, $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Similarmente podemos hallar bases para $\mathbb{R}^{m\times n}$, para $m,n \in \mathbb{N}$, y calcular su dimensión. Por ejemplo:

- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$,
- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{R}^{2\times 3}$.

De este modo deducimos que $\dim(\mathbb{R}^{m\times n}) = mn$.

Ejemplo 1. Hallar una base y la dimensión del subespacio

$$\mathbb{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

Solución: El primer paso es buscar generadores de $\mathbb{H}$. Si despejamos de la ecuación de $\mathbb{H}$, por ejemplo,

$$x_1 = -x_2 - x_3 - x_4,$$

llegamos a que un vector general de $\mathbb{H}$ es de la forma $(-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4)$ con x_2, x_3 y $x_4 \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\mathbb{H} = \langle(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\rangle.$$

Veamos si el conjunto de generadores que hallamos {(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)} es linealmente independiente. Planteamos:

$$a(-1,1,0,0) + b(-1,0,1,0) + c(-1,0,0,1) = (0,0,0,0),$$

que nos lleva al sistema de matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

De las filas 2, 3 y 4, vemos claramente que es un sistema compatible determinado y, por lo tanto, $\{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$ es linealmente independiente. Concluimos que:

$\boxed{\text{Respuesta: } \{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\} \text{ es una base de } H \text{ y } \dim(\mathbb{H}) = 3.}$

Observemos que los tres vectores de la base vienen de las tres variables libres que teníamos (x_2, x_3 y x_4). Esto nos da una pauta de cuál es la dimensión de $\mathbb{H}$ antes de encontrar la base.

Propiedad

Si $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = 0\}$ entonces $\dim(\mathbb{S}) = n - \text{rg}(A)$.

Recordar que $\text{rg}(A)$, el rango de A, es la cantidad de filas no nulas de una matriz escalonada obtenida a partir de A.

Ejemplo 2. Sea $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 + 2x_4 = 0; x_1 + 3x_2 + x_3 = 0; 3x_2 - 2x_4 = 0\}$. Calcular la dimensión y dar una base de $\mathbb{S}$.

Solución: La matriz asociada a las ecuaciones de $\mathbb{S}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Para calcular la dimensión de $\mathbb{S}$, escalonamos A y calculamos su rango:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} F_2 - F_1 \to F_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} F_3 - F_2 \to F_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos que el rango de A es 2. Entonces, $\dim(\mathbb{S}) = 4 - 2 = 2$.
Conocer la dimensión de un subespacio de antemano es muy útil para calcular una base. En este caso, como ya sabemos que la dimensión de $\mathbb{S}$ es 2, sólo necesitamos encontrar dos vectores que generen a $\mathbb{S}$. Estos vectores serán linealmente independientes porque si no, la dimensión de $\mathbb{S}$ sería menor que 2. Para esto resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_2 \quad - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Tenemos que

$$x_2 = \frac{2}{3}x_4, \quad x_1 = -x_3 - 2x_4.$$

Así, un vector de $\mathbb{S}$ tiene la forma $(-x_3 - 2x_4, \frac{2}{3}x_4, x_3, x_4) = x_3(-1,0,1,0) + x_4(-2, \frac{2}{3}, 0, 1)$, con $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\mathbb{S} = \langle (-1,0,1,0), (-2, \frac{2}{3}, 0, 1) \rangle.$$

Como ya sabemos que $\mathbb{S}$ tiene dimensión 2, concluimos que $B = \{(-1,0,1,0), (-2, \frac{2}{3}, 0, 1)\}$ es una base de $\mathbb{S}$.

Respuesta: $\dim(\mathbb{S}) = 2$ y $\{(-1,0,1,0), (-2, \frac{2}{3}, 0, 1)\}$ es una base de $\mathbb{S}$.

Propiedad

Si $\dim(\mathbb{V}) = n$, para ver que n vectores de $\mathbb{V}$ forman una base sólo hace falta verificar una de las dos condiciones: que son linealmente independientes o que generan $\mathbb{V}$.

Ejemplo 3. Sea $\mathbb{H} = \langle (-1,1,0,0), (-1,0,1,0), (-1,0,0,1) \rangle$. Hallar una base de $\mathbb{H}$ formada por vectores cuyas coordenadas sean todas distintas de 0.

Solución: Ya trabajamos con este subespacio en el Ejemplo 1 de esta sección y vimos que el conjunto de vectores $\{(-1,1,0,0), (-1,0,1,0), (-1,0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{H}$. Esta base, claramente, no cumple lo pedido. Como $\dim(\mathbb{H}) = 3$, para formar otra base necesitamos 3 vectores de $\mathbb{H}$ que sean linealmente independientes. Además, necesitamos que esos vectores no tengan ninguna coordenada igual a 0.
Para formar vectores de $\mathbb{H}$ tomamos combinaciones lineales de los generadores. Podemos considerar, por ejemplo:

$$\begin{aligned} (-1,1,0,0) + (-1,0,1,0) + (-1,0,0,1) &= (-3,1,1,1), \\ (-1,1,0,0) + (-1,0,1,0) - (-1,0,0,1) &= (-1,1,1,-1), \\ (-1,1,0,0) + 2(-1,0,1,0) - (-1,0,0,1) &= (-2,1,2,-1). \end{aligned}$$

Estos tres vectores pertenecen a $\mathbb{H}$. Para que formen una base, deben ser linealmente independientes. Planteamos

$$a(-3,1,1,1) + b(-1,1,1,-1) + c(-2,1,2,-1) = (0,0,0,0),$$

que nos lleva al sistema

$$\begin{cases} -3a - \ b - 2c &= 0, \\ a + \ b + \ c &= 0, \\ a + \ b + 2c &= 0, \\ a - \ b - \ c &= 0. \end{cases}$$

Escalonamos:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} 3F_2 + F_1 \to F_2 \\ 3F_3 + F_1 \to F_3 \\ 3F_4 + F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} F_3 - F_2 \to F_3 \\ F_4 + 2F_2 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) F_4 + F_3 \to F_4 \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como el sistema es compatible determinado el conjunto de vectores es linealmente independiente y, por lo tanto, es una base de $\mathbb{H}$.

Respuesta: $B = \{(-3,1,1,1), (-1,1,1,-1), (-2,1,2,-1)\}$ es una base $\mathbb{H}$ con vectores sin coordenadas iguales a 0.

Observación: Podríamos haber formado otras combinaciones lineales distintas. Hay infinitas bases de $\mathbb{H}$ que tienen la forma pedida.

4.5. Extracción y extensión de bases

Dado un conjunto C de vectores en un subespacio $\mathbb{S}$ de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, *extraer* de C una base de $\mathbb{S}$ significa encontrar un subconjunto de C que sea una base de $\mathbb{S}$, es decir, que genere el subespacio $\mathbb{S}$ y sea linealmente independiente.
Para poder hacer esto, es necesario que C sea un conjunto de generadores de $\mathbb{S}$; de lo contrario, ningún subconjunto de C podrá generar $\mathbb{S}$.

Ejemplo 1. Dado el subespacio $\mathbb{S} = \langle(-1,1,2), (1,2,1), (-1,4,5)\rangle$ de $\mathbb{R}^3$, extraer del conjunto $C = \{(-1,1,2), (1,2,1), (-1,4,5)\}$ una base de $\mathbb{S}$.

Solución: Observar que C es un conjunto de generadores de $\mathbb{S}$. Podemos ver que C no es un conjunto linealmente independiente:

$$a(-1,1,2) + b(1,2,1) + c(-1,4,5) = (0,0,0)$$

$$\iff \begin{cases} -a + b - c = 0 \\ a + 2b + 4c = 0 \\ 2a + b + 5c = 0 \end{cases} \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

Escalonamos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 + F_1 \to F_2 \\ F_3 + 2F_1 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) F_3 - F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y vemos que el sistema es compatible indeterminado. El conjunto C, entonces, no es una base de $\mathbb{S}$.
Para extraer una base tenemos que quitar elementos de C.
Volvamos a la última matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sabemos que si les damos valores a las incógnitas que corresponden a las columnas donde *no* están los lugares principales de la matriz (en este caso, a la incógnita c), podemos despejar los valores de las restantes y hallar una solución del sistema. Por ejemplo, si $c = 1$, de la segunda ecuación obtenemos $b = -1$ y, reemplazando estos valores en la primera ecuación, despejamos $a = -2$. La solución del sistema que obtuvimos nos da una combinación lineal

$$(-2)(-1,1,2) + (-1)(1,2,1) + 1(-1,4,5) = (0,0,0)$$

que permite despejar el vector $(-1,4,5)$, que es el que está multiplicado por el coeficiente al que le dimos el valor $c = 1$, en términos de los otros dos (esto podremos hacerlo siempre, independientemente de cuáles sean los valores de a y b obtenidos en la solución con $c = 1$; en este caso, como a y b no son 0, también podríamos despejar cualquiera de los otros dos vectores):

$$(-1,4,5) = 2(-1,1,2) + 1.(1,2,1).$$

Esto significa que

$$(-1,4,5) \in \langle(-1,1,2),(1,2,1)\rangle\,.$$

Recordando que $\langle(-1,1,2),(1,2,1),(-1,4,5)\rangle$ es el menor subespacio que contiene a los vectores de $C = \{(-1,1,2),(1,2,1),(-1,4,5)\}$, resulta que

$$\mathbb{S} = \langle(-1,1,2),(1,2,1),(-1,4,5)\rangle \subset \langle(-1,1,2),(1,2,1)\rangle\,,$$

y como también vale que

$$\langle(-1,1,2),(1,2,1)\rangle \subset \langle(-1,1,2),(1,2,1),(-1,4,5)\rangle = \mathbb{S},$$

concluimos que $C' = \{(-1,1,2),(1,2,1)\}$ genera $\mathbb{S}$.
Para ver si C' es un conjunto linealmente independiente planteamos

$$a(-1,1,2) + b(1,2,1) = (0,0,0) \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} -a & + & b & = & 0 \\ a & + & 2b & = & 0 \\ 2a & + & b & = & 0 \end{array}\right. \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Si usamos los mismos pasos para escalonar que en el sistema para los vectores de C, obtenemos

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2+F_1 \to F_2 \\ F_3+2F_1 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right) F_3-F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible determinado y, por lo tanto, el conjunto $C' = \{(-1,1,2),(1,2,1)\}$ es linealmente independiente.
En resumen, C' genera $\mathbb{S}$ y es linealmente independiente; entonces, C' es una base de $\mathbb{S}$.

Respuesta: El conjunto $\{(-1,1,2),(1,2,1)\}$ es una base de $\mathbb{S} = \langle(-1,1,2),(1,2,1),(-1,4,5)\rangle$.

Observación: El último sistema que escalonamos equivale a ignorar al tercer vector (el que quitamos) en el planteo para el análisis de la independencia lineal de C:

$$a(-1,1,2)+b(1,2,1)+c(-1,4,5) = (0,0,0) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -a & + & b & - & c & = & 0 \\ a & + & 2b & + & 4c & = & 0 \\ 2a & + & b & + & 5c & = & 0 \end{array}\right.$$

Como usamos los mismos pasos para escalonar en ambos casos, obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2+F_1 \to F_2 \\ F_3+2F_1 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) F_3-F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ignorando la tercera columna conseguimos el sistema compatible determinado que nos mostró que C' es una base de $\mathbb{S}$.
Además, la matriz del sistema para el problema de la independencia lineal planteado con C' tiene el mismo rango que la matriz del sistema para el problema planteado con C.

Esto sugiere una forma más rápida de extraer una base a partir de un conjunto de generadores:

Ejemplo 2. Dado el conjunto $C = \{(1,2,1,-1),(-2,1,3,1),(0,5,5,-1),(1,-1,1,-1)\}$, extraer una base del subespacio $\mathbb{S}$ generado por C.

Solución: Ya sabemos que C genera $\mathbb{S}$. Veamos si es un conjunto linealmente independiente:

$$a(1,2,1,-1)+b(-2,1,3,1)+c(0,5,5,-1)+d(1,-1,1,-1) = (0,0,0,0)$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & - & 2b & & & + & d & = & 0 \\ 2a & + & b & + & 5c & - & d & = & 0 \\ a & + & 3b & + & 5c & + & d & = & 0 \\ -a & + & b & - & c & - & d & = & 0 \end{array}\right. \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \\ F_4 + F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_3 - F_2 \to F_3 \\ 5F_4 + F_2 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) F_4 + F_3 \to F_4 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Obtenemos un sistema compatible indeterminado y, por lo tanto, el conjunto C es linealmente dependiente.

Notar que la última ecuación no nula, $3d = 0$, nos dice que, aunque el sistema tiene soluciones no triviales que relacionan a los vectores, en todas ellas el valor de d es *cero*. Esto significa que en realidad las relaciones existentes involucran a los otros vectores pero no a $(1, -1, 1, -1)$, que es el vector asociado a la incógnita d en la combinación lineal. El vector $(1, -1, 1, -1)$ ***no es*** una combinación lineal de los otros y si lo quitamos, el subespacio generado se achica.

Como en el ejemplo anterior, si consideramos las columnas que contienen a los lugares principales de la matriz (es decir, los primeros elementos distintos de 0 de cada fila)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

se forma un sistema compatible determinado. Por lo tanto, los vectores asociados a esas columnas forman un subconjunto $C' = \{(1, 2, 1, -1), (-2, 1, 3, 1), (1, -1, 1, -1)\}$ de C que es linealmente independiente.
Para ver que el vector $(0, 5, 5, -1)$ que suprimimos es combinación lineal de C', podemos hallar una solución no trivial del sistema con $c = 1$ despejando las demás incógnitas a partir de las ecuaciones del sistema escalonado: $d = 0$, $b = -1$ y $a = -2$. Obtenemos:

$$(-2)(1, 2, 1, -1) + (-1)(-2, 1, 3, 1) + 1\,(0, 5, 5, -1) + 0(1, -1, 1, -1) = (0, 0, 0, 0)$$

De esta combinación lineal con $c = 1$, despejamos el vector en función de los de C':

$$(0, 5, 5, -1) = 2(1, 2, 1, -1) + (-2, 1, 3, 1).$$

Entonces, $(0, 5, 5, -1) \in \langle (1, 2, 1, -1), (-2, 1, 3, 1), (1, -1, 1, -1) \rangle$.
Con el mismo razonamiento que en el ejemplo anterior, deducimos que C' genera el mismo subespacio que C.

Respuesta: $\{(1, 2, 1, -1), (-2, 1, 3, 1), (1, -1, 1, -1)\}$ es una base de $\mathbb{S}$ extraída de C.

Si M es la matriz del sistema planteado al analizar la independencia lineal de un conjunto C de generadores del subespacio $\mathbb{S}$, el subconjunto B de C formado por los vectores correspondientes a las columnas que contienen a los *lugares principales* de una matriz escalonada obtenida a partir de M es una base de $\mathbb{S}$.
La dimensión del subespacio $\mathbb{S}$ es el rango de la matriz M.

