Práctica 2 – Mate 51 – Sede Pilar

Continuación Práctica 2 - Funciones cuadráticas

Ejercicio 15.- Asociar cada función con su imagen.

Función	Imagen
I. $f(x) = 3x^2 + 6x + 3$	**A.** $[-1; +\infty)$
II. $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$	**B.** $[0; +\infty)$
III. $f(x) = -x^2 - 1$	**C.** $(-\infty; 3]$
IV. $f(x) = x^2 - 8x + 15$	**D.** $(-\infty; -1]$

Por lo visto en el ejercicio 14, anterior usaremos que :

si a > 0 $\Longrightarrow$ Imagen de f = $[y_v, +\infty)$

si a < 0 $\Longrightarrow$ Imagen de f = $(-\infty, y_v]$

I. $f(x) = 3x^2 + 6x + 3$ (entonces son $a = 3$ $b = 6$ $c = 3$)

número i

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot 3} = 1$$

$$y_v = c - \frac{b^2}{4a} = 3 - \frac{6^2}{4 \cdot 3} = 3 - \frac{36}{12} = 3 - 3 = 0$$

Entonces como $a = 3 > 0$ Imagen (f) = $[y_v, +\infty) = [0, +\infty)$

luego para la Función I la Imagen es la B del cuadro

número i

II. $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$ $\left(\text{entonces son } a = -\frac{3}{4} \quad b = 3 \quad c = 0\right)$

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)} = -\frac{3}{-\frac{3}{2}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$y_v = c - \frac{b^2}{4\,a} = 0 - \frac{3^2}{4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)} = 0 - \frac{9}{-3} = 3$$

Entonces como $a < 0$ Imagen (f) $= (-\infty, y_v] = (-\infty, 3]$

luego para la Función II la Imagen es la C del cuadro

constante

III. $f(x) = -x^2 - 1$ (entonces son $a = -1$ $b = 0$ $c = -1$)

$$x_v = -\frac{b}{2\,a} = -\frac{0}{2 \cdot (-1)} = 0$$

$$y_v = c - \frac{b^2}{4\,a} = -1 - \frac{0^2}{4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)} = -1 - 0 = -1$$

Entonces como $a < 0$ Imagen (f) $= (-\infty, y_v] = (-\infty, -1]$

luego para la Función II la Imagen es la D del cuadro

deriva

IV. $f(x) = x^2 - 8\,x + 15$ (entonces son $a = 1$ $b = -8$ $c = 15$)

$$x_v = -\frac{b}{2\,a} = -\frac{-8}{2 \cdot 1} = 4$$

$$y_v = c - \frac{b^2}{4\,a} = 15 - \frac{(-8)^2}{4 \cdot 1} = 15 - \frac{64}{4} = 15 - 16 = -1$$

Entonces como $a > 0$ Imagen (f) $= [y_v, +\infty) = [-1, +\infty)$

luego para la Función II la Imagen es la A del cuadro

++++++

16 a) $f(x) = -5(x+1)(x-2)$

C^0 conjunto de ceros o raíces reales
planteamos $f(x) = 0$, obtenemos la ecuación cuadrática

$-5(x+1)(x-2) = 0$

Cuando $f(x)$ está escrita en forma factorizada, como en este caso,
los ceros o raíces de $f(x)$ son los x que anulan cada uno de los factores
es decir
$f(x) = 0$ cuando $x = -1$ o cuando $x = 2$

$C^0 = \{-1, 2\}$

Calculemos analíticamente C^+

$C^+ = \{x \in Dom(f) / f(x) > 0\}$

Ponemos entonces $f(x) > 0$

$-5(x+1)(x-2) > 0 \implies$ si pasamos el -5 dividiendo del otro miembro
hay que tener cuidado con la desigualdad,
porque no se mantiene, se invierte el símbolo de $>$

Observación : miren esto

si $2 < 3$ multiplicando por -1 en ambos miembros , que sucede con la desigualdad?

$(-1)\,2 \;?\; (-1)\;3 \implies -2 \;?\; -3$ se ve que ahora

-3 es mas chico que -2,

es de cir $-2 > -3$ (obtenemos que si $2 < 3 \iff -2 > -3$)

Resultado a tener en cuenta :

**siempre que multipliquemos o dividamos por un número negativo
en ambos miembros de una desigualdad
habrá que invertir la desigualdad, es decir,
si decia menor $<$, darla vuelta como mayor $>$ y viceversa
(idem, se aplica si el símbolo es $\leq$, se da vuelta por $\geq$)**

Volviendo a

$-5\,(x+1)\,(x-2) > 0 \implies$ si pasamos el -5 dividiendo del otro miembro

quedará :

$$(x+1)\,(x-2) < \frac{0}{-5} \implies (x+1)\,(x-2) < 0 \quad (\text{es del tipo } A \cdot B < 0)$$

esta inecuación es como las inecuaciones de la práctica 1

Cuándo $A \cdot B < 0 \iff (A < 0 \text{ y } B > 0) \text{ ó } (A > 0 \text{ y } B < 0)$

planteamos esta resolución para $(x+1)\,(x-2) < 0 \implies$

$$\{(x+1) < 0 \text{ y } (x-2) > 0\} \text{ ó } \{(x+1) > 0 \text{ y } (x-2) < 0\}$$

Esto se resolvía encontrando la Intersección de los intervalos de la 1 era llave
y luego Unión con el conjunto intersección que sale de la 2 da llave, asi :

$$\{(x+1) < 0 \text{ y } (x-2) > 0\} \text{ ó } \{(x+1) > 0 \text{ y } (x-2) < 0\}$$

$$\{x < -1 \text{ y } x > 2\} \quad \text{ó} \quad \{x > -1 \text{ y } x < 2\}$$

Para la 1 era llave : En este punto,
lo que hacíamos era dibujar sobre una misma recta real
los intervalos $x < -1$ y $x > 2$ y ver cuáles son los x comunes a ambos intervalos

está claro que no existen x que sean menores que -1 y al mismo tiempo sean mayores que 2
entonces la solución de la 1 era llave S_1, es el conjunto vacío

$S_1 = \emptyset$

Para la 2 da llave : los x que pertenecen a ambos intervalos (x comunes a ambos)
tales que $x > -1$ y $x < 2$ son los que se encuentran entre -1 y 2

Entonces
$S_2 = (-1, 2)$

Finalmente, los x que verifican ambas llaves son los que pertenecen a los dos casos

$$\implies S = S_1 \cup S_2 = \emptyset \cup (-1, 2) = (-1, 2)$$

y este será el C^+ de $f(x) = -5(x+1)(x-2)$

Entonces, $C^+ = (-1, 2)$ (recuerden que a < 0 para esta f (x))

Calculemos analíticamente C^-

$C^- = \{x \in Dom(f) / f(x) < 0\}$

Ponemos entonces $f(x) < 0$

$-5(x+1)(x-2) < 0 \implies$ si pasamos el -5 dividiendo del otro miembro
hay que tener cuidado con la desigualdad,
porque no se mantiene, se invierte el símbolo de <

queda entonces $(x+1)(x-2) > 0$ (que es del tipo $A \cdot B > 0$)

Cuándo $A \cdot B > 0$?, $\Leftrightarrow (A < 0 \text{ y } B < 0)$ ó $(A > 0 \text{ y } B > 0)$

es decir : $(x+1)(x-2) > 0$

si $\{(x+1) < 0 \text{ y } (x-2) < 0\}$ ó $\{(x+1) > 0 \text{ y } (x-2) > 0\}$

$\Leftrightarrow \{x < -1 \text{ y } x < 2\}$ ó $\{x > -1 \text{ y } x > 2\}$

Para la 1 era llave :

los x que son menores que -1 y al mismo tiempo menores que 2 son los x menores que -1

entonces $S_1 = (-\infty, -1)$

Para la 2 da llave :

los x que son mayores que -1 y al mismo tiempomayores que 2 son los x mayores que 2

entonces $S_2 = (2, +\infty)$

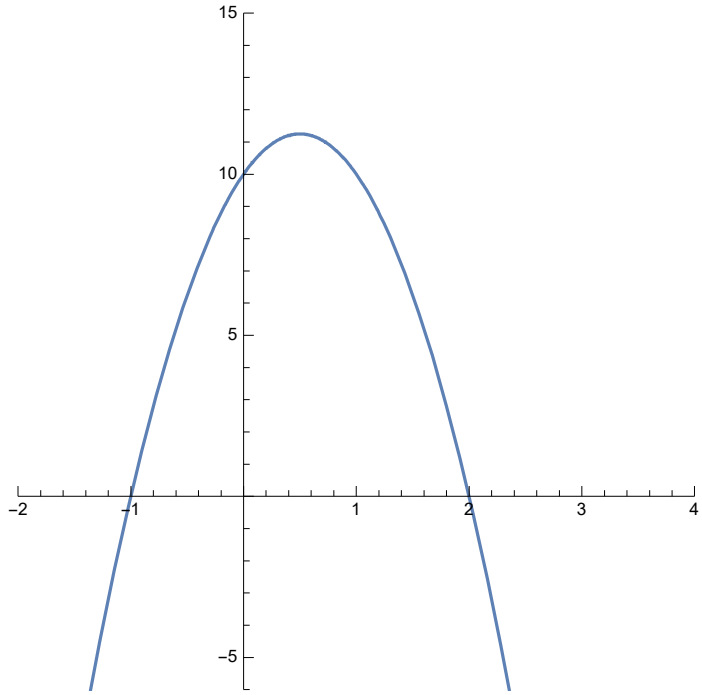
Luego $S = S_1 \cup S_2 = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

y este será el C^- de $f(x) = -5(x+1)(x-2)$

Entonces, $C^- = (-\infty, -1) \bigcup (2, +\infty)$ (recuerden que a < 0 para esta f (x))

In[18]:=
```
grafF16a =
 Plot[-5 (x + 1) (x - 2), {x, -2, 4}, PlotRange → {{-2, 4}, {-6, 15}}, AspectRatio → 1]
```
representación gráfica rango de representación cociente de aspecto

Out[18]=



++++++

"me paro en 3 y camino una distancia 1 para ambos lados
llegando a 4 para la derecha y a 2 para la izquierda, desde el 3"
o bien "encontrar los x que están a distancia 1 del 3"

Entonces $C^0 = \{2, 4\}$

Calculemos analíticamente C^+

$C^+ = \{x \in Dom(f) / f(x) > 0\}$

Ponemos entonces $f(x) > 0$

$1 - (x-3)^2 > 0 \implies$

Mirando la forma en que esta escrita esta inecuación
nos conviene despejar x usando los teoremas de Módulo asi;