La base obtenida a partir de las columnas correspondientes a los lugares principales de la matriz escalonada, en general no es la única base que podemos extraer de C. Por ejemplo, en el caso anterior podemos elegir también las columnas 1, 3 y 4,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Podemos ver que estas columnas dan lugar a un sistema compatible determinado. Esto nos muestra que el conjunto $\{(1,2,1,-1),(0,5,5,-1),(1,-1,1,-1)\}$ es linealmente independiente y, como $\dim(\mathbb{S}) = 3$, es una base de $\mathbb{S}$.
Si elegimos las columnas 2, 3 y 4,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

la matriz aún no está escalonada. Para determinar si los vectores correspondientes forman una base de $\mathbb{S}$ tendríamos que escalonarla y ver si el sistema es compatible determinado para asegurar, como en el caso anterior, la independencia lineal de los vectores.

Ejemplo 3. Extraer de $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ si es posible, dos bases del subespacio $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que genera.

Solución. Como antes, vamos a analizar la independencia lineal de C y, a partir de este planteo, determinar subconjuntos de C que sean bases del subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que genera:

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} a & & & - & c & + & d & & & = & 0 \\ & & b & + & c & & & + & e & = & 0 \\ & & b & + & c & & & + & e & = & 0 \\ -a & & & + & c & & & + & e & = & 0 \end{array}\right. \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Escalonamos:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_3 - F_2 \to F_3 \\ F_4 + F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_3 \leftrightarrow F_4 \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Los lugares principales de la matriz escalonada están en las columnas 1, 2 y 4:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Como consecuencia, las matrices 1, 2 y 4 del conjunto C forman una base del subespacio $\mathbb{S}$: $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Entonces, $\dim(\mathbb{S}) = 3$.

Para obtener otra base de $\mathbb{S}$, basta elegir otras 3 columnas que den lugar a una matriz de rango 3. Por ejemplo, vemos que las columnas 1, 3 y 5 forman una matriz escalonada de rango 3

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

y, por lo tanto, los elementos correspondientes del conjunto C son linealmente independientes. Deducimos que $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es otra base de $\mathbb{S}$.

Respuesta:
$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
son dos bases de $\mathbb{S}$ extraídas de C.

Ejemplo 4. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ y sea $C = \{2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, -3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3, -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3\}$. Extraer de C, si es posible, dos bases distintas del subespacio $\mathbb{S} = \langle 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, -3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3, -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 \rangle$.

Solución: Notar que C es un conjunto de generadores de $\mathbb{S}$. Veamos si C es linealmente independiente

$$a(2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + b(-3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3) + c(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) = O$$

Usando propiedades de los espacios vectoriales desarrollamos

$$2a\mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_2 - 3b\mathbf{v}_2 + 2b\mathbf{v}_3 - c\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2 - c\mathbf{v}_3 = O$$

y reagrupamos:

$$(2a - c)\mathbf{v}_1 + (a - 3b + c)\mathbf{v}_2 + (2b - c)\mathbf{v}_3 = O$$

Como $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{V}$, el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente independiente, es decir, si para $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = O$$

entonces, necesariamente, debe valer

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

Esto nos conduce al sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & & & - & c & = & 0 \\ a & - & 3b & + & c & = & 0 \\ & & 2b & - & c & = & 0 \end{array}\right. \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Escalonamos

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) 2F_2 - F_1 \to F_2 \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) 3F_3 + F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eligiendo las columnas 1 y 2, que contienen a los lugares principales de la matriz,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

tenemos que $B_1 = \{2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, -3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{S}$ y $\dim(\mathbb{S}) = 2$.
Seleccionando las columnas 1 y 3,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

obtenemos también una matriz de rango 2, con lo cual $B_2 = \{2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3\}$ es otra base de $\mathbb{S}$.

Respuesta: $B_1 = \{2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, -3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3\}$ y $B_2 = \{2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3\}$ son bases de $\mathbb{S}$ extraídas de C.

Ejemplo 5. Sean $\mathbb{S} = \langle (2,2,2,2), (1,3,0,2) \rangle$ y $\mathbb{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$. Hallar, si es posible, una base de $\mathbb{H}$ que contenga una base de $\mathbb{S}$.

Solución: Como los vectores de una base pertenecen al subespacio que generan, si queremos que una base de $\mathbb{S}$ sea parte de una base de $\mathbb{H}$, necesitamos que los vectores de la base de $\mathbb{S}$ pertenezcan a $\mathbb{H}$ y, por lo tanto, el subespacio $\mathbb{S}$ debe estar contenido en $\mathbb{H}$.
Podemos verificar que esto ocurre viendo que los generadores de $\mathbb{S}$ cumplen la ecuación de $\mathbb{H}$:

$(2,2,2,2) \in \mathbb{H}: \quad -3 \cdot 2 + 2 + 2 \cdot 2 = 0$

$(1,3,0,2) \in \mathbb{H}: \quad -3 \cdot 1 + 3 + 2 \cdot 0 = 0$

Entonces $\mathbb{S} \subset \mathbb{H}$.

Para obtener una base de $\mathbb{S}$ podemos extraerla del conjunto de sus generadores. Como ***solo son dos y no nulos***, para ver que forman un conjunto linealmente independiente alcanza con ver que no son múltiplos: si $k \in \mathbb{R}$ cumple $(2,2,2,2) = k(1,3,0,2)$, tenemos el absurdo $2 = 0$ en la tercera coordenada. Tenemos entonces que $B_{\mathbb{S}} = \{(2,2,2,2),(1,3,0,2)\}$ es una base de $\mathbb{S}$ y $\dim(\mathbb{S}) = 2$.

Podemos encontrar una base de $\mathbb{H}$ resolviendo la ecuación que lo describe pero difícilmente encontremos entre los generadores a los vectores de $B_{\mathbb{S}}$.
Lo que haremos para resolver el problema planteado es *extender* la base $B_{\mathbb{S}}$ a una base de $\mathbb{H}$, esto es, agregar vectores de $\mathbb{H}$ hasta alcanzar un conjunto linealmente independiente con una cantidad de vectores igual a la dimensión de $\mathbb{H}$.
Para saber cuántos vectores necesitamos agregar, calculamos la dimensión de $\mathbb{H}$. Al ser un subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por ecuaciones vale: $\dim(\mathbb{H}) = 4 - \mathrm{rg}(A)$, donde $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada al sistema (en este caso, una ecuación no nula) que define a $\mathbb{H}$. Como $\mathrm{rg}(A) = 1$ tenemos que $\dim(\mathbb{H}) = 3$.

Entonces, para extender la base $B_{\mathbb{S}}$ a una base de $\mathbb{H}$ necesitamos agregar un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{H}$ tal que el conjunto $B = \{(2,2,2,2),(1,3,0,2),\mathbf{v}\}$ sea linealmente independiente.
Tomando los valores $x_1 = 1, x_3 = 1, x_4 = 2$, de la ecuación de $\mathbb{H}$ podemos despejar $x_2 = 1$, que nos da la solución $(1,1,1,2)$.

Verificación $(1,1,1,2) \in \mathbb{H}$: $\quad -3 \cdot 1 + 1 + 2 \cdot 1 = 0$.

Para ver si nos queda un conjunto linealmente independiente planteamos

$$a(2,2,2,2) + b(1,3,0,2) + c(1,1,1,2) = (0,0,0,0)$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2a & + & b & + & c & = & 0 \\ 2a & + & 3b & + & c & = & 0 \\ 2a & & & + & c & = & 0 \\ 2a & + & 2b & + & 2c & = & 0 \end{array} \right. \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{c} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \\ F_4 - F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} 2F_3 + F_2 \to F_3 \\ 2F_4 - F_2 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) F_3 \leftrightarrow F_4 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Como el sistema es compatible determinado, el conjunto es linealmente independiente.

Respuesta: $B = \{(2,2,2,2),(1,3,0,2),(1,1,1,2)\}$ es una base del subespacio $\mathbb{H}$ que contiene a $B_{\mathbb{S}} = \{(2,2,2,2),(1,3,0,2)\}$, que es una base de $\mathbb{S}$.

Para poder extender un conjunto a una base de un subespacio hay que partir de un conjunto linealmente independiente que esté contenido en el subespacio.
El problema de extender una base de un subespacio $\mathbb{S}$ a una base de un subespacio $\mathbb{H}$ tiene solución si y solo si $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{H}$.

En el ejemplo, para extender una base $B_{\mathbb{S}}$ de $\mathbb{S}$ a una base de $\mathbb{H}$, elegimos un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{H}$ arbitrario que resultó formar un conjunto linealmente independiente junto con los de $B_{\mathbb{S}}$. Pero podría haber resultado un conjunto linealmente dependiente.
En forma más general podemos agregar una base completa de $\mathbb{H}$ al conjunto $B_{\mathbb{S}}$ y de ahí extraer la base que necesitamos. Hagamos esto en el ejemplo.

En primer lugar, buscamos una base de $\mathbb{H}$. Despejando x_2 en la ecuación de $\mathbb{H}$ para escribir en forma paramétrica las soluciones, obtenemos la base $B_{\mathbb{H}} = \{(1,3,0,0),(0,-2,1,0),(0,0,0,1)\}$. Ahora, del conjunto $C = B_{\mathbb{S}} \cup B_{\mathbb{H}} = \{(2,2,2,2),(1,3,0,2),(1,3,0,0),(0,-2,1,0),(0,0,0,1)\}$ extraemos una base, tomando la precaución de dejar en ella los vectores de $B_{\mathbb{S}}$ (observamos que siempre podremos hacer esto debido a que los vectores de $B_{\mathbb{S}}$ son linealmente independientes):

$$a(2,2,2,2) + b(1,3,0,2) + c(1,3,0,0) + d(0,-2,1,0) + e(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$$

$$\iff \begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ 2a + 3b + 3c - 2d = 0 \\ 2a + d = 0 \\ 2a + 2b + e = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \\ F_4 - F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} 2F_3 + F_2 \to F_3 \\ 2F_4 - F_2 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) F_3 \leftrightarrow F_4 \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Para extraer de C una base que contenga a $B_{\mathbb{S}}$ usamos las dos primeras columnas y una de las otras tres (en este caso, con cualquiera de las tres se obtiene una matriz de rango $\dim(\mathbb{H}) = 3$); por ejemplo, las columnas correspondientes a los lugares principales:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces, $\{(2,2,2,2),(1,3,0,2),(1,3,0,0)\}$ es otra base de $\mathbb{H}$ que contiene una base de $\mathbb{S}$.

Ejemplo 6. Extender, si es posible, el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ a una base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Solución: El conjunto $C_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente independiente, ya que tiene sólo dos elementos y no son uno múltiplo del otro. Esto nos asegura que podemos extenderlo a una base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
Como $\dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4$, para conseguir una base debemos agregar 2 elementos a C_0 de modo que el nuevo conjunto de 4 elementos continúe siendo linealmente independiente. Para hacer esto, podemos probar con cualquier matriz de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, pero podría resultar un conjunto linealmente dependiente y tendríamos que volver a empezar eligiendo otra matriz, con la que nos podría pasar lo mismo, y así sucesivamente.
Una manera sistemática de resolver el problema es agregar elementos de una *base* de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, por ejemplo, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
Veamos si al agregar a C_0 el primer elemento de B nos queda un conjunto linealmente independiente:

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{ccc} a+b+c & = & 0 \\ b & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ -a & = & 0 \end{array} \right.$$

La única solución del sistema es $a = 0$, $b = 0$ y $c = 0$. Por lo tanto,
$C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente independiente.
Ahora veamos si al agregar a C_1 el segundo elemento de B nos queda un conjunto linealmente independiente:

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{ccc} a+b+c & = & 0 \\ b+d & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ -a & = & 0 \end{array} \right.$$

Las soluciones de este sistema son $b(0, 1, -1, -1)$ con $b \in \mathbb{R}$; es decir, tiene solución no trivial y, por lo tanto, el conjunto es linealmente dependiente. Esto significa que **no** podemos agregar $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ al conjunto C_1 (y, además, que esta matriz pertenece al subespacio generado por C_1).
Analizamos entonces si al agregar a C_1 el tercer elemento de B resulta un conjunto linealmente independiente:

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{ccc} a+b+c & = & 0 \\ b & = & 0 \\ d & = & 0 \\ -a & = & 0 \end{array} \right.$$

Como la única solución del sistema es $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$, el conjunto
$C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente independiente.

Respuesta: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que extiende al conjunto dado.

Ejemplo 7. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ una base de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ y sea $\mathbb{S}$ el subespacio $\mathbb{S} = \langle \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4 \rangle$. Hallar una base de $\mathbb{S}$ y extenderla a una base de $\mathbb{V}$.

Solución: Veamos si los generadores de $\mathbb{S}$ nos sirven como base, es decir, si son linealmente independientes. Planteamos:

$$a(\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_4) + b(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + c(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4) = O$$

que reagrupando queda

$$(b + c)\mathbf{v}_1 + (a + b)\mathbf{v}_2 + (-b - c)\mathbf{v}_3 + (-2a + 2c)\mathbf{v}_4 = O$$

Como $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es linealmente independiente por ser una base de $\mathbb{V}$, la única posibilidad para que esto ocurra es

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & b & + & c & = & 0 \\ a & + & b & & & = & 0 \\ & - & b & - & c & = & 0 \\ -2a & & & + & 2c & = & 0 \end{array} \right. \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$F_1 \leftrightarrow F_2 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} F_3 + F_2 \to F_3 \\ F_4 + 2F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) F_4 - 2F_2 \to F_4 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Entonces $B_{\mathbb{S}} = \{\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{S}$.
Para extenderla a una base de $\mathbb{V}$ podemos agregar toda la base B y luego extraer una base:
$C = B_{\mathbb{S}} \cup B = \{\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$

$$\begin{aligned} & a(\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_4) + b(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2 + e\mathbf{v}_3 + f\mathbf{v}_4 = O \\ \iff & (b + c)\mathbf{v}_1 + (a + b + d)\mathbf{v}_2 + (-b + e)\mathbf{v}_3 + (-2a + f)\mathbf{v}_4 = O \end{aligned}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} & & b & + & c & & & & & & & = & 0 \\ a & + & b & & & + & d & & & & & = & 0 \\ & - & b & & & & & + & e & & & = & 0 \\ -2a & & & & & & & & & + & f & = & 0 \end{array} \right. \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrrrr|r} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$F_1 \leftrightarrow F_2 \left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} F_3 + F_2 \to F_3 \\ F_4 + 2F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$F_4 - 2F_2 \to F_4 \left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) F_4 + 2F_3 \to F_4 \left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Respuesta: $B' = \{\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base de $\mathbb{V}$ que contiene una base de $\mathbb{S}$.

Observación: En este ejemplo, $\dim(\mathbb{S}) = 2$ y $\dim(\mathbb{V}) = 4$. Hay muchos pares de vectores de $\mathbb{V}$ que sirven para extender la base $B_{\mathbb{S}}$ a una base de todo el espacio vectorial (no solo las opciones que surgen al agregar vectores de la base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, como en la solución anterior). Podríamos haber elegido dos vectores cualesquiera de $\mathbb{V}$ (combinaciones lineales de los vectores de B) para agregar y, si nos aseguramos que junto con los de $B_{\mathbb{S}}$ queda un conjunto linealmente independiente, tendremos una base de $\mathbb{V}$.

Ejemplo 8. Dados los subespacios $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0\}$ y $\mathbb{T} = \langle(3,3,-1),(1,-2,1),(-1,-7,3)\rangle$, decidir si $\mathbb{S} = \mathbb{T}$.

Solución: Podemos verificar que $\mathbb{T} \subset \mathbb{S}$ viendo que cada uno de los vectores del conjunto de generadores de $\mathbb{T}$ cumple la ecuación de $\mathbb{S}$:

$(3,3,-1) \in \mathbb{S}$: $\quad 3 - 4 \cdot 3 - 9(-1) = 0$

$(1,-2,1) \in \mathbb{S}$: $\quad 1 - 4(-2) - 9 \cdot 1 = 0$

$(-1,-7,3) \in \mathbb{S}$: $\quad -1 - 4(-7) - 9 \cdot 3 = 0$

Notar que, como $\mathbb{T} \subset \mathbb{S}$, se cumple $\dim(\mathbb{T}) \leq \dim(\mathbb{S})$.
Como $\mathbb{S}$ está definido en $\mathbb{R}^3$ por una ecuación de matriz $A = (1 \quad -4 \quad -9)$, entonces $\dim(\mathbb{S}) = 3 - \mathrm{rg}(A) = 3 - 1 = 2$, con lo cual $\dim(\mathbb{T}) \leq 2$.
Por otro lado, podemos ver que $(3,3,-1)$ y $(1,-2,1)$, que son dos de los generadores de $\mathbb{T}$, no son múltiplos: si $k \in \mathbb{R}$ cumple $(3,3,-1) = k(1,-2,1)$, entre la primera y tercera coordenada aparece la contradicción $k = 3$ y $k = -1$. Entonces, tenemos que $\dim(\mathbb{T}) \geq 2$.
Concluimos entonces que $\dim(\mathbb{T}) = 2$ y que $\{(3,3,-1),(1,-2,1)\}$ es una base de $\mathbb{T}$.
Dado que $\mathbb{T} \subset \mathbb{S}$, se puede extender una base de $\mathbb{T}$ a una base de $\mathbb{S}$; pero como $\dim(\mathbb{T}) = \dim(\mathbb{S})$, no necesitamos agregar ningún vector; por lo tanto, $\mathbb{S} = \mathbb{T}$.

Respuesta: $\mathbb{S} = \mathbb{T}$.

En general vale:

Propiedad

Si $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ son dos subespacios de un e.v. $\mathbb{V}$ que cumplen que $\mathbb{S} \subset \mathbb{T}$ y $\dim(\mathbb{S}) = \dim(\mathbb{T})$, entonces $\mathbb{S} = \mathbb{T}$.

4.6. Intersección de subespacios

Intersección de subespacios

Dado un espacio vectorial $\mathbb{V}$ y dos subespacios $\mathbb{S}, \mathbb{T} \subset \mathbb{V}$ la intersección entre $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ es:

$$\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} \ / \ \mathbf{v} \in \mathbb{S} \text{ y } \mathbf{v} \in \mathbb{T}\}.$$

Es decir, la intersección entre $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ es el conjunto formado por los vectores que pertenecen tanto a $\mathbb{S}$ como a $\mathbb{T}$.

Ejemplo 1. Dados los subespacios

$$\mathbb{S} = \langle (1,1,1,1), (-1,2,2,1) \rangle \;\text{ y }\; \mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 = 0; x_2 - x_3 = 0\},$$

hallar $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$.

Solución: Tenemos un subespacio que viene dado por generadores y otro que está dado por ecuaciones.
Si un vector pertenece a $\mathbb{S}$ sabemos que es combinación lineal de sus generadores:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S} \iff (x_1, x_2, x_3, x_4) = a(1,1,1,1) + b(-1,2,2,1), \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, las ecuaciones de $\mathbb{T}$ nos dan condiciones que tienen que cumplir las coordenadas de un vector para pertenecer al subespacio:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{T} \iff x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ y } x_2 - x_3 = 0.$$

Los vectores que pertenecen a $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ deben cumplir todas las condiciones simultáneamente, de modo de pertenecer a ambos subespacios $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$.
Para ver cuáles son estos vectores, primero escribimos las coordenadas de un vector genérico de $\mathbb{S}$,

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4) =& a(1,1,1,1) + b(-1,2,2,1)\\ (x_1, x_2, x_3, x_4) =& (a-b, a+2b, a+2b, a+b)\end{aligned}$$

y luego reemplazamos estas coordenadas en las ecuaciones de $\mathbb{T}$, para determinar qué restricciones imponen estas ecuaciones sobre los coeficientes a y b:

$$\begin{cases} a - b + a + 2b + a + 2b & = 0 \\ a + 2b - (a + 2b) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3a + 3b & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \iff a = -b.$$

Como sabemos que

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (a-b, a+2b, a+2b, a+b),$$

usando que $a = -b$, tenemos

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-b-b, -b+2b, -b+2b, -b++b) = (-2b, b, b, 0) = b(-2,1,1,0).$$

Entonces, los vectores de $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ son los de la forma $b(-2,1,1,0)$, con $b \in \mathbb{R}$. Concluimos que:

$\boxed{\text{Respuesta: } \mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \langle (-2,1,1,0) \rangle.}$

En el ejemplo, la interesección entre los subespacios $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ resultó ser, a su vez, un subespacio. Esto es siempre así:

Propiedad

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectrorial y sean $\mathbb{S}, \mathbb{T}$ dos subespacios de $\mathbb{V}$. Entonces $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

Veamos por qué es cierto esto. Para ver que la intersección entre dos subespacios $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ (acá $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ representan cualquier par de subespacios, no los del ejemplo anterior) es también un subespacio, tenemos que chequear tres propiedades:

1) $O \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$.
2) Si $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$, entonces $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$.
3) Si $\mathbf{v} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $c\mathbf{v} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$.

Hagamos la verificación de cada una:

1) Para ver que $O \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ tenemos que ver que O pertenece a ambos subespacios. Esto es cierto porque todos los subespacios tienen al vector nulo.
2) Si $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$, entonces $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{T}$. Como tanto $\mathbb{S}$ como $\mathbb{T}$ son subespacios, $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathbb{T}$; por lo tanto, $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$.
3) Si $\mathbf{v} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ y $c \in \mathbb{R}$, tenemos que $\mathbf{v} \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{T}$. Como $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ son subespacios, entonces $c\mathbf{v} \in \mathbb{S}$ y $c\mathbf{v} \in \mathbb{T}$; por lo tanto, $c\mathbf{v} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$.

Observación: En el ejemplo anterior teníamos que $\dim(\mathbb{S}) = 2$, $\dim(\mathbb{T}) = 2$ y resultó que $\dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) = 1$. Es decir que la intersección resultó ser un subespacio más "chico" que $\mathbb{S}$ y que $\mathbb{T}$. Esto tiene sentido porque $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ está incluido en ambos subespacios y no puede pasar que sea más "grande". En otras palabras, siempre se tiene que

$$\dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) \leq \dim(\mathbb{S}) \quad \text{y} \quad \dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) \leq \dim(\mathbb{T}).$$

Veamos algunos ejemplos más de cómo calcular la intersección de dos subespacios.

Ejemplo 2. Dados $\mathbb{S} = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ / \ a_{11} + a_{22} = 0\}$ y $\mathbb{T} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, hallar $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$.

Solución: Como en el ejemplo anterior, tenemos un subespacio dado por ecuaciones y otro por generadores. Buscamos las matrices $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que pertenecen simultáneamente a $\mathbb{S}$ y a $\mathbb{T}$. Las matrices que pertenecen a $\mathbb{S}$ son las que cumplen la ecuación que lo define:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{S} \iff a_{11} + a_{22} = 0.$$

Por otro lado, las que pertenecen a $\mathbb{T}$, son las combinaciones lineales de sus generadores:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{T} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a-2b & -a+b \\ 3a-b & a+b \end{pmatrix}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Reemplazamos los valores de las entradas de una matriz genérica de $\mathbb{T}$ en la ecuación de $\mathbb{S}$ para determinar bajo qué condiciones pertenece a dicho subespacio:

$$\underbrace{(a-2b)}_{a_{11}} + \underbrace{(a+b)}_{a_{22}} = 0 \iff 2a - b = 0 \iff b = 2a.$$

En definitiva, tenemos que los elementos de $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ son

$$A = \begin{pmatrix} a-2b & -a+b \\ 3a-b & a+b \end{pmatrix}, \text{ con } b = 2a \text{ y } a \in \mathbb{R},$$

que, reemplazando y haciendo las operaciones, nos quedan de la forma

$$A = \begin{pmatrix} -3a & a \\ a & 3a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ con } a \in \mathbb{R}.$$

Respuesta: $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \left\langle \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Ejemplo 3. Dados los subespacios

$$\mathbb{S} = \langle (1,1,0,1), (1,-1,1,2) \rangle \text{ y } \mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 + x_2 + x_3 = 0; x_2 - x_3 = 0\},$$

hallar $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$.

Solución: Nuevamente tenemos un subespacio dado por generadores y otro dado por ecuaciones. Procedemos como en los ejemplos anteriores.
Si un vector pertenece a $\mathbb{S}$, sabemos que es una combinación lineal de sus generadores:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S} \iff (x_1, x_2, x_3, x_4) = a(1,1,0,1) + b(1,-1,1,2), \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R},$$

es decir,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (a+b, a-b, b, a+2b).$$

Por otro lado, para pertencer a $\mathbb{T}$ debe cumplir las ecuaciones que lo definen:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{T} \iff x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ y } x_2 - x_3 = 0.$$

Entonces reemplazamos las coordenadas de un vector genérico de $\mathbb{S}$ en las ecuaciones de $\mathbb{T}$:

$$\begin{cases} a+b+a-b+b & = 0 \\ a-b-b & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a+b & = 0 \\ a-2b & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = 0 \\ b & = 0 \end{cases}$$

Como sabemos que

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (a + b, a - b, b, a + 2b),$$

con $a = 0$ y $b = 0$ obtenemos que

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0 + 0, 0 - 0, 0, 0 + 2 \cdot 0) = (0, 0, 0, 0)$$

es el único vector que pertenece simultáneamente a $\mathbb{S}$ y a $\mathbb{T}$.

Respuesta: $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

Observación: En este caso la intersección $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ está formada únicamente por el vector nulo. Esto es lo más "chica" que puede ser una intersección entre subespacios, ya que el vector nulo siempre está en cualquier subespacio.

Ejemplo 4. Dados los subespacios

$$\mathbb{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \;/\; x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\} \text{ y } \mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \;/\; x_1 + x_2 + x_3 = 0; x_2 - x_3 = 0\},$$

hallar $\mathbb{H} \cap \mathbb{T}$.

Solución: En este caso tenemos ambos subespacios dados por ecuaciones. Así,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{H} \iff x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0.$$

y, por otro lado,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{T} \iff x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ y } x_2 - x_3 = 0.$$

Por lo tanto, los vectores de la intersección $\mathbb{H} \cap \mathbb{T}$ son aquellos que cumplen las tres ecuaciones a la vez, es decir,

$$\mathbb{H} \cap \mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \;/\; x_1 + x_2 + x_3 = 0; x_2 - x_3 = 0; x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}.$$

Si queremos encontrar una base de la intersección simplemente resolvemos el sistema. Pasamos a la matriz y la escalonamos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) F_3 - F_1 \to F_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Volviendo a las ecuaciones,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Como luego de escalonar tenemos 3 ecuaciones y 4 incógnitas podemos despejar todo en función de una variable. También sabemos que la intersección tiene dimensión 1.

$$\begin{cases} x_3 &= x_4 \\ x_2 &= x_4 \\ x_1 &= -2x_4. \end{cases}$$

Un vector que pertenece a $\mathbb{H} \cap \mathbb{T}$ tiene la forma $(-2x_4, x_4, 2x_4, x_4) = x_4(-2, 1, 1, 1)$, con $x_4 \in \mathbb{R}$, por lo que $B = \{(-2, 1, 1, 1)\}$ es una base de $\mathbb{H} \cap \mathbb{T}$.

Respuesta: $\mathbb{H} \cap \mathbb{T} = \langle(-2, 1, 1, 1)\rangle$.

Ejemplo 5. Dados los subespacios

$$\mathbb{S} = \langle(1, 1, 0, 1), (1, -1, 1, 2)\rangle \text{ y } \mathbb{W} = \langle(2, 0, 1, 3), (0, 2, -1, -1), (0, 1, 1, 0)\rangle,$$

hallar $\mathbb{S} \cap \mathbb{W}$.

Solución: En este caso, ambos subespacios están dados por generadores. La forma más práctica de calcular su intersección es buscar ecuaciones para alguno de los dos y luego proceder como en los primeros ejemplos que resolvimos.
Busquemos ecuaciones para $\mathbb{W}$, es decir, qué condiciones tiene que cumplir (x_1, x_2, x_3, x_4) para ser una combinación lineal de $(2, 0, 1, 3)$, $(0, 2, -1, -1)$ y $(0, 1, 1, 0)$:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) &= \alpha(2, 0, 1, 3) + \beta(0, 2, -1, -1) + \gamma(0, 1, 1, 0) \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (2\alpha, 2\beta + \gamma, \alpha - \beta + \gamma, 3\alpha - \beta), \qquad \text{con } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Armamos el sistema,

$$\begin{cases} 2\alpha &= x_1 \\ \quad 2\beta + \gamma &= x_2 \\ \alpha - \beta + \gamma &= x_3 \\ 3\alpha - \beta &= x_4 \end{cases}$$

y analizamos bajo qué condiciones es compatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 2 & 1 & x_2 \\ 1 & -1 & 1 & x_3 \\ 3 & -1 & 0 & x_4 \end{array}\right) \begin{array}{c} 2F_3 - F_1 \to F_3 \\ 2F_4 - 3F_2 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 2 & 1 & x_2 \\ 0 & -2 & 2 & 2x_3 - x_1 \\ 0 & -2 & 0 & 2x_4 - 3x_1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_3 + F_2 \to F_3 \\ F_4 + F_2 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 2 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 3 & 2x_3 - x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2x_4 - 3x_1 + x_2 \end{array}\right)$$

$$3F_4 - F_3 \to F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 2 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 3 & 2x_3 - x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & -8x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 \end{array}\right).$$

Observamos que el sistema es compatible si y solo si $-8x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 0$, es decir,

$$\mathbb{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ / -8x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 0\}.$$

Ahora para calcular $\mathbb{S} \cap \mathbb{W}$ procedemos como antes. Primero escribimos una expresión de un vector genérico de $\mathbb{S}$:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (a + b, a - b, b, a + 2b), \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Reemplazamos en la ecuación de $\mathbb{W}$:

$$\begin{aligned} -8(a + b) + 2(a - b) - 2(b) + 6(a + 2b) &= 0, \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Obtuvimos que para cualquier valor de a y de $b \in \mathbb{R}$ un vector de la forma $(a + b, a - b, b, a + 2b)$ pertenece a $\mathbb{W}$, es decir, $\mathbb{S} \subset \mathbb{W}$. Por lo tanto,

$$\mathbb{S} \cap \mathbb{W} = \langle (1, 1, 0, 1), (1, -1, 1, 2) \rangle = \mathbb{S}.$$

$\boxed{\text{Respuesta: } \mathbb{S} \cap \mathbb{W} = \mathbb{S}.}$

4.7. Suma de subespacios

Así como la intersección de dos subespacios es un subespacio contenido en ambos, dados dos subespacios $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, vamos a contruir un subespacio de $\mathbb{V}$ más "grande" que contenga simultáneamente a $\mathbb{S}$ y a $\mathbb{T}$.
Observamos que si $\mathbb{W}$ es un subespacio al que pertenecen todos los vectores de $\mathbb{S}$ y todos los de $\mathbb{T}$, entonces también pertenecen a $\mathbb{W}$ todas las combinaciones lineales entre esos vectores; en particular, todas las sumas de vectores de $\mathbb{S}$ con vectores de $\mathbb{T}$. Esto es lo que llamamos suma de subespacios.