$1 > (x-3)^2$ es decir $(x-3)^2 < 1$

Si aplicamos raíz cuadrada en ambos miembros y el resultado del Teorema 1 de Módulo
$\sqrt{(x-3)^2} < \sqrt{1}$

$|x-3| < 1 \implies$ aplicando el teorema 2 de módulo : $-1 < x-3 < 1$ y que si sumamos,
3 en todos los miembros, para despejar x :

$-1+3 < x < 1+3 \implies 2 < x < 4$

Es decir que las soluciones de $|x-3| < 1$ son los x que pertenecen al intervalo $(2, 4)$

Recuerden la interpretación geométrica de la inecuación con módulo con símbolo $<$:

"me paro en 3 y camino una distancia 1 para ambos lados
llegando a 4 para la derecha y a 2 para la izquierda, desde el 3 y
como la expresión de módulo dice $<$ tomo los x de adentro"
o bien "encontrar los x que están a distancia menor que 1 del 3"

Entonces, $C^+ = (2, 4)$ (recuerden que a < 0 para esta $f(x)$)

Calculemos analíticamente C^-

$C^- = \{x \in Dom(f) / f(x) < 0\}$

Ponemos entonces f (x) < 0

$1 - (x-3)^2 < 0 \implies$

Mirando la forma en que esta escrita esta inecuación
nos conviene despejar x usando los teoremas de Módulo asi;

$1 < (x-3)^2$ **es decir** $(x-3)^2 > 1$

Si aplicamos raíz cuadrada en ambos miembros y el resultado del Teorema 1 de Módulo
$\sqrt{(x-3)^2} > \sqrt{1}$

$|x-3| > 1 \implies$ **aplicando el teorema 3 de módulo :** $x - 3 > 1$ **ó** $x - 3 < -1$,
despejamos x de cada expresión :

$x > 1 + 3$ **ó** $x < -1 + 3 \implies x > 4$ **ó** $x < 2$

Es decir que las soluciones de $|x-3| > 1$ **son los x que pertenecen tanto**
al intervalo $(4, +\infty)$ **como al intervalo** $(-\infty, 2)$

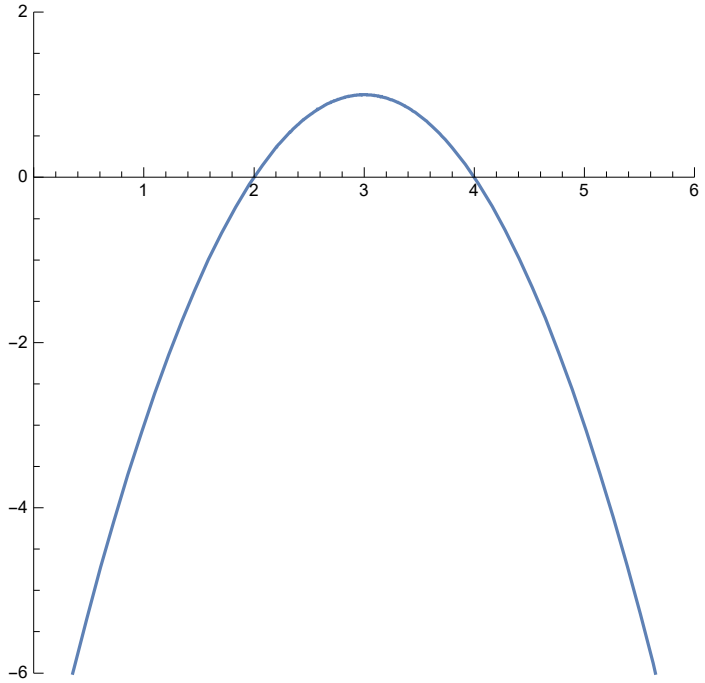
Recuerden la interpretación geométrica de la inecuación con módulo con signo > :

"me paro en 3 y camino una distancia 1 para ambos lados
llegando a 4 para la derecha y a 2 para la izquierda, desde el 3 y
como la expresión de módulo dice > tomo los x de afuera"
o bien "encontrar los x que están a distancia mayor que 1 del 3"

Entonces, $C^+ = (-\infty, 2) \bigcup (4, +\infty)$ **(recuerden que a < 0 para esta f (x))**

In[14]:=
```
grafF16b = Plot[1 - (x - 3)^2, {x, 0, 6}, PlotRange → {{0, 6}, {-6, 2}}, AspectRatio → 1]
```
representación gráfica rango de representación cociente de aspecto

Out[14]=



++++++

Entonces $C^0 = \{2, 3\}$

Calculemos analíticamente C^+

$C^+ = \{x \in Dom(f) / f(x) > 0\}$

Ponemos entonces $f(x) > 0$

$x^2 - 5x + 6 > 0 \implies$ asi escrita no es conveniente para analizar

O la pasamos a la forma factorizada $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
notación O

con los ceros x_1 y x_2 obtenidos anteriormente, queda

$f(x) = 1 \cdot (x - 2)(x - 3)$

entonces, para resolver el C^+

$(x - 2)(x - 3) > 0$

resolviendo como hicimos en el Ejercicio 16 a)

o pasamos $f(x)$ a la forma canónica $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$
buscando x_v e y_v, o completando cuadrados

$$f(x) = x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 =$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{24}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = f(x)$$

A mi me resulta más cómodo esta ultima forma canónica

Como hicimos en el Ejercicio 16 b) planteamos

$f(x) > 0 \implies$ usando la forma canónica $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} > 0$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 > \frac{1}{4} \implies \sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2} > \sqrt{\frac{1}{4}} \implies \left|x - \frac{5}{2}\right| > \frac{1}{2}$$

lo cual por el Teorema 3 de módulo da $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

Entonces, $C^+ = (-\infty, 2) \bigcup (3, +\infty)$ (recuerden que a > 0 para esta f (x))

Calculemos analíticamente C^-

$C^- = \{x \in Dom(f) / f(x) < 0\}$

Ponemos entonces $f(x) < 0$

$x^2 - 5x + 6 < 0 \implies$ asi escrita no es conveniente para analizar

O la pasamos a la forma factorizada $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

notación O

con los ceros x_1 y x_2 obtenidos anteriormente, queda

$f(x) = 1 \cdot (x - 2)(x - 3)$

entonces, para resolver el C^+

$(x - 2)(x - 3) < 0$

resolviendo como hicimos en el Ejercicio 16 a)

o pasamos f (x) a la forma canónica $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$
buscando x_v e y_v, o completando cuadrados

$$f(x) = x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 =$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{24}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = f(x)$$

A mi me resulta más cómodo esta ultima forma canónica

Como hicimos en el Ejercicio 16 b) planteamos

$f(x) < 0 \implies$ usando la forma canónica $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} < 0$

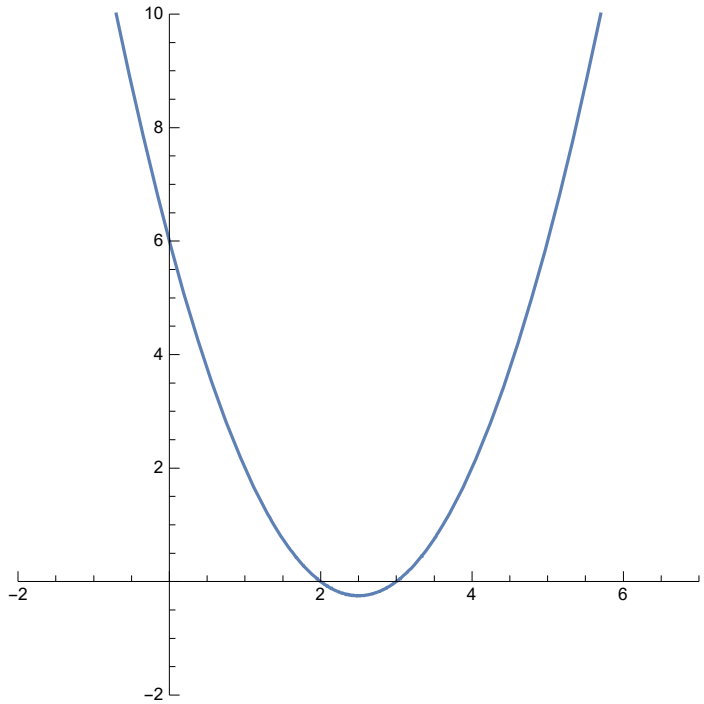
$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 < \frac{1}{4} \implies \sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2} < \sqrt{\frac{1}{4}} \implies \left|x - \frac{5}{2}\right| < \frac{1}{2}$$

lo cual por el Teorema 2 de módulo da el intervalo $(2, 3)$

Entonces, $C^{-} = (2, 3)$ (recuerden que a > 0 para esta f (x))

In[11]:=
```
grafF16c = Plot[x^2 - 5 x + 6, {x, -2, 7}, PlotRange → {{-2, 7}, {-2, 10}}, AspectRatio → 1]
```
representación gráfica — rango de representación — cociente de aspecto

Out[11]=



++++++

C^0 conjunto de ceros o raíces reales

planteamos $f(x) = 0$,

$-2x^2 + 5x + 3 = 0$

Mirando la forma en que esta escrita esta ecuación,
nos conviene utilizar la fórmula
de las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{con } a = -2 \quad b = 5 \quad c = 3$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{-4} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{-4} = \frac{-5 \pm 7}{-4}$$

$$\Longrightarrow x_1 = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{-12}{-4} = 3$$

entonces

$x_1 = -3$ y $x_2 = \frac{1}{2}$

Entonces $C^0 = \left\{-\frac{1}{2}, 3\right\}$

Calculemos analíticamente C^+

$C^+ = \{x \in \text{Dom}(f) / f(x) > 0\}$

Ponemos entonces $f(x) > 0$

$-2x^2 + 5x + 3 > 0 \implies$ asi escrita no es conveniente para analizar

O la pasamos a la forma factorizada $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

notación O

con los ceros x_1 y x_2 obtenidos anteriormente, queda

$$f(x) = 1 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3)$$

entonces, para resolver el C^+

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3) > 0$$

resolviendo como hicimos en el Ejercicio 16 a)

o pasamos $f(x)$ a la forma canónica $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$
buscando x_v e y_v, o completando cuadrados

$$f(x) = -2x^2 + 5x + 3 = -2\left(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) = -2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{3}{2}\right) =$$

$$-2\left\{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} - \frac{24}{16}\right\} =$$

$$-2\left\{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right\} = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{49}{8} = f(x)$$