Suma de subespacios

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial, y sean $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ dos subespacios de $\mathbb{V}$. Definimos la *suma* de $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ como:

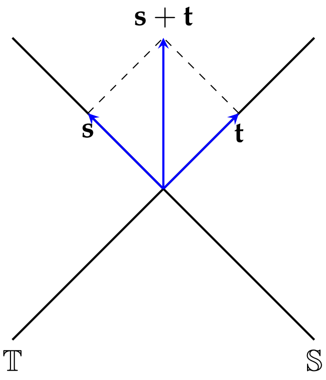
$$\mathbb{S} + \mathbb{T} = \{\mathbf{s} + \mathbf{t} \mid \mathbf{s} \in \mathbb{S} \text{ y } \mathbf{t} \in \mathbb{T}\}.$$

Es decir, la suma de $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ es el conjunto formado por todos los vectores que resultan de sumar un vector de $\mathbb{S}$ y uno de $\mathbb{T}$.

Propiedad

Si $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ son subespacios de un e.v. $\mathbb{V}$, entonces $\mathbb{S} + \mathbb{T}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$. Más aún, es el subespacio "más chico"de $\mathbb{V}$ que contiene a $\mathbb{S}$ y a $\mathbb{T}$.

Observación: Dados dos subespacios $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$, la unión $\mathbb{S} \cup \mathbb{T} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} \mid \mathbf{v} \in \mathbb{S} \text{ o } \mathbf{v} \in \mathbb{T}\}$ en general **no es** un subespacio de $\mathbb{V}$, con lo cual $\mathbb{S} + \mathbb{T} \neq \mathbb{S} \cup \mathbb{T}$.
Consideremos, por ejemplo, $\mathbb{S} = \langle(1,1)\rangle$ y $\mathbb{T} = \langle(-1,1)\rangle$ en $\mathbb{R}^2$. La unión de $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ es el conjunto de vectores que pertenecen a alguno de los dos. Entonces, $\mathbf{s} = (1,1)$ y $\mathbf{t} = (-1,1)$ pertenecen a $\mathbb{S} \cup \mathbb{T}$. Si los sumamos $(1,1) + (-1,1) = (0,2)$, obtenemos un vector que no pertenece ni a $\mathbb{S}$ ni a $\mathbb{T}$, o sea, que no pertenece a $\mathbb{S} \cup \mathbb{T}$. Por lo tanto, $\mathbb{S} \cup \mathbb{T}$ no es un subespacio.



En este caso, considerando todos los vectores que se obtienen como suma de un vector de $\mathbb{S}$ y otro de $\mathbb{T}$, podemos ver que $\mathbb{S} + \mathbb{T} = \mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1. Sean $\mathbb{S} = \langle(1,1,1,1),(0,-1,1,-2)\rangle$ y $\mathbb{T} = \langle(0,1,1,0),(1,0,2,-1)\rangle$. Hallar una base de $\mathbb{S} + \mathbb{T}$.

Solución. Un vector de $\mathbf{v} \in \mathbb{S} + \mathbb{T}$ tiene la forma:

$$\mathbf{v} = \underbrace{a(1,1,1,1) + b(0,-1,1-2)}_{\mathbf{s} \in \mathbb{S}} + \underbrace{c(0,1,1,0) + d(1,0,2,-1)}_{\mathbf{t} \in \mathbb{T}}.$$

Entonces $\mathbb{S} + \mathbb{T} = \langle(1,1,1,1),(0,-1,1,-2),(0,1,1,0),(1,0,2,-1)\rangle$. Para obtener una base, veamos si los generadores forman un conjunto linealmente independiente. Planteamos

$$a(1,1,1,1) + b(0,-1,1,-2) + c(0,1,1,0) + d(1,0,2,-1) = (0,0,0,0),$$

que nos da el sistema con matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Escalonamos,

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \\ F_4 - F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_3 + F_2 \to F_3 \\ F_4 - 2F_2 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) F_3 + F_4 \to F_4 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

y vemos que es un S.C.I. Por lo tanto, los vectores son linealmente dependientes. Observando la matriz escalonada notamos que si nos quedamos con las tres primeras columnas, resulta un S.C.D. Entonces, el conjunto $\{(1,1,1,1),(0,-1,1,-2),(0,1,1,0)\}$ de los vectores correspondientes a esas columnas es una base de $\mathbb{S}+\mathbb{T}$.

Respuesta: $B=\{(1,1,1,1),(0,-1,1,-2),(0,1,1,0)\}$ es una base de $\mathbb{S}+\mathbb{T}$.

Dados subespacios $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ de un e.v. $\mathbb{V}$, es sencillo obtener un conjunto de generadores de $\mathbb{S}+\mathbb{T}$ a partir de un conjunto de generadores de $\mathbb{S}$ y un conjunto de generadores de $\mathbb{T}$:

Generadores de la suma

Si $\mathbb{S}=\langle \mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_n\rangle$ y $\mathbb{T}=\langle \mathbf{t}_1,\ldots \mathbf{t}_m\rangle$, entonces $\mathbb{S}+\mathbb{T}=\langle \mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_n,\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_m\rangle$.

Como puede verse en el ejemplo anterior, en general el conjunto $\{\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_n,\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_m\}$ no es una base de $\mathbb{S}+\mathbb{T}$, aun cuando $\{\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_n\}$ y $\{\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_m\}$ sean bases de $\mathbb{S}$ y de $\mathbb{T}$ respectivamente.

Ejemplo 2. Dados los subespacios

$$\begin{aligned}&\mathbb{S}=\langle (1,1-2,1),(0,1,0,2)\rangle\,,\ \mathbb{T}=\langle (1,1,1,4),(1,1,-1,2)\rangle \quad \text{y}\\ &\mathbb{H}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4/x_1+2x_2+x_3-x_4=0\},\end{aligned}$$

decidir si $\mathbb{S}+\mathbb{T}=\mathbb{H}$.

Solución: A partir de los conjuntos de generadores de $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ dados, obtenemos que

$$\mathbb{S}+\mathbb{T}=\langle (1,1-2,1),(0,1,0,2),(1,1,1,4),(1,1,-1,2)\rangle\,.$$

Veamos si los generadores pertenecen a $\mathbb{H}$

$$\begin{aligned}(1,1-2,1)\in\mathbb{H}:&\quad 1+2\cdot 1+(-2)-1=0\\ (0,1,0,2)\in\mathbb{H}:&\quad 0+2\cdot 1+0-2=0\\ (1,1,1,4)\in\mathbb{H}:&\quad 1+2\cdot 1+1-4=0\\ (1,1,-1,2)\in\mathbb{H}:&\quad 1+2\cdot 1+(-1)-2=0\end{aligned}$$

Esto muestra que $\mathbb{S}+\mathbb{T}\subset\mathbb{H}$. Calculemos $\dim(\mathbb{S}+\mathbb{T})$ y $\dim(\mathbb{H})$.
Analizamos la independencia lineal de los generadores de $\mathbb{S}+\mathbb{T}$:

$$a(1,1-2,1)+b(0,1,0,2)+c(1,1,1,4)+d(1,1,-1,2)=(0,0,0,0)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & & & + & c & + & d & = & 0\\ a & + & b & + & c & + & d & = & 0\\ -2a & & & + & c & - & d & = & 0\\ a & + & 2b & + & 4c & + & 2d & = & 0\end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 + 2F_1 \to F_3 \\ F_4 - F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_4 - 2F_2 \to F_4 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) F_4 - F_3 \to F_4 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible indeterminado y la matriz tiene rango 3, con lo cual $\dim(\mathbb{S}+\mathbb{T}) = 3$. Por otro lado, como $\mathbb{H}$ está definido por una sola ecuación en $\mathbb{R}^4$, $\dim(\mathbb{H}) = \dim(\mathbb{R}^4) - 1 = 3$. En resumen, tenemos que $\mathbb{S}+\mathbb{T} \subset \mathbb{H}$ y $\dim(\mathbb{S}+\mathbb{T}) = \dim(\mathbb{H})$, de donde podemos concluir que los subespacios son iguales.

$\boxed{\text{Respuesta: } \mathbb{S}+\mathbb{T} = \mathbb{H}.}$

Observación: Si alguno de los subespacios $\mathbb{S}$ o $\mathbb{T}$ está dado por ecuaciones, podemos hallar un conjunto de generadores del subespacio y repetir lo anterior.
Si el subespacio $\mathbb{H}$ está dado por generadores resulta conveniente buscar un sistema de ecuaciones que lo defina para luego proceder como en el ejemplo.

Ejemplo 3. Dados $\mathbb{S} = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ / \ a_{11} + a_{22} = 0\}$ y $\mathbb{T} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, decidir si $\mathbb{S}+\mathbb{T} = \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Solución. Comenzamos buscando un conjunto de generadores de $\mathbb{S}+\mathbb{T}$. Para esto, primero hallaremos un conjunto de generadores de $\mathbb{S}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{S} \iff a_{11} + a_{22} = 0 \iff a_{11} = -a_{22}$$

Entonces, las matrices $A \in \mathbb{S}$ son las de la forma

$$\begin{pmatrix} -a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{22}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ con } a_{22}, a_{12}, a_{21} \in \mathbb{R},$$

y, por lo tanto, $\mathbb{S} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.
Con este conjunto de generadores de $\mathbb{S}$ y el conjunto de generadores dado de $\mathbb{T}$, tenemos un conjunto de generadores para $\mathbb{S}+\mathbb{T}$:

$$\mathbb{S}+\mathbb{T} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Para decidir si $\mathbb{S}+\mathbb{T} = \mathbb{R}^{2\times 2}$, calculemos $\dim(\mathbb{S}+\mathbb{T})$. Planteamos:

$$a\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

para extraer una base del conjunto de generadores, lo que nos conduce al sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} -a & & & + & d & - & 2e & = & 0 \\ & b & & - & d & + & e & = & 0 \\ & & c & + & 3d & - & e & = & 0 \\ a & & & + & d & + & e & = & 0 \end{array}\right. \longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Escalonamos la matriz del sistema:

$$F_4 + F_1 \to F_4 \left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Vemos que la matriz tiene rango 4 (más aún, que los primeros 4 elementos del conjunto de generadores forman una base de $\mathbb{S} + \mathbb{T}$) y, por lo tanto, $\dim(\mathbb{S} + \mathbb{T}) = 4$. Como $\mathbb{S} + \mathbb{T} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4$, concluimos que vale la igualdad.

Respuesta: $\mathbb{S} + \mathbb{T} = \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Ejemplo 4. Sean $\mathbb{S} = \langle (1,1,0,2),(3,1,1,2),(2,0,1,0)\rangle$ y $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_3 + x_4 = 0; x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\}$.

a) Hallar $\mathbb{S} + \mathbb{T}$.

b) Hallar una base de $\mathbb{S} + \mathbb{T}$.

c) Hallar una base de $\mathbb{S} + \mathbb{T}$ que contenga simultáneamente una base de $\mathbb{S}$ y una base de $\mathbb{T}$.

Solución:

a) Para aplicar lo anterior de modo de hallar un conjunto de generadores de $\mathbb{S} + \mathbb{T}$ necesitamos un conjunto de generadores de $\mathbb{T}$: resolvemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad \leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_2 - F_1 \to F_2 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

que, despejando x_1 y x_2, tiene como soluciones a

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_3 - x_4, -x_3, x_3, x_4) = x_3(-1,-1,1,0) + x_4(-1,0,0,1)$, con $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$.

Así, el conjunto $\{(-1,-1,1,0),(-1,0,0,1)\}$ es un base de $\mathbb{T}$.

Entonces, a partir del conjunto de generadores dado para $\mathbb{S}$ y el conjunto de generadores obtenido para $\mathbb{T}$, tenemos un conjunto de generadores de $\mathbb{S} + \mathbb{T}$.

Respuesta: $\mathbb{S} + \mathbb{T} = \langle (1,1,0,2),(3,1,1,2),(2,0,1,0),(-1,-1,1,0)(-1,0,0,1)\rangle$.

b) Veamos si el conjunto de generadores de $\mathbb{S}+\mathbb{T}$ que encontramos en el ítem anterior es linealmente independiente:

$$a(1,1,0,2)+b(3,1,1,2)+c(2,0,1,0)+d(-1,-1,1,0)+e(-1,0,0,1)=(0,0,0,0)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccccccc} a & + & 3b & + & 2c & - & d & - & e & = & 0 \\ a & + & b & & & - & d & & & = & 0 \\ & & b & + & c & + & d & & & = & 0 \\ 2a & + & 2b & & & & & + & e & = & 0 \end{array}\right. \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_4 - 2F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} 2F_3 + F_2 \to F_3 \\ F_4 - 2F_2 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_4 - F_3 \to F_4 \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El conjunto de generadores es linealmente dependiente. Podemos extraer un base considerando los vectores asociados a la primera, segunda y cuarta columnas:

$\boxed{\text{Respuesta: El conjunto } \{(1,1,0,2),(3,1,1,2),(-1,-1,1,0)\} \text{ es una base de } \mathbb{S}+\mathbb{T}.}$

c) Observar que los dos primeros vectores de la base obtenida en el ítem anterior no cumplen las ecuaciones de $\mathbb{T}$, por lo tanto esa base no contiene una base de $\mathbb{T}$, ya que $\dim(\mathbb{T}) = 2$ (como vimos en a)) y esa base solo contiene a un vector que pertenece a $\mathbb{T}$.

A partir del desarrollo hecho en el inciso anterior, observamos que los tres generadores con los que tenemos expresado el subespacio $\mathbb{S}$ son linealmente dependientes y que podemos extraer una base de $\mathbb{S}$ considerando los dos primeros $\{(1,1,0,2),(3,1,1,2)\}$; por lo tanto, $\dim(\mathbb{S}) = 2$. También sabemos que $\dim(\mathbb{T}) = 2$.

Como $\dim(\mathbb{S}+\mathbb{T}) = 3$, para la base que buscamos necesitamos tres vectores de $\mathbb{S}+\mathbb{T}$, de los cuales dos tienen que formar una base de $\mathbb{S}$, y dos una base de $\mathbb{T}$: necesitamos un vector que simultáneamente sea parte de estas últimas dos bases, es decir, un vector no nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{S}\cap\mathbb{T}$.