A mi me resulta más cómodo esta ultima forma canónica

Como hicimos en el Ejercicio 16 b) planteamos

$f(x) > 0 \implies$ usando la forma canónica $-2\left\{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right\} > 0$ pasando el -2 dividiendo

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} < 0 \implies \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 < \frac{49}{16} \implies \sqrt{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2} < \sqrt{\frac{49}{16}} \implies \left|x - \frac{5}{4}\right| < \frac{7}{4}$$

que aplicando el teorema 2 de módulo da el siguiente intervalo solución :

$$\left|x - \frac{5}{4}\right| < \frac{7}{4} \iff -\frac{7}{4} < x - \frac{5}{4} < \frac{7}{4} \iff -\frac{7}{4} + \frac{5}{4} < x < \frac{7}{4} + \frac{5}{4} \iff \frac{-2}{4} < x < \frac{12}{4}$$

$$\iff -\frac{1}{2} < x < 3$$

lo cual por el Teorema 2 de módulo da $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

Entonces, $C^+ = \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ (concuerda con que $a > 0$ para esta $f(x)$)

Calculemos analíticamente C^-

$C^+ = \{x \in \text{Dom}(f) / f(x) > 0\}$

Ponemos entonces $f(x) > 0$

$-2x^2 + 5x + 3 > 0 \implies$ asi escrita no es conveniente para analizar

O la pasamos a la forma factorizada $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

notación O

con los ceros x_1 y x_2 obtenidos anteriormente, queda

$$f(x) = 1 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3)$$

entonces, para resolver el C^+

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3) > 0$$

resolviendo como hicimos en el Ejercicio 16 a)

o pasamos f (x) a la forma canónica $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$
buscando x_v e y_v , o completando cuadrados

$$f(x) = -2x^2 + 5x + 3 = -2\left(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) = -2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{3}{2}\right) =$$

$$-2\left\{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} - \frac{24}{16}\right\} =$$

$$-2\left\{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right\} = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{49}{8} = f(x)$$

A mi me resulta más cómodo esta última forma canónica

Como hicimos en el Ejercicio 16 b) planteamos

$f(x) < 0 \implies$ usando la forma canónica $-2\left\{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right\} < 0$ pasando el -2 dividiendo

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} > 0 \implies \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 > \frac{49}{16} \implies \sqrt{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2} > \sqrt{\frac{49}{16}} \implies \left|x - \frac{5}{4}\right| > \frac{7}{4}$$

que aplicando el teorema 3 de módulo da el siguiente intervalo solución :

$$\left|x - \frac{5}{4}\right| > \frac{7}{4} \iff x - \frac{5}{4} > \frac{7}{4} \text{ ó } x - \frac{5}{4} < -\frac{7}{4} \iff x > \frac{7}{4} + \frac{5}{4} \text{ ó } x < -\frac{7}{4} + \frac{5}{4}$$

es decir $\iff x > \frac{12}{4}$ ó $x < -\frac{2}{4}$ o sea $x > 3$ ó $x < -\frac{1}{2}$

Las soluciones son los x que pertenecen a un conjunto o al otro, o sea se toman todos,

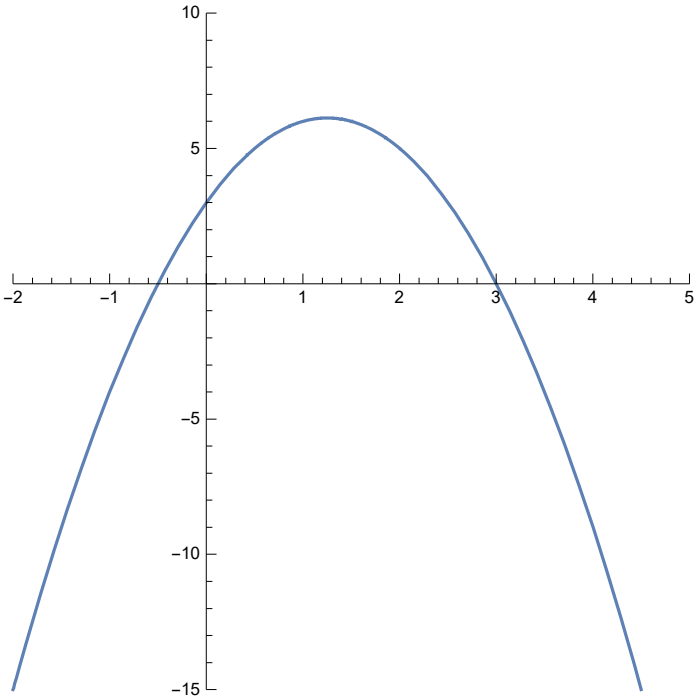
$$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \bigcup (3, +\infty)$$

Entonces,

$$C^- = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \bigcup (3, +\infty)$$ (concuerda con que $a > 0$ para esta $f(x)$)

```
grafF16d =
 Plot[-2 x^2 + 5 x + 3, {x, -2, 5}, PlotRange → {{-2, 5}, {-15, 10}}, AspectRatio → 1]
```

representación gráfica rango de representación cociente de aspecto



++++++

Ponemos entonces $f(x) > 0$

$-2x^2 + 8 > 0 \implies -2x^2 >$
-8 pasando el -2 dividiendo y recordando de dar vuelta la desigualdad

$$x^2 < \frac{-8}{-2} \implies \sqrt{x^2} < \sqrt{4} \implies |x| < 2$$

Por resultado del Teoreama 2 de módulo : $|x| < 2 \iff -2 < x < 2$

Entonces, $C^+ = (-2, 2)$ (concuerda con que $a < 0$ para esta $f(x)$)

Calculemos analíticamente C^-

$C^- = \{x \in Dom(f) / f(x) < 0\}$

Ponemos entonces $f(x) < 0$

$-2x^2 + 8 < 0 \implies -2x^2 <$
-8 pasando el -2 dividiendo y recordando de dar vuelta la desigualdad

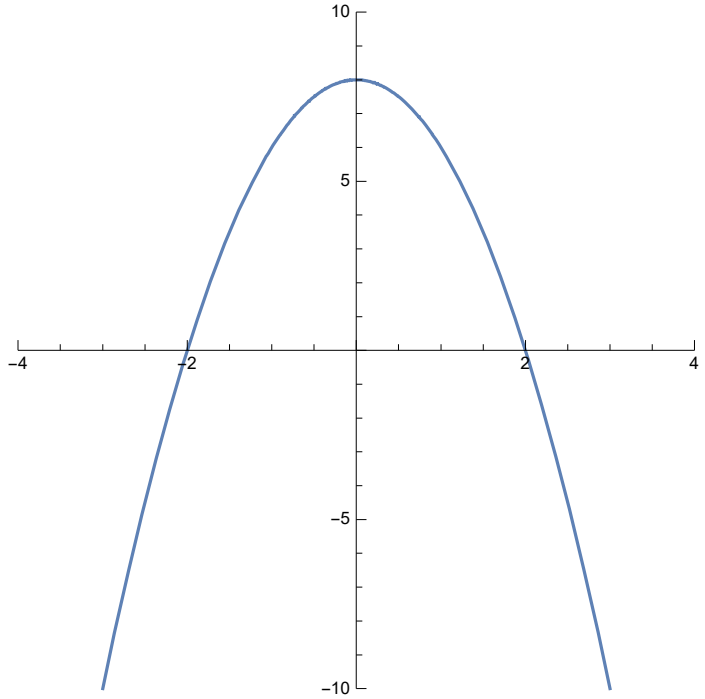
$$x^2 > \frac{-8}{-2} \implies \sqrt{x^2} > \sqrt{4} \iff |x| > 2$$

Por resultado del Teoreama 3 de módulo : $|x| > 2 \iff x > 2$ ó $x < -2$

Entonces,
$C^- = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ (concuerda con que $a < 0$ para esta $f(x)$)

In[5]:=
```
grafF16e = Plot[-2 x^2 + 8, {x, -4, 4}, PlotRange → {{-4, 4}, {-10, 10}}, AspectRatio → 1]
```
representación gráfica rango de representación cociente de aspecto

Out[5]=



++++++

Ponemos entonces f (x) > 0

$3\,x^2 - 9\,x > 0 \implies 3\left(x^2 - 3\,x\right) > 0$ **pasando el 3 dividiendo y siendo** $\frac{0}{3} = 0$

$\implies x^2 - 3\,x > 0$

completando cuadrados $x^2 - 2 \cdot x \quad \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

tendremos que resolver

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} > 0 \implies \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 > \frac{9}{4} \implies \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2} > \sqrt{\frac{9}{4}} \implies$$

$$\implies \left|x - \frac{3}{2}\right| > \frac{3}{2}$$

Por resultado del Teoreama 3 de módulo :

$$\left|x - \frac{3}{2}\right| > \frac{3}{2} \iff x - \frac{3}{2} > \frac{3}{2} \text{ ó } x - \frac{3}{2} < -\frac{3}{2} \iff x > \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \text{ ó } x < -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}$$

$\iff x > 3$ ó $x < 0$

es decir el intervalo $(-\infty, 0) \cup (3. +\infty)$

Entonces,

$C^+ = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ **(concuerda con que a > 0 para esta f (x))**

Calculemos analíticamente C^-

$C^- = \{x \in \text{Dom}(f) \,/\, f(x) < 0\}$

Ponemos entonces f (x) < 0

$3\,x^2 - 9\,x < 0 \implies 3\left(x^2 - 3\,x\right) < 0$ **pasando el 3 dividiendo y siendo** $\frac{0}{3} = 0$

$\implies x^2 - 3\,x < 0$

completando cuadrados $x^2 - 2 \cdot x \quad \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

tendremos que resolver

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} > 0 \implies \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 > \frac{9}{4} \implies \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2} > \sqrt{\frac{9}{4}} \implies$$

$$\implies \left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{3}{2}$$

Por resultado del Teoreama 3 de módulo :

$$\left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{3}{2} \iff -\frac{3}{2} < \left(x - \frac{3}{2}\right) < \frac{3}{2} \implies -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} < x < \frac{3}{2} + \frac{3}{2}$$