Si $\mathbf{v} \in \mathbb{S}$ entonces existen $a,b,c \in \mathbb{R}$ que cumplen

$$\mathbf{v} = a(1,1,0,2)+b(3,1,1,2)+c(2,0,1,0) = (a+3b+2c, a+b, b+c, 2a+2b).$$

Si además $\mathbf{v} \in \mathbb{T}$ entonces sus coordenadas verifican las ecuaciones de $\mathbb{T}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} (a+3b+2c)+(b+c)+(2a+2b) & = & 0 \\ (a+3b+2c)+(a+b)+2(b+c)+(2a+2b) & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{cases} 3a + 6b + 3c = 0 \\ 4a + 8b + 4c = 0 \end{cases} \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 4 & 0 \end{array}\right) 3F_2 - 4F_1 \to F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

que tiene como soluciones $a = -2b - c$ con $b, c \in \mathbb{R}$ y

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (-2b-c)(1,1,0,2) + b(3,1,1,2) + c(2,0,1,0) \\ &= (b+c, -b-c, b+c, -2b-2c) \\ &= b(1,-1,1,-2) + c(1,-1,1,-2) \\ &= (b+c)(1,-1,1,-2) \end{aligned}$$

Concluimos que $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \langle (1,-1,1,-2) \rangle$.

Para completar la base extendemos $\{(1,-1,1,-2)\}$ a una base $B_{\mathbb{S}}$ de $\mathbb{S}$ y, por otro lado, extendemos $\{(1,-1,1,-2)\}$ a una base $B_{\mathbb{T}}$ de $\mathbb{T}$.

Como $\dim(\mathbb{S}) = \dim(\mathbb{T}) = 2$, solo nos queda agregar un vector de $\mathbb{S}$ que no sea múltiplo de $(1,-1,1,-2)$, por ejemplo $(1,1,0,2)$, y un vector de $\mathbb{T}$ que tampoco sea múltiplo de $(1,-1,1,-2)$, por ejemplo $(-1,0,0,1)$ (recordar que en a) hallamos generadores para $\mathbb{T}$). En caso que extender la base de $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ a una base de $\mathbb{S}$ y a una base de $\mathbb{T}$ no nos resulte tan directo, podemos recurrir al método general para extender bases.

Respuesta: El conjunto $B = \{(1,1,0,2), (1,-1,1,-2), (-1,0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{S} + \mathbb{T}$ que contiene a la base $B_{\mathbb{S}} = \{(1,1,0,2), (1,-1,1,-2)\}$ de $\mathbb{S}$ y a la base $B_{\mathbb{T}} = \{(1,-1,1,-2), (-1,0,0,1)\}$ de $\mathbb{T}$.

Verificación:

Veamos que B es linealmente independiente:

$$a(1,1,0,2) + b(1,-1,1,-2) + c(-1,0,0,1) = (0,0,0,0)$$

$$\iff \begin{cases} a + b - c = 0 \\ a - b = 0 \\ b = 0 \\ 2a - 2b + c = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_4 - 2F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} 2F_3 + F_2 \to F_3 \\ F_4 - 2F_2 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) F_4 - F_3 \to F_4 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es sistema compatible determinado y, por lo tanto, B es linealmente independiente.

$(1,-1,1,-2) = -2(1,1,0,2) + 1(3,1,1,2) + 0(2,0,1,0) \in \mathbb{S}$. Con esto probamos que $B_{\mathbb{S}}$ es una base de $\mathbb{S}$ pues es linealmente independiente, porque lo es B, $\dim(\mathbb{S}) = 2$ y $(1,1,0,2), (1,-1,1,-2) \in \mathbb{S}$.

$(1, -1, 1, -2)$ verifica las ecuaciones de $\mathbb{T}$:

$$\begin{cases} 1 & & + & 1 & - & 2 & = & 0 \\ 1 & - & 1 & + & 2 \cdot 1 & - & 2 & = & 0 \end{cases}$$

y entonces $B_{\mathbb{T}}$ es una base de $\mathbb{T}$ porque es linealmente independiente, pues B lo es, $\dim(\mathbb{T}) = 2$ y $(1, -1, 1, -2), (-1, 0, 0, 1) \in \mathbb{T}$.

Teorema de la dimensión para subespacios

En el ejemplo anterior, aunque tenemos dos subespacios de dimensión 2, resultó que la dimensión de la suma de los subespacios no es 4, debido a la presencia de una intersección de dimensión 1. Un ejemplo más elemental lo tenemos en $\mathbb{R}^3$ para el caso de dos subespacios que sean planos (dimensión 2): la suma de esos subespacios no puede ser de dimensión mayor a 3, y eso hace que la intersección sea de dimensión al menos 1.
En general, dados subespacios $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ de un e.v. $\mathbb{V}$, las dimensiones de $\mathbb{S}$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{S} + \mathbb{T}$ y $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ están relacionadas.

Teorema de la dimensión para subespacios

Sea $\mathbb{V}$ un e.v. de dimensión finita, y sean $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ subespacios de $\mathbb{V}$. Se cumple:

$$\dim(\mathbb{S} + \mathbb{T}) = \dim(\mathbb{S}) + \dim(\mathbb{T}) - \dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}).$$

Demostración: Procedamos como en el último ítem del ejemplo anterior.

i) Obtenemos una base $B_{int} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$, con $k = \dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T})$.
(Si $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \{O\}$, $k = 0$ y no hay vectores en B_{int}.)

ii) Extendemos B_{int} a una base $B_{\mathbb{S}}$ de $\mathbb{S}$ con $C_{\mathbb{S}} = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_m\}$; o sea, $B_{\mathbb{S}} = B_{int} \cup C_{\mathbb{S}}$ y $\dim(\mathbb{S}) = k + m$.

iii) Extendemos B_{int} a una base $B_{\mathbb{T}}$ de $\mathbb{T}$ con $C_{\mathbb{T}} = \{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n\}$; o sea, $B_{\mathbb{T}} = B_{int} \cup C_{\mathbb{T}}$ y $\dim(\mathbb{T}) = k + n$.

Observar que como $\mathbb{S} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_m \rangle$ y $\mathbb{T} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n \rangle$, entonces

$$C = \{\underbrace{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_m, \overbrace{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k}}_{\text{base de } \mathbb{S}}\overbrace{{}, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_n}^{\text{base de } \mathbb{T}}\} \quad \text{genera } \mathbb{S} + \mathbb{T}.$$

Para ver si C es linealmente independiente, planteamos al vector nulo como una combinación lineal de C:

$$a_1\mathbf{s}_1 + a_2\mathbf{s}_2 + \cdots + a_m\mathbf{s}_m + b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_k\mathbf{v}_k + c_1\mathbf{t}_1 + c_2\mathbf{t}_2 + \cdots + c_n\mathbf{t}_n = O$$

Veamos que necesariamente todos los coeficientes son nulos.
Sea $\mathbf{v} = a_1\mathbf{s}_1 + a_2\mathbf{s}_2 + \cdots + a_m\mathbf{s}_m \in \mathbb{S}$. Usando la igualdad anterior, podemos despejar a $\mathbf{v}$ en términos de los vectores de la base $B_{\mathbb{T}}$ de $\mathbb{T}$:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{s}_1 + a_2\mathbf{s}_2 + \cdots + a_m\mathbf{s}_m = -b_1\mathbf{v}_1 - b_2\mathbf{v}_2 - \cdots - b_k\mathbf{v}_k - c_1\mathbf{t}_1 - c_2\mathbf{t}_2 - \cdots - c_n\mathbf{t}_n.$$

Entonces tenemos que $\mathbf{v} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$. Como B_{int} genera $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$, existen escalares $d_1, \ldots, d_k$ tales que $\mathbf{v} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_k\mathbf{v}_k$ y tenemos que

$$\mathbf{v} - \mathbf{v} = (d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_k\mathbf{v}_k) - (a_1\mathbf{s}_1 + a_2\mathbf{s}_2 + \cdots + a_m\mathbf{s}_m) = O,$$

es decir, una combinación lineal de la base $B_{\mathbb{S}}$ que da el vector nulo. Como $B_{\mathbb{S}}$ es linealmente independiente, esto implica que $d_1, \ldots, d_k, a_1, \ldots, a_m$ deben ser todos 0. Entonces, reemplazando $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$ en la combinación lineal de C que da O nos queda:

$$b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_k\mathbf{v}_k + c_1\mathbf{t}_1 + c_2\mathbf{t}_2 + \cdots + c_n\mathbf{t}_n = O,$$

es decir, una combinación lineal de la base $B_{\mathbb{T}}$ que da el vector nulo. Como $B_{\mathbb{T}}$ es linealmente independiente, concluimos que $b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_n$ deben ser todos 0.
En resumen, $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_n$ deben ser todos iguales a 0; por lo tanto, C es linealmente independiente.

Concluimos que C es una base de $\mathbb{S} + \mathbb{T}$. La cantidad de elementos de C es

$$\dim(\mathbb{S} + \mathbb{T}) = k + m + n = (k + m) + (k + n) - k = \dim(\mathbb{S}) + \dim(\mathbb{T}) - \dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}).$$

Ejemplo 5. Sean $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ subespacios de $\mathbb{R}^6$ tales que $\dim(\mathbb{S}) = 3$ y $\dim(\mathbb{T}) = 4$. Verificar que $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} \neq \{O\}$.

Solución: Tenemos que ver que, bajo las condiciones del enunciado, independientemente de cuáles sean los subespacios $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$, su intersección no será el subespacio $\{O\}$.
Para esto, analicemos la dimensión de $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ y veamos que no puede ser 0 (esto es equivalente a decir que $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ no puede ser el subespacio $\{O\}$). El teorema de la dimensión nos dice que:

$$\dim(\mathbb{S} + \mathbb{T}) = \dim(\mathbb{S}) + \dim(\mathbb{T}) - \dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}).$$

De esta igualdad podemos despejar $\dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T})$:

$$\dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) = \dim(\mathbb{S}) + \dim(\mathbb{T}) - \dim(\mathbb{S} + \mathbb{T}).$$

Sabemos que $\dim(\mathbb{S}) = 3$ y $\dim(\mathbb{T}) = 4$, aunque no conocemos $\dim(\mathbb{S} + \mathbb{T})$. Lo que sí sabemos es que $\mathbb{S} + \mathbb{T}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^6$; por lo tanto, $\dim(\mathbb{S} + \mathbb{T}) \leq 6$. Entonces,

$$\dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) = 3 + 4 - \dim(\mathbb{S} + \mathbb{T}) = 7 - \dim(\mathbb{S} + \mathbb{T}) \geq 7 - 6 = 1.$$

Como $\dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) \geq 1$, entonces $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} \neq \{O\}$.

Ejemplo 6. Dados los subespacios

$$\mathbb{S} = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle \ \text{ y } \ \mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$$

y el vector $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$, decidir si $\mathbb{S} + \mathbb{T} = \mathbb{R}^3$ y hallar, si es posible, dos vectores distintos $\mathbf{s}, \mathbf{s}'$ de $\mathbb{S}$ y dos vectores $\mathbf{t}, \mathbf{t}'$ de $\mathbb{T}$ que verifiquen $\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{v} = \mathbf{s}' + \mathbf{t}'$.

Solución: Calculemos $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$: si $\mathbf{w} \in \mathbb{S}$,

$$\mathbf{w} = a(1,0,1) + b(1,1,1) = (a+b, b, a+b)$$

y si además $\mathbf{w} \in \mathbb{T}$, se cumple

$$(a+b) - b + (a+b) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad b = -2a,$$

con lo cual $\mathbf{w} = (-a, -2a, a) = a(-1,-2,-1)$, con $a \in \mathbb{R}$. Entonces $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \langle(-1,-2,-1)\rangle$ y $\dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) = 1$.
Además, $\dim(\mathbb{S}) = 2$ pues $\{(1,0,1),(1,1,1)\}$ es linealmente independiente. También tenemos que $\dim(\mathbb{T}) = \dim(\mathbb{R}^3) - 1 = 2$, dado que $\mathbb{T}$ está definido por una ecuación en $\mathbb{R}^3$.
Entonces vale

$$\dim(\mathbb{S} + \mathbb{T}) = \dim(\mathbb{S}) + \dim(\mathbb{T}) - \dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) = 2 + 2 - 1 = 3$$

y, como $\mathbb{S} + \mathbb{T} \subset \mathbb{R}^3$, podemos concluir que $\mathbb{S} + \mathbb{T} = \mathbb{R}^3$.

Observar que $(1,0,1) \in \mathbb{S}$ y no es múltiplo de $(-1,-2,-1)$. Por otro lado, $(0,1,1) \in \mathbb{T}$, ya que verifica la ecuación $0 - 1 + 1 = 0$, y no es múltiplo de $(-1,-2,-1)$.
Con esto podemos formar una base de $\mathbb{S} + \mathbb{T} = \mathbb{R}^3$ que contiene una base de $\mathbb{S}$ y una base de $\mathbb{T}$:

$$B = \{\underbrace{(1,0,1), \overbrace{(-1,-2,-1)}}_{\text{base de } \mathbb{S}}{}^{\!}\overbrace{, (0,1,1)}\}$$

$$B = \{\underbrace{(1,0,1), \overbrace{(-1,-2,-1), (0,1,1)}^{\text{base de } \mathbb{T}}}_{\text{base de } \mathbb{S}}\}$$

Para hallar los vectores $\mathbf{s}, \mathbf{s}', \mathbf{t}$ y $\mathbf{t}'$ planteamos

$$\mathbf{v} = (1,-1,2) = a(1,0,1) + b(-1,-2,-1) + c(0,1,1)$$

que tiene única solución $a = 2, b = 1, c = 1$ pues B es una base de $\mathbb{R}^3$ (podemos hallar esta solución resolviendo el sistema lineal que se obtiene igualando coordenadas).
Tenemos:

$$\mathbf{v} = (1,-1,2) = \underbrace{2(1,0,1) + \overbrace{1(-1,-2,-1)}}_{\in \mathbb{S}}\overbrace{+ 1(0,1,1)}^{\in \mathbb{T}}$$

Como $(1,0,1)$ y $(-1,-2,-1)$ pertenecen a $\mathbb{S}$ y $(0,1,1)$ a $\mathbb{T}$, tenemos:

$\mathbf{s} = 2(1,0,1) + 1(-1,-2,-1) = (1,-2,1) \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{t} = 1(0,1,1) \in \mathbb{T}$ que cumplen $\mathbf{s} + \mathbf{t} = (1,-1,2) = \mathbf{v}$.

También podemos considerar $(-1,-2,-1)$ como vector de $\mathbb{T}$ y obtener otro par de vectores:

$\mathbf{s}' = 2(1,0,1) = (2,0,2) \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{t}' = 1(-1,-2,-1) + 1(0,1,1) = (-1,-1,0) \in \mathbb{T}$ que cumplen $\mathbf{s}' + \mathbf{t}' = \mathbf{v}$.

Respuesta: $\mathbb{S} + \mathbb{T} = \mathbb{R}^3$
$\mathbf{s} = (1,-2,1) \in \mathbb{S}$, $\mathbf{t} = (0,1,1) \in \mathbb{T}$, $\mathbf{s}' = (2,0,2) \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{t}' = (-1,-1,0) \in \mathbb{T}$ cumplen $\mathbf{s} + \mathbf{t} = (1,-1,2) = \mathbf{s}' + \mathbf{t}'$.