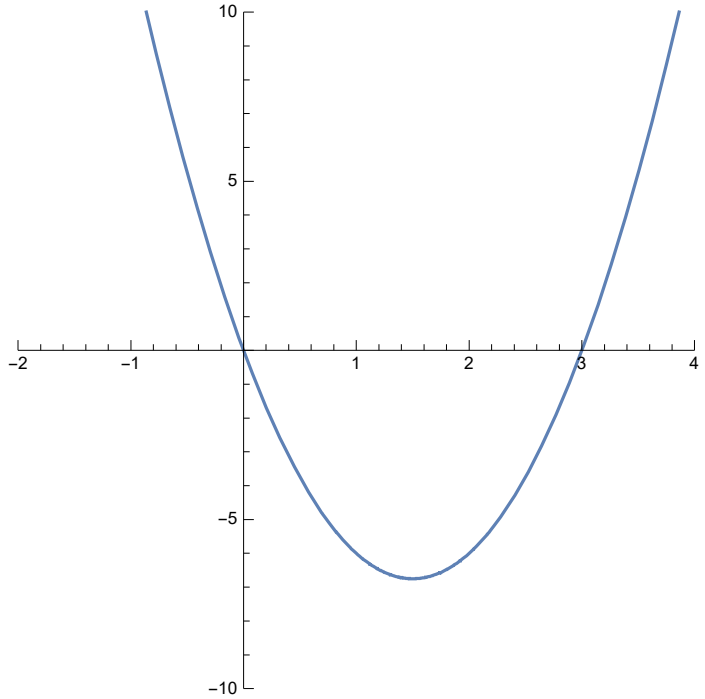
$\iff 0 < x < 3$

es decir el intervalo $(0, 3)$

Entonces, $C^- = (0, 3)$ **(concuerda con que a > 0 para esta f (x))**

In[20]:=
```
grafF16f = Plot[3 x^2 - 9 x, {x, -2, 4}, PlotRange → {{-2, 4}, {-10, 10}}, AspectRatio → 1]
```
representación gráfica rango de representación cociente de aspecto

Out[20]=



++++++

In[23]:=

Como f (x) se puede factorizar en $f(x) = 3x(x-2)$

se ve de manera rápida que $x = 0$ y $x = 2$ son raíces o ceros de f (x)

Como $a > 0$ $C^- = (0, 2)$

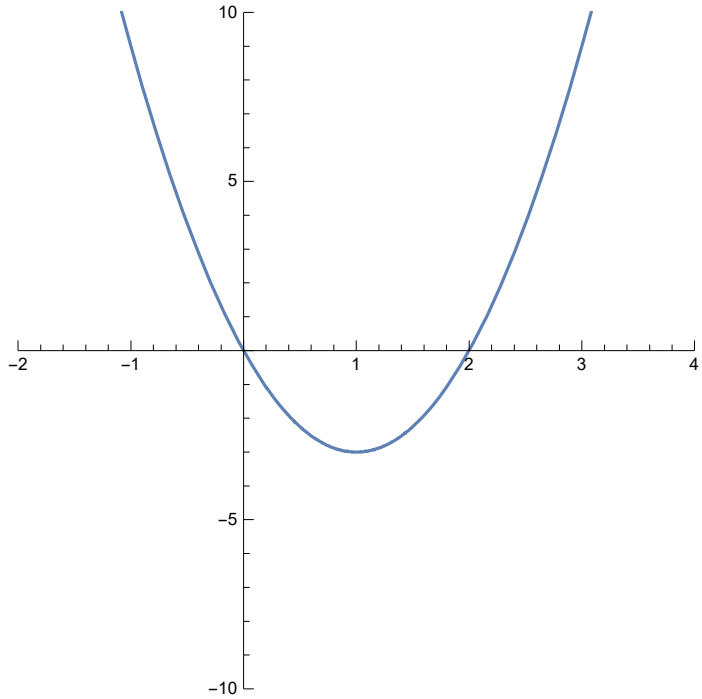
Entonces f (x) del item I tiene como C^- el que en la tabla dice D

número i de

In[23]:=
```
grafF17I = Plot[3 x^2 - 6 x, {x, -2, 4}, PlotRange → {{-2, 4}, {-10, 10}}, AspectRatio → 1]
```

representación gráfica rango de representación cociente de aspecto

Out[23]=



---

17 II $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Obtengamos C^-

$C^- = \{x \in Dom\ (f)\ /\ f\ (x) < 0\}$

Obtengamos los ceros de f (x) :

$x^2 - 4\,x + 3 = 0$

aplicando la fórmula de resolución de ecuaciones cuadráticas :
del tipo $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a} \quad \text{con } a = 1 \quad b = -4 \quad c = 3$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

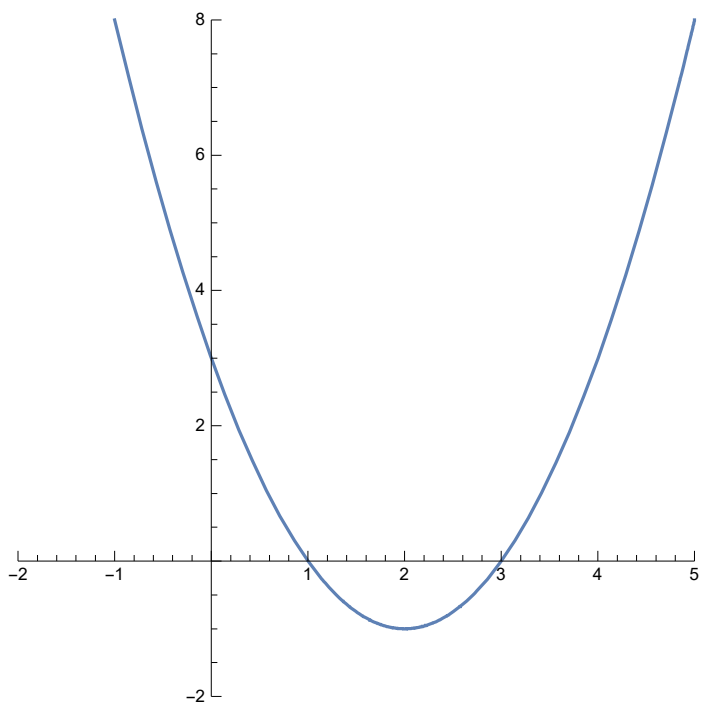
$$\Longrightarrow\ x_1 = \frac{6}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{2}{2} = 1$$

Como $a > 0$ $\quad C^- = (1, 3)$

Entonces f (x) del item II tiene como C^- el que en la tabla dice A

In[30]:=
```
grafF17II =
 Plot[ x^2 - 4 x + 3, {x, -2, 5}, PlotRange → {{-2, 5}, {-2, 8}}, AspectRatio → 1]
```
representación gráfica rango de representación cociente de aspecto

Out[30]=



---

17 III $f(x) = -x^2 + x - 3$

Obtengamos C^-

$C^- = \{x \in Dom(f) / f(x) < 0\}$

Primero obtengamos los ceros de f (x) :

$$-x^2 + x - 3 = 0$$

aplicando la fórmula de resolución de ecuaciones cuadráticas :
del tipo $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a} \quad \text{con } a = -1 \quad b = 1 \quad c = -3$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-1)} =$$

$$\frac{4 \pm \sqrt{1 - 12}}{-2}$$ como $\sqrt{-12}$ no existe f (x) no tiene raíces reales

Veamos entonces de usar la forma canónica. Para ello usamos completar cuadrados

$$f(x) = -x^2 + x - 3 = (-1)\,(x^2 - x + 3) = (-1)\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\right) =$$

$$(-1)\left\{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 3\right\} = (-1)\left\{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{12}{4}\right\} = (-1)\left\{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}\right\} =$$

$$= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{11}{4}$$

Entonces $f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{11}{4}$ es menor que 0 para cualquier $x \in \mathbb{R}$

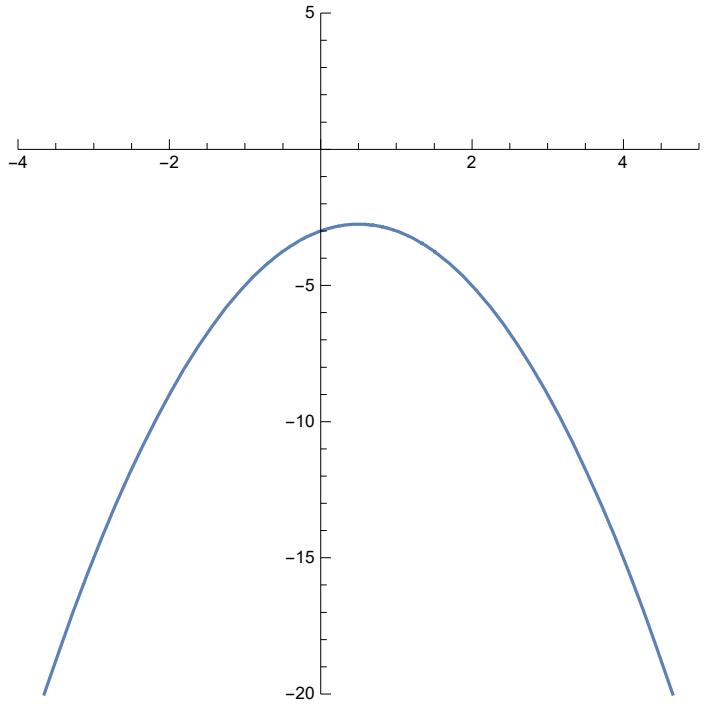
$C^- = \mathbb{R}$

Entonces f (x) del item III tiene como C^- el que en la tabla dice E

número e

In[34]:=
```
grafF17III =
 Plot[ - x^2 + x - 3, {x, -4, 5}, PlotRange → {{-4, 5}, {-20, 5}}, AspectRatio → 1]
```
representación gráfica rango de representación cociente de aspecto

Out[34]=



---

17 IV $f(x) = 2x - x^2$

Obtengamos C^-

$C^- = \{x \in Dom(f) / f(x) < 0\}$

Como $f(x)$ se puede factorizar en $f(x) = x(2 - x)$

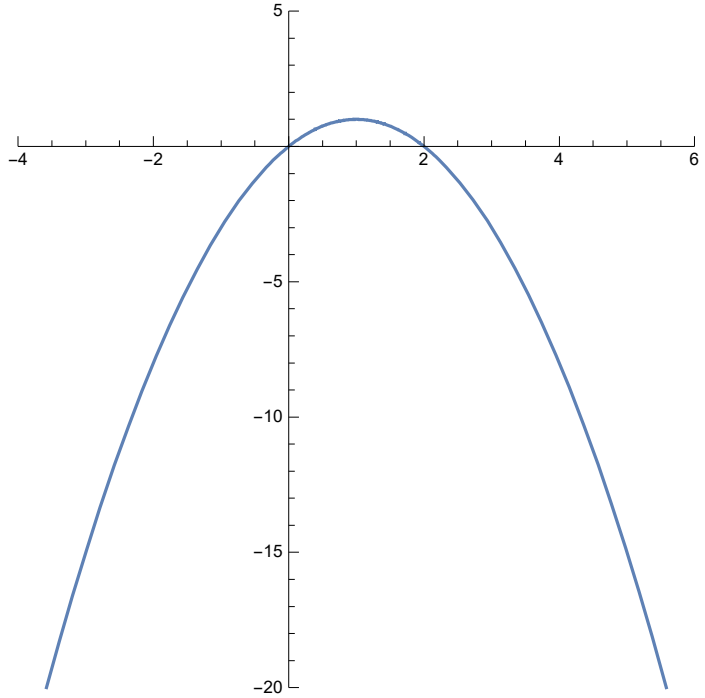
se ve de manera rápida que $x = 0$ y $x = 2$ son raíces o ceros de $f(x)$

Como $a < 0$ $\quad C^- = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Entonces $f(x)$ del item IV tiene como C^- el que en la tabla dice B

In[36]:=
```
grafF17IV = Plot[ 2 x - x^2, {x, -4, 6}, PlotRange → {{-4, 6}, {-20, 5}}, AspectRatio → 1]
```
representación gráfica rango de representación cociente de aspecto

Out[36]=



---

17 V $f(x) = -2x^2 - 8x - 6$

Obtengamos C^-

Primero obtengamos los ceros de f (x) :

$$-2x^2 - 8x - 6 = 0$$

si sacamos factor común (-2)

$(-2)\ (x^2 + 4x + 3) = 0$ **y pasamos dividiendo el** -2 **queda**

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

esto quiere decir que calcular las solciones de

$$-2x^2 - 8x - 6 = 0$$

coincidirán con las de

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

que tiene coeficientes a b c mejor manejables

aplicando la fórmula de resolución de ecuaciones cuadráticas :
del tipo $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{con } a = 1 \quad b = 4 \quad c = 3$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

entonces $x_1 = \frac{-2}{2} = -1$ **y** $x_2 = \frac{-6}{2} = -3$

Como $f(x) = -2x^2 - 8x - 6$ **tiene** $a < 0$, **entonces**

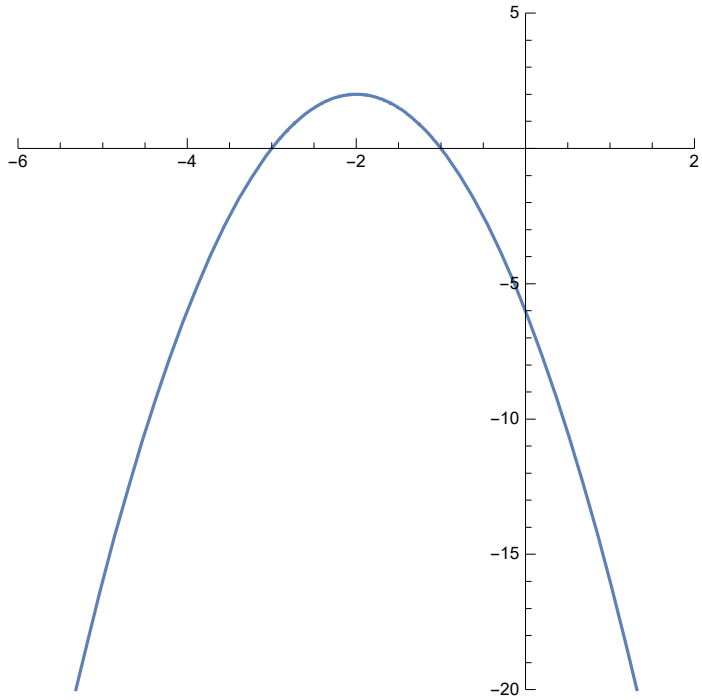
$$C^- = (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$$

Entonces f (x) del item V tiene como C^- **el que en la tabla dice C**

constante

In[38]:=
```
grafF17V =
 Plot[ - 2 x^2 - 8 x - 6, {x, -6, 2}, PlotRange → {{-6, 2}, {-20, 5}}, AspectRatio → 1]
```
representación gráfica rango de representación cociente de aspecto

Out[38]=



++++++

ii) que se corten justo en 1 punto (en este caso g (x) es tangente a f (x) en ese punto)

iii) que no se corten

Veamos que sucede en este 18 a)

$f(x) = x^2 + 5x + 4 \quad g(x) = 3x + 7$

El punto de intersección $P_\cap$ =
$(x_\cap, y_\cap)$ es un punto que pertenece al Gráfico de ambas funciones,
es decir que las coordenadas del punto de intersección $(x_\cap, y_\cap)$ al reemplazarlas
en las fórmulas de f (x) como en la de g (x) satisfacen la igualdad

Pero entonces para calcular el $P_\cap = (x_\cap, y_\cap)$ igualamos las "y" de cada función f y g,
o sea igualamos f (x) = y = g (x) y despejamos x :

$$f(x) = g(x) \implies x^2 + 5x + 4 = 3x + 7$$

$$\implies x^2 + 5x + 4 - 3x - 7 = 0 \implies x^2 + 2x - 3 = 0$$

resolvemos esta ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$
con a = 1 b = 2 c = -3

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

entonces $x_1 = \frac{-2 + 4}{2} = 1$ **y** $x_2 = \frac{-2 - 4}{2} = -3$

es decir $x_1 = 1$ **y** $x_2 = -3$

En este caso, f (x) y g (x) se cortan en dos puntos.

Pero nos faltan las ordenadas de los 2 puntos de intersección :

reemplazando x_1 y x_2 en g (x) (porque es más sencillo de calcular)

se obtienen las ordenadas

$y_1 = g(x_1) = g(1) = 3(1) + 7 = 10$

$y_2 = g(x_2) = g(-3) = 3(-3) + 7 = -2$

Por lo tanto, los puntos de intersección de f (x) con g (x) son

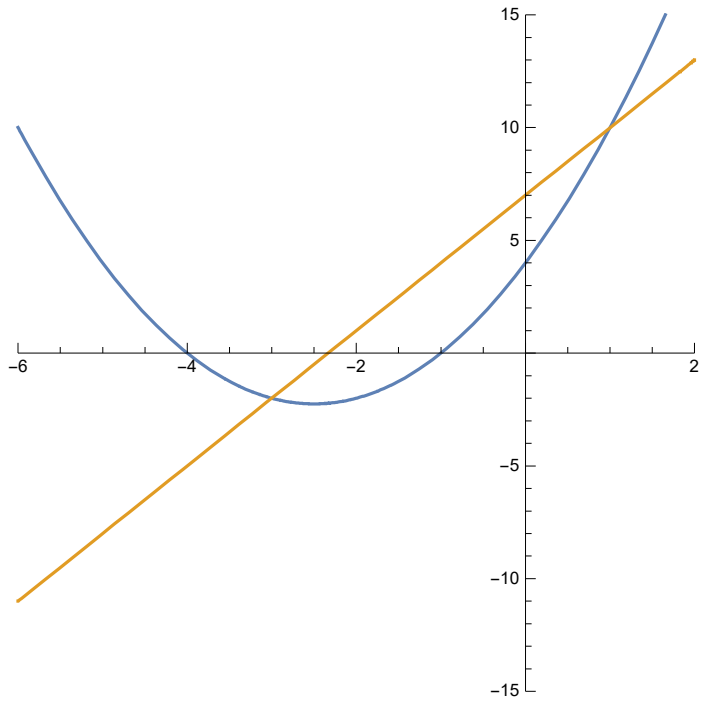
$P_\cap = (1, 10)$ y $Q_\cap = (-3, -2)$

que podemos expresar comom un conjunto

$S_\cap = \{(1, 10), (-3, -2)\}$

In[56]:=
```
grafF18a = Plot[{x^2 + 5 x + 4, 3 x + 7},
                representación gráfica
  {x, -6, 2}, PlotRange → {{-6, 2}, {-15, 15}}, AspectRatio → 1]
              rango de representación            cociente de aspecto
```

Out[56]=



---

18 b) puntos de intersección de

$f(x) = -x^2 + x + 1 \quad g(x) = -2x + 4$

Para calcular el $P_\cap = (x_\cap, y_\cap)$ igualamos las "y" de cada función f y g,
o sea igualamos f (x) = y = g (x) y despejamos x :

$f(x) = g(x) \implies -x^2 + x + 1 = -2x + 4$

$\implies 0 = -2x + 4 + x^2 - x - 1 \implies x^2 - 3x + 3 = 0$

resolvemos esta ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$

con $a = 1 \quad b = -3 \quad c = 3$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

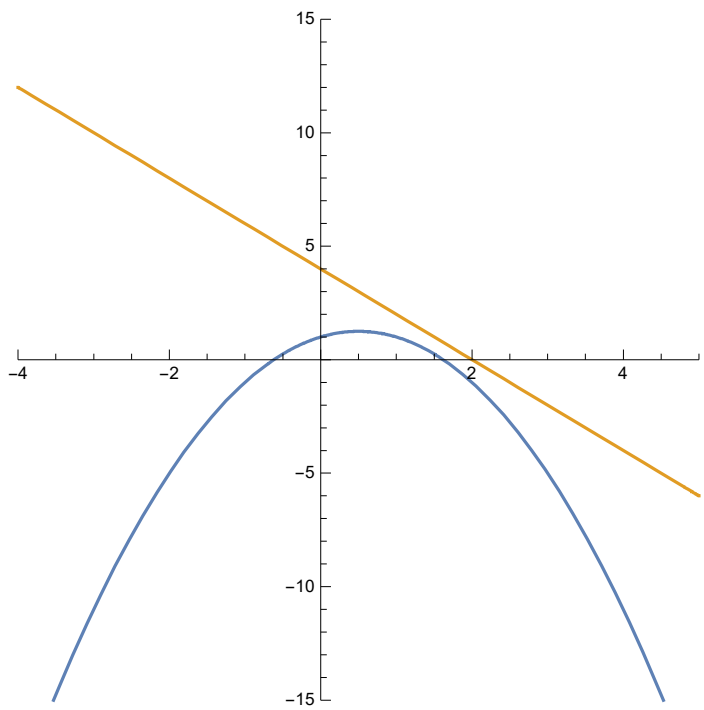
$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-3}}{2}$$ y como $\sqrt{-3}$ no existe

esto quiere decir que no habrá puntos de intersección entre f (x) y g (x)