Verificación:

$\mathbf{s} = (1, -2, 1) \in \mathbb{S}: \quad (1. - 2, 1) = 3(1, 0, 1) - 2(1, 1, 1)$

$\mathbf{t} = (0, 1, 1) \in \mathbb{T}: \quad$ verifica $0 - 1 + 1 = 0$

$\mathbf{s} + \mathbf{t} = (1. - 2, 1) + (0, 1, 1) = (1, -1, 2) = \mathbf{v}$

$\mathbf{s}' = (2, 0, 2) \in \mathbb{S}: \quad (2, 0, 2) = 2(1, 0, 1) + 0(1, 1, 1)$

$\mathbf{t}' = (-1, -1, 0) \in \mathbb{T}: \quad$ verifica $-1 - (-1) + 0 = 0$

$\mathbf{s}' + \mathbf{t}' = (2, 0, 2) + (-1, -1, 0) = (1, -1, 2) = \mathbf{v}$

Observación: En el ejemplo anterior, en realidad hay infinitos pares de vectores para $\mathbf{s} \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{t} \in \mathbb{T}$ que verifican $\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{v}$, pues a los vectores de $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ podemos descomponerlos como parte de $\mathbb{S}$ y de $\mathbb{T}$. Por ejemplo:

$$\mathbf{v} = (1, -1, 2) = \underbrace{2(1, 0, 1) + c(-1, -2, -1)}_{\in \mathbb{S}} + \overbrace{(1 - c)(-1, -2, -1) + 1(0, 1, 1)}^{\in \mathbb{T}} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Esto no puede pasar si $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \{O\}$.

Suma directa

Vamos a estudiar ahora la suma de dos subespacios en el caso particular en que la intersección es el subespacio $\{O\}$.

Suma directa

Si $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ son subespacios de un e.v. $\mathbb{V}$ y se cumple que $\mathbb{V} = \mathbb{S} + \mathbb{T}$ y $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \{O\}$, decimos que $\mathbb{V}$ es la *suma directa* de $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ y escribimos $\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T}$.

Propiedad

Sean $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ subespacios de un e.v. $\mathbb{V}$. Si $\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T}$, para cada $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ existen únicos vectores $\mathbf{s} \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{t} \in \mathbb{T}$ que verifican $\mathbf{v} = \mathbf{s} + \mathbf{t}$.

Observación: El teorema de la dimensión aplicado en el caso de suma directa dice que

$$\dim(\mathbb{S} \oplus \mathbb{T}) = \dim(\mathbb{S}) + \dim(\mathbb{T})$$

pues $\dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) = 0$. De esto se deduce que, en este caso, al unir una base de $\mathbb{S}$ y una base de $\mathbb{T}$ resulta un conjunto linealmente independiente.

Ejemplo 7. Dados $\mathbb{S} = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 2), (3, 1, 3, 1) \rangle$ y $\mathbb{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_3 = 0\}$, hallar, si es posible, dos subespacios distintos $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2 \subset \mathbb{R}^4$ que verifiquen

$$\mathbb{S} \oplus \mathbb{T}_1 = \mathbb{H} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{T}_2.$$

Solución: Recordar que $\mathbb{S}+\mathbb{T}_1$ incluye tanto a $\mathbb{S}$ como a $\mathbb{T}_1$ por lo que se debe cumplir $\mathbb{S}\subset\mathbb{H}$, de lo contrario no hay solución. Verifiquémoslo con los generadores de $\mathbb{S}$:

$(1,1,1,1)\in\mathbb{H}:\quad 1-1=0$

$(1,2,1,2)\in\mathbb{H}:\quad 1-1=0$

$(3,1,3,1)\in\mathbb{H}:\quad 3-3=0$

y entonces $\mathbb{S}\subset\mathbb{H}$.

Calculemos dimensiones de $\mathbb{S}$ y $\mathbb{H}$ para determinar qué dimensión deben tener $\mathbb{T}_1$ y $\mathbb{T}_2$:

$\dim(\mathbb{H})=\dim(\mathbb{R}^4)-1=3$, ya que $\mathbb{H}$ está definido por una ecuación.

Para calcular la dimensión de $\mathbb{S}$, analizamos la independencia lineal y extraemos una base del conjunto de generadores $\{(1,1,1,1),(1,2,1,2),(3,1,3,1)\}$:

$$a(1,1,1,1)+b(1,2,1,2)+c(3,1,3,1)=(0,0,0,0)\iff\left\{\begin{array}{ccccccc} a&+&b&+&3c&=&0\\ a&+&2b&+&c&=&0\\ a&+&b&+&3c&=&0\\ a&+&2b&+&c&=&0\end{array}\right.$$

$$\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&0\\1&2&1&0\\1&1&3&0\\1&2&1&0\end{array}\right)\begin{array}{c}F_2-F_1\to F_2\\F_3-F_1\to F_3\\F_4-F_1\to F_4\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&0\\0&1&-2&0\end{array}\right)F_4-F_2\to F_4\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Entonces $\{(1,1,1,1),(1,2,1,2)\}$ es una base de $\mathbb{S}$ y $\dim(\mathbb{S})=2$.

El teorema de la dimensión nos dice que

$$\begin{gathered}\dim(\mathbb{H})=\dim(\mathbb{S}\oplus\mathbb{T}_1)=\dim(\mathbb{S})+\dim(\mathbb{T}_1)-\dim(\mathbb{S}\cap\mathbb{T}_1)\\ 3=2+\dim(\mathbb{T}_1)-0\end{gathered}$$

y tenemos que $\dim(\mathbb{T}_1)=1$. De la misma manera, $\dim(\mathbb{T}_2)=1$.
Si buscamos generadores para un subespacio $\mathbb{T}_1$ que cumpla $\mathbb{S}\oplus\mathbb{T}_1=\mathbb{H}$, necesitamos un vector de $\mathbb{H}$ (porque $\mathbb{T}_1\subset\mathbb{H}$ y $\dim(\mathbb{T}_1)=1$) que forme un conjunto linealmente independiente junto con los vectores de una base de $\mathbb{S}$, de modo que la suma de $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}_1$ sea una suma directa.
En otras palabras, vamos a extender una base de $\mathbb{S}$ a una base de $\mathbb{H}$, y el vector con el que hagamos esto generará el subespacio $\mathbb{T}_1$.
Tomemos una solución de la ecuación de $\mathbb{H}$, por ejemplo $(0,1,0,0)$, que cumple $0-0=0$, y veamos si $C=\{(1,1,1,1),(1,2,1,2),(0,1,0,0)\}$ es un conjunto linealmente independiente:

$$a(1,1,1,1)+b(1,2,1,2)+c(0,1,0,0)=(0,0,0,0)\iff\left\{\begin{array}{ccccccc} a&+&b&&&=&0\\ a&+&2b&+&c&=&0\\ a&+&b&&&=&0\\ a&+&2b&&&=&0\end{array}\right.$$

$$\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\1&2&1&0\\1&1&0&0\\1&2&0&0\end{array}\right)\begin{array}{c}F_2-F_1\to F_2\\F_3-F_1\to F_3\\F_4-F_1\to F_4\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{array}\right)F_4-F_2\to F_4\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&0\end{array}\right)$$

El sistema escompatible determinado; por lo tanto, C es linealmente independiente y resulta una base de $\mathbb{S}+\mathbb{T}_1$, con $\mathbb{T}_1=\langle(0,1,0,0)\rangle$.
Para hallar $\mathbb{T}_2$ solo necesitamos otro vector de $\mathbb{H}$ que no sea múltiplo de $(0,1,0,0)$, y que nuevamente forme un conjunto linealmente independendiente junto con la base de $\mathbb{S}$. Tomemos, por ejemplo $(1,0,1,1)$, que cumple $1-1=0$ y veamos si $C'=\{(1,1,1,1),(1,2,1,2),(1,0,1,1)\}$ es linealmente independiente:

$$a(1,1,1,1)+b(1,2,1,2)+c(1,0,1,1)=(0,0,0,0)\iff\left\{\begin{array}{ccccccc} a&+&b&+&c&=&0\\ a&+&2b&&&=&0\\ a&+&b&+&c&=&0\\ a&+&2b&+&c&=&0\end{array}\right.$$

$$\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\1&2&0&0\\1&1&1&0\\1&2&1&0\end{array}\right)\begin{array}{c}F_2-F_1\to F_2\\F_3-F_1\to F_3\\F_4-F_1\to F_4\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{array}\right)F_4-F_2\to F_4\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

El sistema es compatible determinado y, por lo tanto, C' es linealmente independiente y resulta una base de $\mathbb{S}+\mathbb{T}_2$, con $\mathbb{T}_2=\langle(1,0,1,1)\rangle$.

Respuesta: $\mathbb{T}_1=\langle(0,1,0,0)\rangle$ y $\mathbb{T}_2=\langle(1,0,1,1)\rangle$ cumplen lo pedido: $\mathbb{S}\oplus\mathbb{T}_1=\mathbb{H}=\mathbb{S}\oplus\mathbb{T}_2$.

Verificación:

Ya verificamos que $\mathbb{S}\subset\mathbb{H}$.

$\mathbb{T}_1\subset\mathbb{H}:\quad(0,1,0,0)$ verifica $0-0=0$

Como $C=\{(1,1,1,1),(1,2,1,2),(0,1,0,0)\}$ es linealmente independiente y genera $\mathbb{S}+\mathbb{T}_1$, entonces $\dim(\mathbb{S}+\mathbb{T}_1)=3$ y se cumple $\mathbb{H}=\mathbb{S}+\mathbb{T}_1$.

Además, $\dim(\mathbb{S}\cap\mathbb{T}_1)=\dim(\mathbb{S}+\mathbb{T}_1)-\dim(\mathbb{S})-\dim(\mathbb{T}_1)=3-2-1=0$, lo que asegura que la suma es directa.

$\mathbb{T}_2\subset\mathbb{H}:\quad(1,0,1,1)$ verifica $1-1=0$

Como $C'=\{(1,1,1,1),(1,2,1,2),(1,0,1,1)\}$ es linealmente independiente y genera $\mathbb{S}+\mathbb{T}_2$, nuevamente podemos deducir que $\dim(\mathbb{S}+\mathbb{T}_2)=3$ y se cumple $\mathbb{H}=\mathbb{S}+\mathbb{T}_2$.

Además, que $\dim(\mathbb{S}\cap\mathbb{T}_2)=\dim(\mathbb{S}+\mathbb{T}_2)-\dim(\mathbb{S})-\dim(\mathbb{T}_2)=3-2-1=0$, con lo cual la suma es directa.

$\mathbb{T}_1\neq\mathbb{T}_2$, pues no existe $k\in\mathbb{R}$ tal que $(0,1,0,0)=k(1,0,1,1)$.

4.8. Complemento ortogonal de un subespacio

En el primer fascículo de estas notas estudiamos el producto interno entre vectores de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Ahora vamos a generalizar esa noción para $\mathbb{R}^n$ con $n\in\mathbb{N}$.

Si $\mathbf{v}=(v_1,v_2,\dots,v_n)$ y $\mathbf{w}=(w_1,w_2,\dots,w_n)$ son vectores de $\mathbb{R}^n$, se define el *producto interno* como el número real:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=v_1w_1+v_2w_2\ +\cdots+v_nw_n.$$

Al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ junto con el producto interno se lo llama *espacio euclídeo*.

Se puede verificar que el producto interno cumple las siguientes propiedades: si $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

1. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$.
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.
3. $\lambda\,(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\lambda\,\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (\lambda\,\mathbf{w})$.

Al igual que en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, decimos que dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son ortogonales si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

Complemento ortogonal

Dado un subespacio $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$ el *complemento ortogonal* de $\mathbb{S}$ es el conjunto

$$\mathbb{S}^{\perp} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \ / \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{s} = 0 \text{ para todo } \mathbf{s} \in \mathbb{S}\}.$$

Es decir, $\mathbb{S}^{\perp}$ es el conjunto de los vectores de $\mathbb{R}^n$ que son ortogonales a todos los vectores de $\mathbb{S}$.

Ejemplo 1. Dado $\mathbb{S} = \langle (2, 1, 5) \rangle$, hallar $\mathbb{S}^{\perp}$.

Solución: Para hallar el complemento ortogonal de $\mathbb{S}$ vamos a escribir la condición:

$$\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{\perp} \iff \mathbf{v} \cdot \mathbf{s} = 0 \text{ para todo } \mathbf{s} \in \mathbb{S}.$$

Ahora bien, como $\mathbb{S}$ es una recta generada por $(2, 1, 5)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \in \mathbb{S}^{\perp} &\iff \mathbf{v} \cdot (\lambda(2, 1, 5)) = 0 \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R} \\ &\iff \lambda\,(\mathbf{v} \cdot (2, 1, 5)) = 0 \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Para $\lambda = 1$, la condición anterior nos dice que, para que $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{\perp}$, debe valer $\mathbf{v} \cdot (2, 1, 5) = 0$. Recíprocamente, si $\mathbf{v} \cdot (2, 1, 5) = 0$, entonces al mutiplicar por cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos que $\lambda\,(\mathbf{v} \cdot (2, 1, 5)) = 0$. Podemos decir entonces que

$$\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{\perp} \iff \mathbf{v} \cdot (2, 1, 5) = 0.$$

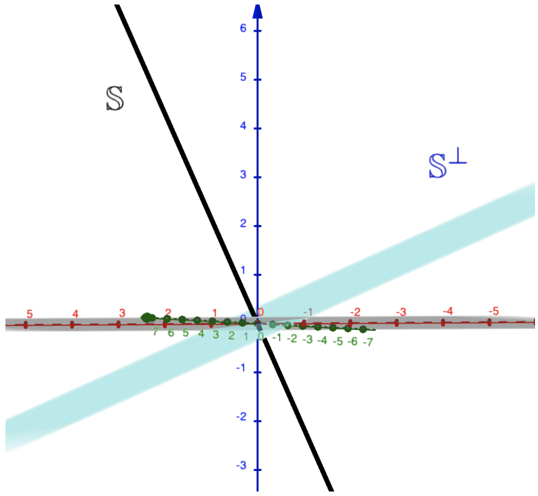
Si llamamos $\mathbf{v} = (x, y, z)$,

$$\mathbf{v} \cdot (2, 1, 5) = 2x + y + 5z,$$

así que los vectores del complemento ortogonal de $\mathbb{S}$ son las soluciones de la ecuación homogénea $2x + y + 5z = 0$. En conclusión,

$$\mathbb{S}^{\perp} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + y + 5z = 0\}.$$

Observamos que $\mathbb{S}$ es una recta por el origen y $\mathbb{S}^{\perp}$ es un plano que tiene como vector normal a un generador de la recta, $N = (2, 1, 5)$:



Notar que $\mathbb{S}^\perp$ es un subespacio ya que es el conjunto de soluciones de una ecuación homogénea, y cumple $\dim(\mathbb{S}^\perp) = 3 - \underbrace{\dim(\mathbb{S})}_{1} = 2$.

Despejamos de la ecuación $y = -2x - 5z$ y obtenemos generadores de $\mathbb{S}^\perp$.

$\boxed{\text{Respuesta: } \mathbb{S}^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + y + 5z = 0\} = \langle (1,-2,0), (0,-5,1) \rangle.}$

En forma similar al ejemplo anterior, se puede probar que si $\mathbb{S} = \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_k \rangle$, entonces $\mathbb{S}^\perp$ es el conjunto de vectores que son ortogonales a todos los generadores:

Observación

Si $\mathbb{S} = \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_k \rangle$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathbb{S}^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ \ \mathbf{x} \cdot \mathbf{s}_1 = 0, \ \mathbf{x} \cdot \mathbf{s}_2 = 0, \ \ldots, \ \mathbf{x} \cdot \mathbf{s}_k = 0\}$$

En efecto, si $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^\perp$, dado que $\mathbf{s}_i \in \mathbb{S}$ es claro que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{s}_i = 0$ para todo i tal que $1 \leq i \leq k$.