$S_{\cap} = \emptyset$

In[59]:=
```
grafF18b = Plot[{-x^2 + x + 1, -2 x + 4},
                 representación gráfica
  {x, -4, 5}, PlotRange → {{-4, 5}, {-15, 15}}, AspectRatio → 1]
                rango de representación          cociente de aspecto
```

Out[59]=



---

18 c) puntos de intersección de

$f(x) = 3(x+1)(x+7) \quad g(x) = -15$

Primero pasamos f (x) a la forma polinómica

$3(x+1)(x+7) = 3(x^2 + x + 7x + 7) = 3(x^2 + 8x + 7) = 3x^2 + 24x + 21$

entonces $f(x) = 3x^2 + 24x + 21$

Para calcular el $P_\cap = (x_\cap, y_\cap)$ igualamos las "y" de cada función f y g,
o sea igualamos $f(x) = y = g(x)$ y despejamos x :

$f(x) = g(x) \implies 3x^2 + 24x + 21 = -15$

$\implies 3x^2 + 24x + 21 + 15 = 0 \implies 3x^2 + 24x + 36 = 0 \implies 3(x^2 + 8x + 12) = 0$

$\implies$ pasando el 3 dividiendo queda 0 del miembro derecho

$x^2 + 8x + 12 = 0$

resolvemos esta ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$
con $a = 1 \quad b = 8 \quad c = 12$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-8 \pm 4}{2}$$

entonces $x_1 = \frac{-8+4}{2} = \frac{-4}{2} = -2$ y $x_2 = \frac{-8-4}{2} = \frac{-12}{2} = -6$

es decir $x_1 = -2$ y $x_2 = -6$

Hay dos puntos de intersección, obtengamos las ordenadas de los puntos
reemplazando x_1 y x_2 en $g(x) = -15$

$y_1 = g(x_1) = g(-2) = -15$

$y_2 = g(x_2) = g(-6) = -15$

Dan -15 porque g (x) es una constante , una recta horizonal

Por lo tanto, los puntos de intersección de f (x) con g (x) son

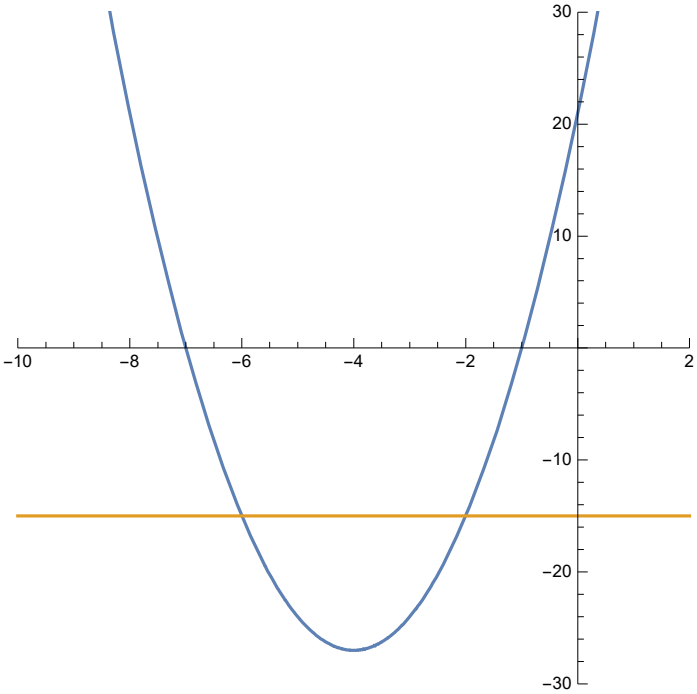
$P_\cap = (-2, -15)$ y $Q_\cap = (-6, -15)$

que podemos expresar comom un conjunto

$S_\cap = \{(-2, -15), (-6, -15)\}$

In[64]:=
```
grafF18c = Plot[{3 x^2 + 24 x + 21, -15},
  {x, -10, 2}, PlotRange → {{-10, 2}, {-30, 30}}, AspectRatio → 1]
```
representación gráfica; rango de representación; cociente de aspecto

Out[64]=



---

18 d) puntos de intersección de dos parábolas

$f(x) = 3x^2 + 5x - 7$ $\quad g(x) = 2x^2 + x + 14$

Para calcular el $P_\cap = (x_\cap, y_\cap)$ igualamos las "y" de cada función f y g,
o sea igualamos $f(x) = y = g(x)$ y despejamos x :

$f(x) = g(x) \implies 3x^2 + 5x - 7 = 2x^2 + x + 14$

$\implies 3x^2 - 2x^2 + 5x - x - 7 - 14 = 0 \implies x^2 + 4x - 21 = 0$

resolvemos esta ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$
con $a = 1$ $\quad b = 4$ $\quad c = -21$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2}$$

entonces $x_1 = \frac{-4 + 10}{2} = \frac{6}{2} = 3$ y $x_2 = \frac{-4 - 10}{2} = \frac{-14}{2} = -7$

es decir $x_1 = 3$ y $x_2 = -7$

Hay dos puntos de intersección, obtengamos las ordenadas de los puntos reemplazando x_1 y x_2 en $g(x) = 2\,x^2 + x + 14$

$y_1 = g(x_1) = g(3) = 2 \cdot 3^2 + 3 + 14 = 18 + 3 + 14 = 35$

$y_2 = g(x_2) = g(-7) = 2 \cdot (-7)^2 + (-7) + 14 = 2 \cdot 49 - 7 + 14 = 98 - 7 + 14 = 105$

Por lo tanto, los puntos de intersección de $f(x)$ con $g(x)$ son

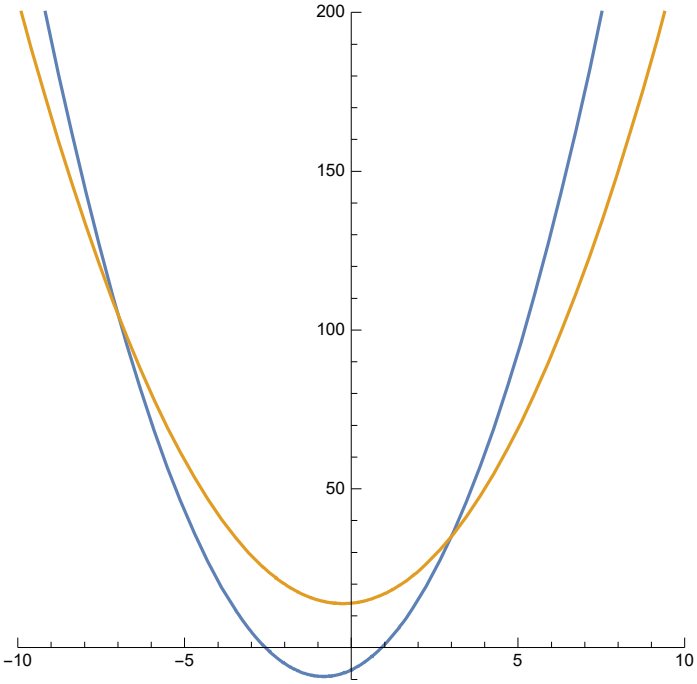
$P_\cap = (3, 35)$ y $Q_\cap = (-7, 105)$

que podemos expresar comom un conjunto

$S_\cap = \{(3, 35), (-7, 105)\}$

In[71]:=
```
grafF18d = Plot[{3 x^2 + 5 x - 7, 2 x^2 + x + 14},
                {x, -10, 10}, PlotRange → {{-10, 10}, {-10, 200}}, AspectRatio → 1]
```
representación gráfica; rango de representación; cociente de aspecto

Out[71]=



---

18 e) puntos de intersección de dos parábolas

$f(x) = 2x^2 + 5x - 7 \qquad g(x) = 2x^2 - x + 5$

Para calcular el $P_\cap = (x_\cap, y_\cap)$ igualamos las "y" de cada función f y g, o sea igualamos $f(x) = y = g(x)$ y despejamos x :

$$f(x) = g(x) \implies 2x^2 + 5x - 7 = 2x^2 - x + 5$$

observen que se cancela el término cuadrático

$$\implies 5x - 7 + x - 5 = 0 \implies 6x - 12 = 0 \implies x = \frac{12}{6} = 2$$

Esto quiere decir que hay sólo un punto de interseccion entre f y g

con $x_1 = 2$

Obtengamos la ordenada del único punto de intersección reemplazando $x_1 = 2$ en $f(x) = 2x^2 + 5x - 7$

$y_1 = g(x_1) = g(2) = 2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 7 = 8 + 10 - 7 = 11$

Por lo tanto, el punto de intersección de f (x) con g (x) es

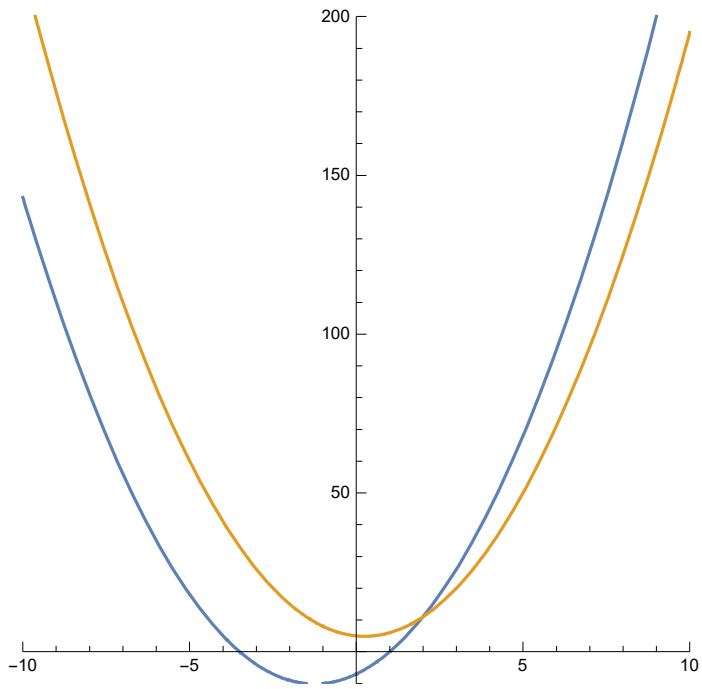
$P_\cap = (2, 11)$

que podemos expresar comom un conjunto

$S_\cap = \{(2, 11)\}$

In[73]:=
```
grafF18e = Plot[{2 x^2 + 5 x - 7, 2 x^2 - x + 5},
                representación gráfica
  {x, -10, 10}, PlotRange → {{-10, 10}, {-10, 200}}, AspectRatio → 1]
                rango de representación                cociente de aspecto
```