Tomemos ahora un vector que cumple $\mathbf{x} \cdot \mathbf{s}_1 = 0, \mathbf{x} \cdot \mathbf{s}_2 = 0, \ldots, \mathbf{x} \cdot \mathbf{s}_k = 0$.

Si $\mathbf{s} \in \mathbb{S}$, $\mathbf{s} = \alpha_1 \mathbf{s}_1 + \alpha_2 \mathbf{s}_2 + \ldots + \alpha_k \mathbf{s}_k$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{s} &= \mathbf{x} \cdot (\alpha_1 \mathbf{s}_1 + \alpha_2 \mathbf{s}_2 + \ldots + \alpha_k \mathbf{s}_k) \\ &= \mathbf{x} \cdot (\alpha_1 \mathbf{s}_1) + \mathbf{x} \cdot (\alpha_2 \mathbf{s}_2) + \ldots + \mathbf{x} \cdot (\alpha_k \mathbf{s}_k) \\ &= \alpha_1 \underbrace{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{s}_1)}_{0} + \alpha_2 \underbrace{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{s}_2)}_{0} + \ldots + \alpha_k \underbrace{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{s}_k)}_{0} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{s} = 0$ para todo $\mathbf{s} \in \mathbb{S}$; es decir, $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^\perp$.

Propiedad

$\mathbb{S}^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y $\dim(\mathbb{S}^\perp) = n - \dim(\mathbb{S})$ para todo subespacio $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}^n$.

Demostración: La observación anterior nos indica que si $\mathbb{S}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathbb{S}^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ pues es el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con n incógnitas.
La dimensión de $\mathbb{S}^\perp$ es igual a $n - \operatorname{rg}(A)$ donde A es la matriz del sistema; dado que las filas de A forman un conjunto de generadores de $\mathbb{S}$, vale $\operatorname{rg}(A) = \dim(\mathbb{S})$.

Ejemplo 2. Dado $\mathbb{S} = \langle(1,0,-3,1,1),(0,1,-1,1,2)\rangle$, hallar una base de $\mathbb{S}^\perp$.

Solución: Por la observación anterior tenemos que

$$\mathbb{S}^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \ / \ x_1 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 0,\ x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0\}$$

El sistema está escalonado, así que solo vamos a despejar para hallar una base.

$$x_1 = 3x_3 - x_4 - x_5, \quad x_2 = x_3 - x_4 - 2x_5$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \in \mathbb{S}^\perp \iff \mathbf{x} &= (3x_3 - x_4 - x_5, x_3 - x_4 - 2x_5, x_3, x_4, x_5)\\ &= x_3(3,1,1,0,0) + x_4(-1,-1,0,1,0) + x_5(-1,-2,0,0,1)\end{aligned}$$

Tenemos entonces que $\mathbb{S}^\perp = \langle(3,1,1,0,0),(-1,-1,0,1,0),(-1,-2,0,0,1)\rangle$. Como el conjunto de generadores hallado es linealmente independiente, es una base de $\mathbb{S}^\perp$.

Respuesta: Una base de $\mathbb{S}^\perp$ es $\{(3,1,1,0,0),(-1,-1,0,1,0),(-1,-2,0,0,1)\}$.

Propiedad

Si $\mathbb{S}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces $(\mathbb{S}^\perp)^\perp = \mathbb{S}$.

Demostración: Para demostrar la igualdad vamos a ver que $\mathbb{S} \subset (\mathbb{S}^\perp)^\perp$ y que ambos subespacios tienen la misma dimensión. Por la definición de complemento ortogonal aplicada al subespacio $\mathbb{S}^\perp$, tenemos que

$$(\mathbb{S}^\perp)^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \ / \ \mathbf{v}\cdot\mathbf{t} = 0 \text{ para todo } \mathbf{t} \in \mathbb{S}^\perp\}$$

i) Si $\mathbf{s} \in \mathbb{S}$, cumple que $\mathbf{s}\cdot\mathbf{t} = 0$ para todo $\mathbf{t} \in \mathbb{S}^\perp$, así que $\mathbf{s} \in (\mathbb{S}^\perp)^\perp$.

ii) $\dim((\mathbb{S}^\perp)^\perp) = n - \dim(\mathbb{S}^\perp) = n - (n - \dim(\mathbb{S})) = \dim(\mathbb{S})$.

Ejemplo 3. Dado $\mathbb{T} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0;\ -x_2 + x_3 - 6x_4 = 0\}$, hallar $\mathbb{T}^\perp$.

Solución: En este caso tenemos el subespacio dado por ecuaciones. Veamos qué información nos dan sobre su complemento ortogonal.

$$\mathbf{x} \in \mathbb{T} \iff x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \quad \text{y} \quad -x_2 + x_3 - 6x_4 = 0$$

Observamos que las ecuaciones $x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0$ y $-x_2 + x_3 - 6x_4 = 0$ pueden reescribirse, usando el producto interno, como

$$\mathbf{x} \cdot (1, -2, 4, -5) = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{x} \cdot (0, -1, 1, -6) = 0.$$

Ahora, estas condiciones equivalen a que $\mathbf{x}$ pertenezca al complemento ortogonal del subespacio $\langle (1, -2, 4, -5), (0, -1, 1, -6) \rangle$. Resumiendo:

$$\mathbf{x} \in \mathbb{T} \iff \begin{cases} \mathbf{x} \cdot (1, -2, 4, -5) & = & 0 \\ \mathbf{x} \cdot (0, -1, 1, -6) & = & 0 \end{cases} \iff \mathbf{x} \in \langle (1, -2, 4, -5), (0, -1, 1, -6) \rangle^{\perp}$$

Si llamamos $\mathbb{S} = \langle (1, -2, 4, -5), (0, -1, 1, -6) \rangle$, tenemos que $\mathbb{T} = \mathbb{S}^{\perp}$ y entonces, por la propiedad anterior,

$$\mathbb{T}^{\perp} = (\mathbb{S}^{\perp})^{\perp} = \mathbb{S}.$$

Respuesta: $\mathbb{T}^{\perp} = \langle (1, -2, 4, -5), (0, -1, 1, -6) \rangle$.

Notar que los generadores que obtuvimos para $\mathbb{T}^{\perp}$ son los vectores formados por los coeficientes de las ecuaciones que definen a $\mathbb{T}$. Se puede demostrar que esto vale en general.

Si el subespacio $\mathbb{S}$ es el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo, las filas de la matriz de coeficientes del sistema forman un conjunto de generadores de $\mathbb{S}^{\perp}$.
En otras palabras, si $\mathbb{S}$ está definido por un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales homogéneas en n incógnitas y a partir de cada una de las ecuaciones construimos el vector $\mathbf{v}_i$ cuyas coordenadas son los coeficientes de la ecuación, entonces $\mathbb{S}^{\perp} = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle$.

Resumiendo:

$$\mathbb{S}^{\perp} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle \iff \mathbb{S} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ \begin{cases} \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \\ \vdots \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_m = 0 \end{cases} \right\}$$

Ejemplo 4.

i) Dado $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \ / \ x_1 - x_2 = 0;\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0;\ -x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0\}$, hallar $\mathbb{S}^{\perp}$.

ii) Hallar el subespacio $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{S}^{\perp} = \langle (1, 0, -2, 0), (0, 1, 1, 1) \rangle$.

Solución:

i) Como vimos recién, podemos hallar un conjunto de generadores de $\mathbb{S}^\perp$ a partir de las ecuaciones de $\mathbb{S}$:

$$\mathbb{S} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & = & 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 & = & 0 \\ -x_2 + 2x_3 + 4x_4 & = & 0 \end{array} \right. \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{x} \cdot (1,-1,0,0) & = & 0 \\ \mathbf{x} \cdot (2,0,1,-1) & = & 0 \\ \mathbf{x} \cdot (0,-1,2,4) & = & 0 \end{array} \right. \right\}$$

Concluimos que

$$\boxed{\mathbb{S}^\perp = \langle (1,-1,0,0), (2,0,1,-1), (0,-1,2,4) \rangle.}$$

ii) Por la propiedad anterior, sabemos que los generadores de $\mathbb{S}^\perp$ nos dan ecuaciones para $\mathbb{S}$. En este caso,

$$\mathbb{S}^\perp = \langle (1,0,-2,0), (0,1,1,1) \rangle \iff \mathbb{S} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / \ \mathbf{x} \cdot (1,0,-2,0) = 0; \mathbf{x} \cdot (0,1,1,1) = 0 \}$$

Como $\mathbf{x} \cdot (1,0,-2,0) = x_1 - 2x_3$ y $\mathbf{x} \cdot (0,1,1,1) = x_2 + x_3 + x_4$, resulta que

$$\boxed{\mathbb{S} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / \ x_1 - 2x_3 = 0; \ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}.}$$

Propiedad

Si $\mathbb{S}$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$ entonces $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}^\perp = \mathbb{R}^n$.

Demostración: Tenemos que probar que se cumplen las siguientes condiciones

i) $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}^\perp = \{O\}$.

ii) $\mathbb{S} + \mathbb{S}^\perp = \mathbb{R}^n$.

i) Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{S}^\perp$.

Dado que $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^\perp$, tenemos que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{s} = 0$ para todo $\mathbf{s} \in \mathbb{S}$. En particular, como $\mathbf{v} \in \mathbb{S}$, resulta que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$. Si $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, entonces $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1^2 + \cdots v_n^2$. Observar que cada término v_i^2 de la suma anterior es mayor o igual que 0 y vale 0 sólo si $v_i = 0$, con lo cual $v_1^2 + \cdots + v_n^2 = 0$ implica que $\mathbf{v} = O$.

ii) Como $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathbb{S}^\perp \subset \mathbb{R}^n$ tenemos que $\mathbb{S} + \mathbb{S}^\perp \subset \mathbb{R}^n$. Además,

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{S} + \mathbb{S}^\perp) &= \dim(\mathbb{S}) + \dim(\mathbb{S}^\perp) - \underbrace{\dim(\mathbb{S} \cap \mathbb{S}^\perp)}_{0} \\ &= \dim(\mathbb{S}) + \dim(\mathbb{S}^\perp) = \dim(\mathbb{S}) + n - \dim(\mathbb{S}) \\ &= n = \dim(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbb{S} + \mathbb{S}^\perp = \mathbb{R}^n$.

Observación: La propiedad anterior nos asegura que si $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ entonces existen únicos $\mathbf{s}_0 \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{t}_0 \in \mathbb{S}^\perp$ de manera tal que $\mathbf{v} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{t}_0$. Esto nos permite dar la siguiente definición.

Proyección ortogonal sobre un subespacio

Dado $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{t}_0$ con $\mathbf{s}_0 \in \mathbb{S}$ y $\mathbf{t}_0 \in \mathbb{S}^\perp$, el vector $\mathbf{s}_0$ se llama *proyección ortogonal* de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbb{S}$.

Propiedad

La proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbb{S}$ es el punto de $\mathbb{S}$ que está a menor distancia de $\mathbf{v}$, es decir que

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{s}_0\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{s}\| \quad \forall\, \mathbf{s} \in \mathbb{S}.$$

Dados $P \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbb{S}$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$, llamamos *distancia* de P a $\mathbb{S}$ a la distancia entre P y su proyección ortogonal sobre $\mathbb{S}$.

Ejemplo 5. Dados el subespacio $\mathbb{S} = \langle(1,2)\rangle$ y el punto $P = (-3,-1)$, hallar el punto de $\mathbb{S}$ que está más próximo al punto P y calcular la distancia de P a $\mathbb{S}$.

Solución: Busquemos primero generadores de $\mathbb{S}^\perp$: como $\mathbb{S} = \langle(1,2)\rangle$, entonces

$$\mathbb{S}^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,/\, x_1 + 2x_2 = 0\} = \langle(-2,1)\rangle$$

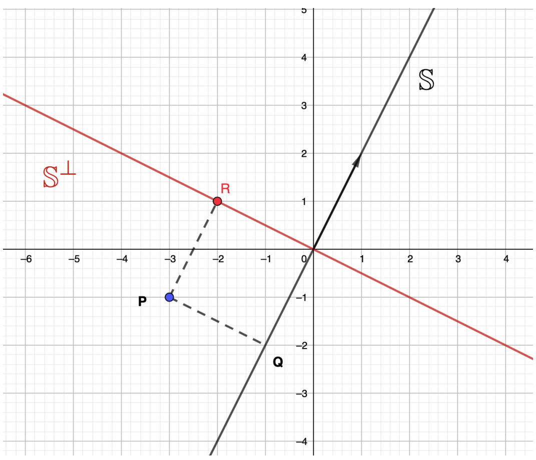
A continuación vamos a escribir a $P = Q + R$ con $Q \in \mathbb{S}$ y $R \in \mathbb{S}^\perp$:

$$(-3,-1) = \underbrace{\alpha(1,2)}_{Q\in\mathbb{S}} + \underbrace{\beta(-2,1)}_{R\in\mathbb{S}^\perp}$$

Obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = -3 \\ 2\alpha + \beta = -1 \end{cases}$$

Lo resolvemos y la solución es $\alpha = -1$ y $\beta = 1$. Reemplazando en las expresiones de Q y R nos queda que $Q = (-1,-2)$ y $R = (-2,1)$. El punto Q es la proyección ortogonal de P sobre $\mathbb{S}$ (ver gráfico).



Para terminar, calculamos la distancia:

$$d(P,\mathbb{S}) = d(P,Q) = \|P-Q\| = \|R\| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}.$$

Respuesta: El punto de $\mathbb{S}$ a menor distancia de P es $Q=(-1,2)$ y $d(P,\mathbb{S})=\sqrt{5}$.

Ejemplo 6. Sean $\mathbb{S}$ el plano en $\mathbb{R}^3$ definido por $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$ y $P=(-1,-7,5)$. Hallar el punto $Q \in \mathbb{S}$ a menor distancia de $\mathbb{S}$ y calcular la distancia de P a $\mathbb{S}$.

Solución: Si despejamos de la ecuación del plano obtenemos que $\mathbb{S} = \langle (2,1,0),(-1,0,1)\rangle$, y como $\mathbb{S}$ está dado por una ecuación tenemos que $\mathbb{S}^\perp = \langle (1,-2,1)\rangle$.
Trabajamos en forma similar al ejemplo anterior:

$$P = Q + R = \underbrace{\alpha(2,1,0)+\beta(-1,0,1)}_{Q\in\mathbb{S}} + \underbrace{\gamma(1,-2,1)}_{R\in\mathbb{S}^\perp}$$

Resolvemos el sistema usando la matriz ampliada,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) F_1 \leftrightarrow F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -7 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$
$$F_2 - 2F_1 \to F_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$
$$F_3 + F_2 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right).$$

Despejando obtenemos que $\gamma = 3$, $\beta = 2$ y $\alpha = -1$, así que

$$P = \underbrace{-(2,1,0)+2(-1,0,1)}_{Q\in\mathbb{S}} + \underbrace{3(1,-2,1)}_{R\in\mathbb{S}^\perp} = \underbrace{(-4,-1,2)}_{Q\in\mathbb{S}} + \underbrace{(3,-6,3)}_{R\in\mathbb{S}^\perp}.$$

Calculamos la distancia:

$$d(P,\mathbb{S}) = d(P,Q) = \|P-Q\| = \|R\| = \sqrt{3^2+(-6)^2+3^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}.$$

Respuesta: El punto de $\mathbb{S}$ a menor distancia de P es $Q=(-4,-1,2)$ y $d(P,\mathbb{S}) = 3\sqrt{6}$.

4.9. Coordenadas en una base

Comencemos recordando la definición de base de un espacio vectorial.
Un conjunto de vectores $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ si cumple

- B es un conjunto linealmente independiente.
- B genera $\mathbb{V}$.

La segunda condición significa que para cada vector $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ que cumplen $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$.
Además, si $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ cumplen $\mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n$, restando las dos igualdades obtenemos una combinación lineal de los vectores de la base B igualada al vector nulo:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} - \mathbf{v} &= (a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n) - (b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n) \\ O &= (a_1 - b_1)\mathbf{v}_1 + (a_2 - b_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (a_n - b_n)\mathbf{v}_n \end{aligned}$$

Como B es un conjunto linealmente independiente, la única solución de la última igualdad es $a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \cdots = a_n - b_n = 0$ que nos dice que $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$.
Esto significa que para cada vector $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ existen ***únicos*** escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ que cumplen $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$. Decimos que $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ son las *coordenadas de* $\mathbf{v}$ *con respecto a la base* B y escribimos $(\mathbf{v})_B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. En resumen:

$$(\mathbf{v})_B = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \iff \mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

Observar que las coordenadas de un vector dependen de la base, en particular, del orden de los vectores que la forman. En adelante, una base de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ es un conjunto ***ordenado*** de vectores linealmente independientes que genera $\mathbb{V}$.

Ejemplo 1. Hallar las coordenadas de $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ con respecto a las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$.

a) $B_1 = \{(1, 1, -1), (-1, 1, 0), (0, 1, -1)\}$

b) $B_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

c) $B_3 = \{(-1, 1, 0), (0, 1, -1), (1, 1, -1)\}$

Solución: Usando la definición de coordenadas, planteamos las combinaciones lineales con cada base y resolvemos el sistema lineal que resulta.

a)

$$(1,2,3)_{B_1} = (a,b,c) \iff (1,2,3) = a(1,1,-1) + b(-1,1,0) + c(0,1,-1)$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & - & b & & & = & 1 \\ a & + & b & + & c & = & 2 \\ -a & & & - & c & = & 3 \end{array} \right. \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 + F_1 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{array} \right) 2F_3 + F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{array} \right)$$

que tiene como solución $a = 6, b = 5$ y $c = -9$

Respuesta: Las coordenadas de $(1,2,3)$ con respecto a B_1 son $(1,2,3)_{B_1} = (6,5,-9)$.

Verificación:

Hagamos la combinación lineal de los vectores de la base B_1 con las coordenadas halladas: $6(1,1,-1) + 5(-1,1,0) - 9(0,1,-1) = (1,2,3)$.

b)

$$(1,2,3)_{B_2} = (a,b,c) \iff (1,2,3) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$$

De esta igualdad se puede despejar como solución $a = 1, b = 2$ y $c = 3$.

Respuesta: Las coordenadas de $(1,2,3)$ con respecto a B_2 son $(1,2,3)_{B_2} = (1,2,3)$.

Verificación:

Hagamos la combinación lineal de los vectores de la base B_2 con las coordenadas halladas: $1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1) = (1,2,3)$

c)

$$(1,2,3)_{B_3} = (a,b,c) \iff (1,2,3) = a(-1,1,0) + b(0,1,-1) + c(1,1,-1)$$

Notar que los vectores de la base B_3 son los mismos que los de la base B_1 pero en otro orden; por lo tanto, ya sabemos cuál es la combinación lineal de estos vectores que da como resultado $(1,2,3)$. Entonces $a = 5, b = -9$ y $c = 6$.

Respuesta: Las coordenadas de $(1,2,3)$ con respecto a B_3 son $(1,2,3)_{B_3} = (5,-9,6)$.

Verificación:

Hagamos la combinación lineal de los vectores de la base B_3 con las coordenadas halladas: $5(-1,1,0) - 9(0,1,-1) + 6(1,1,-1) = (1,2,3)$

Observación: En el ejemplo anterior, B_2 es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y, para esta base, nuestra definición de coordenadas coincide con la que ya veníamos usando: $(1,2,3)_{B_2} = (1,2,3)$.
Lo mismo ocurre para la base canónica de $\mathbb{R}^n$ para cualquier n: si $\mathbf{v} = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ y E es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, entonces $(\mathbf{v})_E = (x_1,\dots,x_n)$.

Ejemplo 2. Sea $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Hallar la matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ cuyas coordenadas con respecto a la base B son $(4,0,1,-3)$.

b) Hallar las coordenadas de $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ con respecto a la base B.

Solución:

a) A partir de la definición de coordenadas, sabemos que la matriz A se obtiene calculando la combinación lineal de los elementos de la base B con los escalares dados por las coordenadas de A con respecto a la base:

$$(A)_B = (4,0,1,-3)$$
$$\iff A = 4\,.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 0\,.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 1\,.\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + (-3).\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Respuesta: La matriz A tal que $(A)_B = (4,0,1,-3)$ es $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Como en el Ejemplo 1, para hallar las coordenadas de la matriz dada con respecto a la base B usamos la definición de coordenadas, que nos conduce a un sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}_B = (a,b,c,d)$$
$$\iff \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} a & & & + & 2c & & & = & 0 \\ -a & + & b & - & c & - & d & = & -3 \\ 2a & - & b & + & 4c & + & d & = & 2 \\ a & & & + & 2c & + & d & = & 3 \end{array} \right. \leftrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Escalonamos para resolver el sistema:

$$\begin{array}{c} F_2 + F_1 \to F_2 \\ F_2 - 2F_1 \to F_3 \\ F_4 - F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \quad F_3 + F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Finalmente calculamos la solución del sistema: $a = 2$, $b = 1$, $c = -1$, $d = 3$.

Respuesta: Las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ con respecto a la base B son $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}_B = (2, 1, -1, 3)$.

Verificación:

Comprobemos que al hacer la combinación lineal de B con las coordenadas halladas el resultado es la matriz dada.

$$2.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + (-1).\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 3.\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3. Sean $\mathbb{V}$ un e.v., $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, $B' = \{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3, 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}$ y $B'' = \{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3\}$ bases $\mathbb{V}$, y sea $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ tal que $(\mathbf{v})_{B'} = (4, 2, 1)$. Hallar $(\mathbf{v})_{B''}$.

Solución: Por la definición de coordenadas con respecto a la base B',

$$\begin{aligned} (\mathbf{v})_{B'} = (4,2,1) \iff \mathbf{v} &= 4(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) + 2(2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + 1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) \\ &= 9\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Buscamos ahora las coordenadas de $\mathbf{v} = 9\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3$ con respecto a la base B''. Nuevamente, la definición nos dice que:

$$(\mathbf{v})_{B''} = (a, b, c) \iff \mathbf{v} = a(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + b(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3) + c(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3).$$

Podemos igualar las dos combinaciones lineales que dan $\mathbf{v}$:

$$9\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3 = a(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + b(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3) + c(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3).$$

Igualando a O y reagrupando, obtenemos una combinación lineal de los vectores de la base B igualada al vector nulo

$$\begin{aligned} O &= a(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + b(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3) + c(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) - (9\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3) \\ O &= (b + c - 9)\mathbf{v}_1 + (a + b - 1)\mathbf{v}_2 + (-a - 2b + c + 3)\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Como B es un conjunto linealmente independiente, por ser una base de $\mathbb{V}$, la única solución para esta última combinación lineal es la que tiene sus coeficientes iguales a 0, es decir

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} & & b & + & c & - & 9 & = & 0 \\ a & + & b & & & - & 1 & = & 0 \\ -a & - & 2b & + & c & + & 3 & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} & & b & + & c & = & 9 \\ a & + & b & & & = & 1 \\ -a & - & 2b & + & c & = & -3 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{array} \right) F_2 \leftrightarrow F_1 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

$$F_3 + F_1 \to F_3 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right) F_3 + F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{array} \right)$$

La solución del sistema es $a = -\frac{9}{2}, b = \frac{11}{2}, c = \frac{7}{2}$.

$\boxed{\text{Respuesta: } (\mathbf{v})_{B''} = \left(-\frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{7}{2}\right).}$

Verificación:
Usamos las coordenadas en la combinación lineal con la base B'':

$$-\frac{9}{2}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + \frac{11}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3) + \frac{7}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) = 9\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}$$

Observación: En este ejemplo no conocemos cómo son los elementos del espacio vectorial $\mathbb{V}$ ni cuáles son los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ que definen las bases. Las propiedades utilizadas en la resolución son las de la suma y del producto por escalares que valen en todos los espacios vectoriales. De las hipótesis del enunciado podemos deducir que $\dim(\mathbb{V}) = 3$, pero eso no significa que el espacio vectorial sea $\mathbb{R}^3$. Lo que sí ocurre es que las coordenadas de los vectores de este espacio vectorial son ternas de números reales.
En general, para un espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión n, las coordenadas de los elementos de $\mathbb{V}$ con respecto a una base son n-uplas, aunque dichos elementos no lo sean.

Ejemplo 4. Sea $B = \{(1,0,1,-1),(1,1,0,1),(0,1,0,1),(1,0,1,0)\}$ base de $\mathbb{R}^4$ y sea $\mathbb{S}$ el subespacio $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; 2x_1 + x_2 + x_4 = 0; 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\}$. Hallar todos los vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{S}$ cuyas coordenadas con respecto a la base B son de la forma (a,b,b,a).

Solución: Veamos cómo son los vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ que cumplen $(\mathbf{v})_B = (a,b,b,a)$ con $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{v})_B = (a,b,b,a) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{v} &= a(1,0,1,-1) + b(1,1,0,1) + b(0,1,0,1) + a(1,0,1,0)\\ &= (2a+b, 2b, 2a, -a+2b)\end{aligned}$$

Ahora veamos cuáles de estos vectores pertenecen al subespacio $\mathbb{S}$ reemplazando en las ecuaciones de $\mathbb{S}$ y despejando:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -2\cdot(2a+b) & + & 2b & + & 2\cdot(2a) & & & = & 0\\ 2\cdot(2a+b) & + & 2b & & & + & (-a+2b) & = & 0\\ & & 2\cdot(2b) & + & 2\cdot(2a) & + & (-a+2b) & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} & & 0 & = & 0\\ 3a & + & 6b & = & 0\\ 3a & + & 6b & = & 0 \end{array}\right.$$

Este sistema tiene como soluciones $a = -2b$ para todo $b \in \mathbb{R}$; entonces

$$\mathbf{v} = -2b(1,0,1,-1) + b(1,1,0,1) + b(0,1,0,1) - 2b(1,0,1,0) = b(-3,2,-4,4), \quad \text{con } b \in \mathbb{R}.$$

Respuesta: Los vectores de $\mathbb{S}$ cuyas coordenadas en la base B son de la forma (a,b,b,a) son los de la forma $\mathbf{v} = b(-3,2,-4,4)$, con $b \in \mathbb{R}$, es decir, los del subespacio $\langle(-3,2,-4,4)\rangle$.

Ejemplo 5. Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y $B' = \{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3\}$ bases de un e.v. $\mathbb{V}$. Hallar todos los $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ que tienen las mismas coordenadas en ambas bases.

Solución: Buscamos los vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ que cumplan $(\mathbf{v})_B = (\mathbf{v})_{B'}$, es decir, si $(\mathbf{v})_B = (a, b, c)$ también debe valer $(\mathbf{v})_{B'} = (a, b, c)$. Como

$$\begin{aligned} (\mathbf{v})_B = (a,b,c) &\iff \mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 \qquad \text{y} \\ (\mathbf{v})_{B'} = (a,b,c) &\iff \mathbf{v} = a(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + b(2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + c(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) \end{aligned}$$

podemos igualar las combinaciones lineales:

$$a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 = a(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + b(2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + c(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3).$$

Pasando todo al mismo lado y reagrupando

$$\begin{aligned} a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 - a(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) - b(2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) - c(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) &= O \\ c\mathbf{v}_1 + (-a - b)\mathbf{v}_2 + (-a - b)\mathbf{v}_3 &= O \end{aligned}$$

obtenemos una combinación lineal de los vectores de la base B igualada al vector nulo. Por la independencia lineal de B, la única solución es con todos los coeficientes iguales a 0, es decir:

$$\begin{cases} & & & c & = & 0 \\ -a & - & b & & = & 0 \\ -a & - & b & & = & 0 \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son $b = -a$, con $a \in \mathbb{R}$ y $c = 0$, con lo cual,

$$(\mathbf{v})_B = (a, -a, 0) \iff \mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 - a\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 = a(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Respuesta: Los vectores de $\mathbb{V}$ que tienen las mismas coordenadas en B y en B' son los de la forma $\mathbf{v} = a(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$ con $a \in \mathbb{R}$, es decir, los del subespacio $\langle \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \rangle$.

Verificación:

Hagamos la combinación lineal con la base B':

$(\mathbf{v})_{B'} = (a, -a, 0) \iff \mathbf{v} = a(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) - a(2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + 0(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) = a(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2).$

Apéndice: Definición de espacio vectorial real

Espacio vectorial real

Un *espacio vectorial real*, o espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, es un conjunto $\mathbb{V}$ de elementos llamados *vectores*, junto con una operación *suma* y un *producto por escalares*, que satisfacen las siguientes propiedades:

EV1. Si $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces la suma $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{V}$.

EV2. Si $k \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces el producto $k \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{V}$.

EV3. Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{V}$, entonces $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

EV4. Existe un elemento en $\mathbb{V}$, notado O, tal que $O + \mathbf{u} = \mathbf{u} + O = \mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$.

EV5. Para cada elemento $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$, existe $-\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = O$.

EV6. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.

EV7. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $c \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c \cdot \mathbf{u} + c \cdot \mathbf{v}$.

EV8. Si a y $b \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces $(a + b) \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{v}$.

EV9. Si a y $b \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$, entonces $(ab) \cdot \mathbf{v} = a \cdot (b \cdot \mathbf{v})$.

EV10. Si $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$, entonces $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ $(1 \in \mathbb{R})$.

Notación: $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$, para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$.

Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial real, valen las siguientes propiedades.

- $0 \cdot \mathbf{v} = O$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$.
- $k \cdot O = O$ para todo $k \in \mathbb{R}$.
- $(-1) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$.
- $-(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = -\mathbf{v} - \mathbf{w}$ para todos $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{V}$.
- $k \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = k \cdot \mathbf{v} - k \cdot \mathbf{w}$ para todos $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{V}$, $k \in \mathbb{R}$.
- $k \cdot \mathbf{v} = O$ si y sólo si $k = 0$ ó $\mathbf{v} = O$.