Out[73]=



---

18 f) puntos de intersección de f lineal tal que f (2) = 5 y f (4) = 9 y

$g(x) = x^2 + 8x + 6$

Calculamos primero $f(x)$ y como $f(2) = 5$ y $f(4) = 9$ los puntos $(2, 5)$ y $(4, 9)$ pertenecen al gráfico de f

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9-5}{4-2} = \frac{4}{2} = 2 \quad ,$$

luego $f(x) = 2x + b$

reemplazamos las coordenadas de por ej. $(2, 5)$ para obtener b

$5 = 2 \cdot 2 + b \implies 5 = 4 + b \implies 5 - 4 = b \implies 1 = b$

Entonces $f(x) = 2x + 1$

y $g(x) = x^2 + 8x + 6$

Para calcular el $P_\cap = (x_\cap, y_\cap)$ igualamos las "y" de cada función f y g, o sea igualamos $f(x) = y = g(x)$ y despejamos x :

$f(x) = g(x) \implies 2x + 1 = x^2 + 8x + 6$

$\implies 0 = x^2 + 8x + 6 - 2x - 1 \implies 0 = x^2 + 6x + 5$

resolvemos esta ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$
con $a = 1 \quad b = 6 \quad c = 5$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2}$$

entonces $x_1 = \frac{-6+4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ y $x_2 = \frac{-6-4}{2} = \frac{-10}{2} = -5$

es decir $x_1 = -1$ y $x_2 = -5$

Hay dos puntos de intersección, obtengamos las ordenadas de los puntos reemplazando x_1 y x_2 en $f(x) = 2x + 1$

$y_1 = f(x_1) = f(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$

$y_2 = f(x_2) = f(-5) = 2 \cdot (-5) + 1 = -9$

Por lo tanto, los puntos de intersección de f (x) con g (x) son

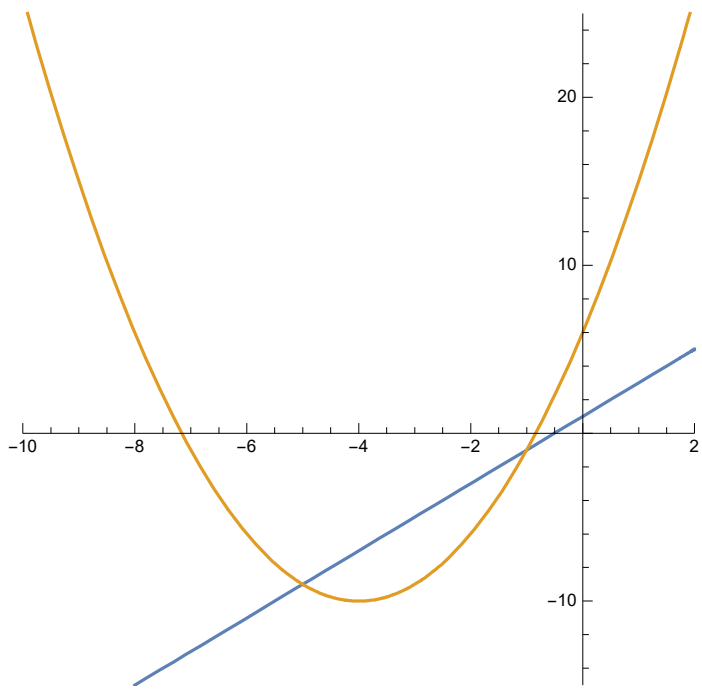
$P_\cap = (-1, -1)$ **y** $Q_\cap = (-5, -9)$

que podemos expresar comom un conjunto

$S_\cap = \{(-1, -1), (-5, -9)\}$

In[82]:=
```
grafF18f = Plot[{2 x + 1, x^2 + 8 x + 6}, {x, -10, 2},
                 representación gráfica
  PlotRange → {{-10, 2}, {-15, 25}}, AspectRatio → 1]
  rango de representación            cociente de aspecto
```

Out[82]=



++++++

Ejercicio 19.- Hallar la función cuadrática f.

a. El gráfico de f tiene vértice $V=(4,5)$ y pasa por el punto $(3,3)$.

b. El conjunto de positividad de f es $(0;6)$ e $\operatorname{Im} f=(-\infty;4]$.

c. El intervalo de crecimiento de f es $[3;+\infty)$, su imagen es $[-2;+\infty)$ y $f(4)=6$.

---

19 a) f tiene Vértice en el (4, 5) y pasa por P = (3, 3)

Usamos la forma canónica de la función cuadrática $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$

Reemplazando los valores del vértice : $f(x) = a(x-4)^2 + 5$

Como pasa por el punto (3, 3) las coordenadas deben satisfacer la fórmula de f (x)
es decir $3 = a(3-4)^2 + 5 \implies 3 - 5 = a(-1)^2 \implies -2 = a \cdot 1 \implies -2 = a$

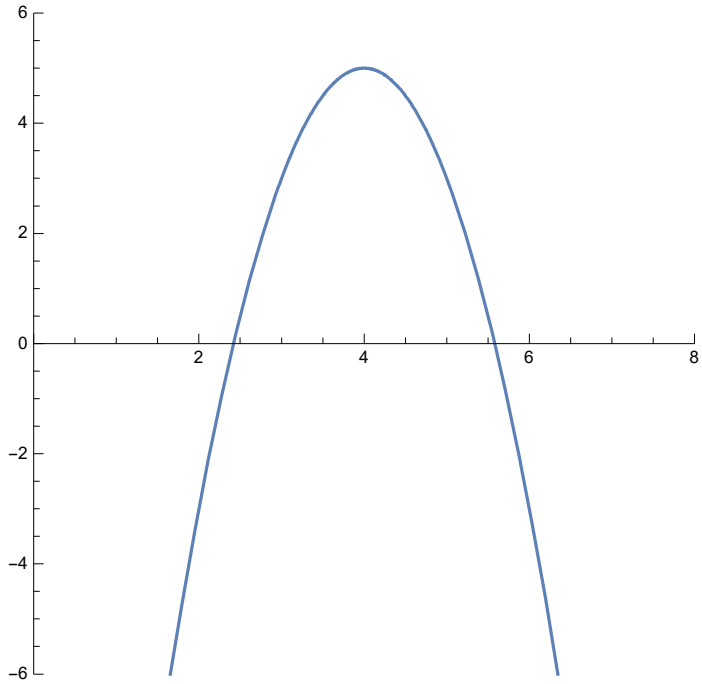
la expresion de f (x) queda entonces $f(x) = -2(x-4)^2 + 5$

In[83]:= **Expand[$-2(x-4)^2 + 5$]**
expande factores

Out[83]= $-27 + 16x - 2x^2$

In[100]:=
```
grafF19a =
 Plot[-2 x^2 + 16 x - 27, {x, 0, 8}, PlotRange → {{0, 8}, {-6, 6}}, AspectRatio → 1]
```
representación gráfica rango de representación cociente de aspecto

Out[100]=



---

19 b) encontrar f cuadrática tal que el C^+ de f es (0, 6) y la Imagen de f = (-∞, 4]

como el conjunto Imagen de la función cuadrática es (-∞, 4] ⟹ $y_v = 4$

Como el $C^+ = (0, 6)$, $a < 0$ y el conjunto de ceros o raíces es $C^0 = \{0, 6\}$

Entonces podemos escribir una forma factorizada de f (x)

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, con $x_1 = 0$ y $x_2 = 6$

$f(x) = a \cdot x(x - 6)$

Dado que $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$ entonces $x_v = \frac{0 + 6}{2} = 3$

Entonces, $V = (3, 4)$

reemplazando estas coordenadas en la expresión factorizada de $f(x) = a \cdot x\,(x - 6)$

$4 = a \cdot 3\,(3 - 6) = a \cdot 3 \cdot (-3)$ es decir $4 = -9\,a$

despejando $a = -\frac{4}{9}$

$$f(x) = \left(-\frac{4}{9}\right) x\,(x - 6) = \left(-\frac{4}{9}\right)(x^2 - 6\,x) = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{9} \cdot 6\,x = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3} \cdot 2\,x = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x$$

la expresion de f (x) queda entonces

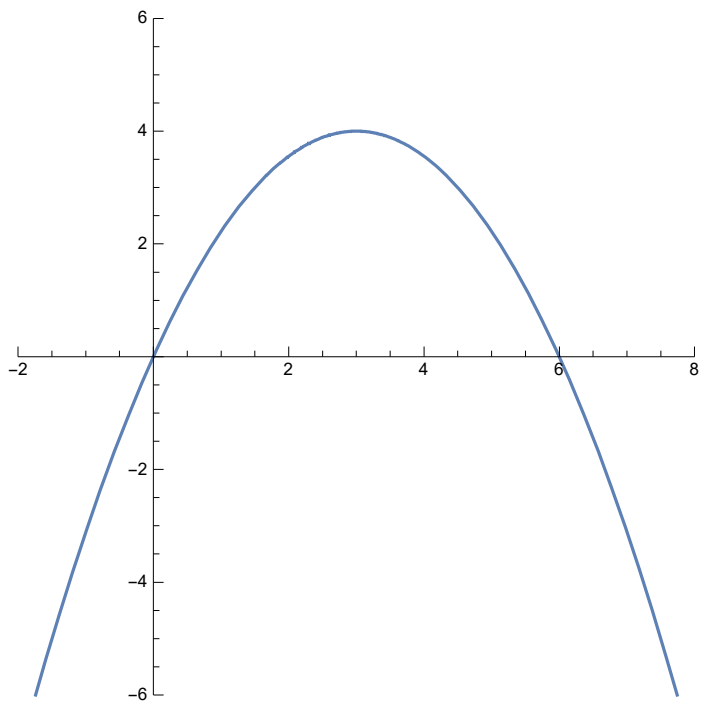
$$f(x) = -\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x \quad \text{ó} \quad f(x) = \left(-\frac{4}{9}\right) x\,(x - 6)$$

In[101]:= grafF19b =

```
Plot[-4/9 x^2 + 8/3 x, {x, -2, 8}, PlotRange → {{-2, 8}, {-6, 6}}, AspectRatio → 1]
```

representación gráfica — rango de representación — cociente de aspecto

Out[101]=



---

19 c) encontrar f cuadrática tal que el $I_{crec} = [3, +\infty)$,
la Imagen de $f = [-2, +\infty)$ y que $f(4) = 6$

Veamos :

que Imagen de f = $[-2, +\infty)$ quiere decir que $y_v = -2$ y además $a > 0$

Entonces, el gráfico de f es una parábola que "sonríe",
por lo tanto la parábola decrece entre $(-\infty, x_v)$ y crece en el intervalo $(x_v, +\infty)$
(hagan un dibujo esquemático del tipo de parábola del que estamos hablando)

Como se puede apreciar, el enunciado tiene un error en el intervalo de crecimiento,
debería haber dicho $I_{crec} = (3, +\infty)$, sin incluir al 3

Justo en $x = 3$, ni crece ni decrece, ese es un punto importante de f (x)
" el x_v=3 es el x para el que
alcanza el valor mínimo y el valor mínimo es y_v=-2"

Entonces nos están dando el $x_v = 3$ y el $y_v = -2$
$V = (3, -2)$

A partir de la forma canónica de f (x)

$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$, reemplazando los valores de $x_v = 3$ y de $y_v = -2$

tenemos

$$f(x) = a(x-3)^2 + (-2) = a(x-3)^2 - 2$$

Como además f (x) pasa por el punto $(4, 6)$ (dado que $f(4) = 6$)

reemplazando estas coordenadas en f (x) podemos despejar a

$$6 = a(4-3)^2 - 2 \implies 6 = a \cdot 1 - 2 \implies 6 = a - 2 \implies a = 8$$

Ya tenemos f (x)

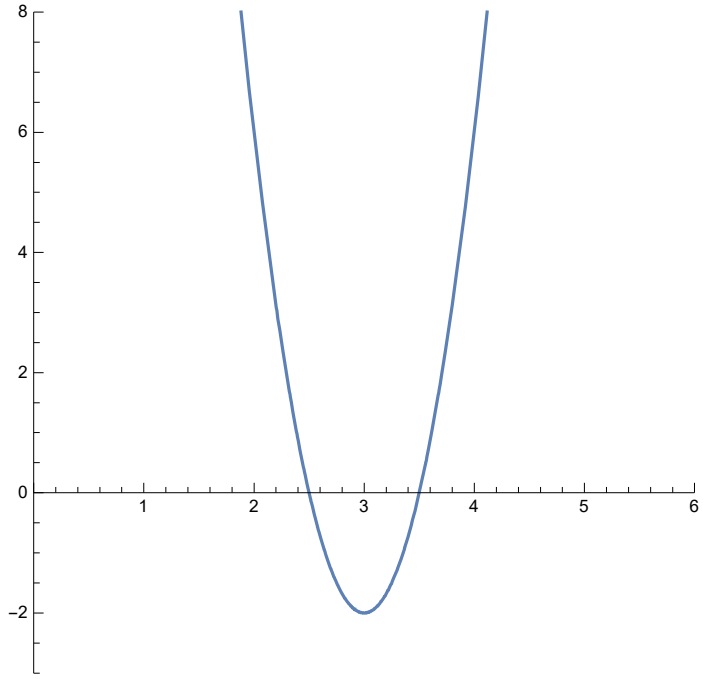
$f(x) = 8(x-3)^2 - 2$ o bien desarrollando

$$f(x) = 8(x^2 - 6x + 9) - 2 = 8x^2 - 48x + 72 - 2 = 8x^2 - 48x + 70$$

Entonces $f(x) = 8x^2 - 48x + 70$

In[107]:=
```
grafF19c = Plot[8 x^2 - 48 x + 70, {x, 0, 6}, PlotRange → {{0, 6}, {-3, 8}}, AspectRatio → 1]
```
representación gráfica — rango de representación — cociente de aspecto

Out[107]=



++++++

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

entonces $x_1 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$ y $x_2 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

es decir $x_1 = 3$ y $x_2 = -2$

Como g (x) tiene los mismos ceros o raíces que f (x) la forma factorizada de g será

$g(x) = A\,(x - x_1)\,(x - x_2) = A\,(x-3)\,(x-(-2)) = A\,(x-3)\,(x+2)$

es decir

$g(x) = A\,(x-3)\,(x+2)$

Ahora ajustamos que pase por $(1, 24)$ (dado que $g(1) = 24$)

reemplazando las coordenadas de $(1, 24)$ en la expresión factorizada de g (x)

$24 = A\,(1-3)\,(1+2) = A\,(-2)\,(3) = A\,(-6)$ es decir $24 = A\,(-6)$

entonces $A = -4$

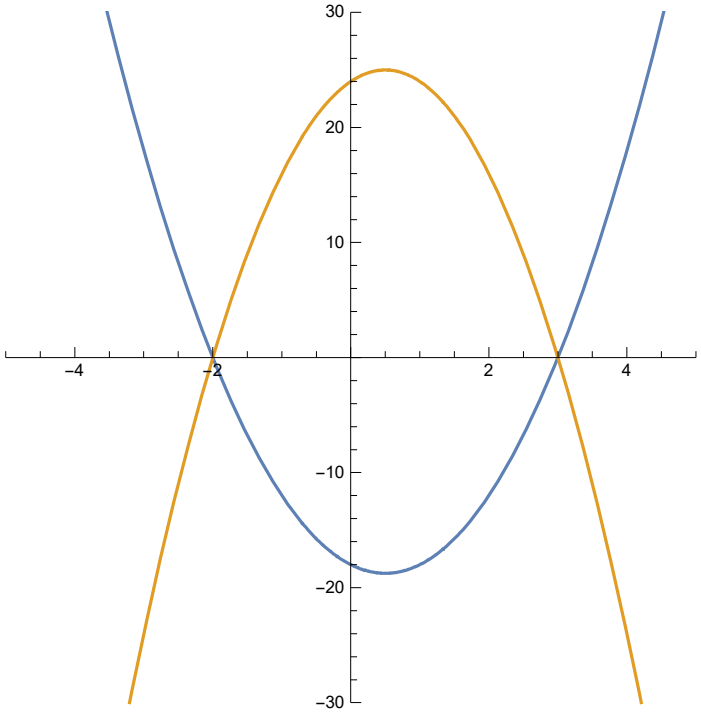
Luego, $g(x) = (-4)\,(x-3)\,(x+2) = (-4)\,(x^2 - 3x + 2x - 6) = (-4)\,(x^2 - x - 6)$

Entonces $g(x) = -4x^2 + 4x + 24$

f (x) es la color azul; g (x) es la de color naranja

In[114]:=
```
grafF20 = Plot[{3 x^2 - 3 x - 18, -4 x^2 + 4 x + 24},
                representación gráfica
  {x, -5, 5}, PlotRange → {{-5, 5}, {-30, 30}}, AspectRatio → 1]
                rango de representación          cociente de aspecto
```

Out[114]=



++++++

a) cual es el costo de un cuadro de $a = 10$ cm?

si $a = 10$ cm $\Longrightarrow$ $b = 2\,a = 20$ cm

el area del rectángulo (cuadro) es de $A = b \times a = 20 \times 10\ cm^2 = 200\ cm^2$

Entonces la placa del fondo tendrá esa superficie de $200\ cm^2$

Como el costo de la placa del fondo es de 0.10 \$ por cm^2, el costo de toda la placa del fondo es de $200\ cm^2 \times 0.10\ \$ / cm^2 = 20\ \$$

Falta sumar el costo d e las varillas

como $a = 10$ cm $b = 2\,a = 2 \times 10 = 20$ cm

el perímetro del rectángulo da cuántos cm de varillas debemos agregar al cuadro

$P = 2\,b + 2\,a$

y como $b = 2\,a$,

$P = 2\,(2\,a) + 2\,a = 4\,a + 2\,a = 6\,a = 6 \times 10\ cm = 60\ cm$

El perímetro de varillas a agregar es de 60 cm

y como las varillas cuestan 2 \$ por cm tendremos un costo de $\frac{2\ \$}{cm} \times 60\ cm = 120\ \$$

Entonces, placa del fondo + varillas $= 20\ \$ + 120\ \$ = 140\ \$$ (varillas caras)

Este será el costo de los materiales de un cuadro de $a = 10$ cm

placa del fondo + varillas $= 140\ \$$

---

b) Si el costo en materiales de un cuadro es de 225 \$
(placa del fondo + varillas)

cuales son las dimensiones del cuadro?

$225\ \$ =$ Superficie del fondo $\cdot\ 0.10\ \$ / cm^2 +$ longitud de varillas $\cdot\ 2\ \$ / cm$

$225\ \$ = b \cdot a \cdot 0.10\ \$ / cm^2 +$ perímetro $\times\ 2\ \$ / cm$

como $b = 2\,a$ y perímetro $= 2\,b + 2\,a = 2 \cdot 2\,a + 2\,a = 6\,a$

queda

$255\,\$ = 2\,a \cdot a \cdot 0.10\,\$/cm^2 + 6\,a \cdot 2\,\$/cm = 2 \cdot a^2 \cdot 0.10 + 6\,a \cdot 2 \qquad (\text{en } \$)$

Entonces $225 = 0.2\,a^2 + 12\,a$, es decir , pasando el 225 restando

$0 = 0.2\,a^2 + 12\,a - 225$

Hay que resolver esta ecuación cuadrática $\quad 0 = (0.2)\,x^2 + 12\,x - 225$

pero transformemosla un poco para que tenga números más manejables

como $0.2 = \dfrac{2}{10}$

Sacamos factor común $\dfrac{2}{10}$

entonces $\quad 0 = \dfrac{2}{10}\left(x^2 + 12 \cdot \dfrac{10}{2}\,x - 225 \cdot \dfrac{10}{2}\right) = \dfrac{2}{10}\left(x^2 + 60\,x - 1125\right)$

es decir $\;0 = x^2 + 60\,x - 1125$

ahora con la fórmula

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a} \quad$ con $a = 1 \;\; b = 60 \;\; c = -1125$

$$x_{1,2} = \frac{-60 \pm \sqrt{60^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1125)}}{2 \cdot 1} = \frac{-60 \pm \sqrt{3600 + 4500}}{2} = \frac{-60 \pm \sqrt{8100}}{2} = \frac{-60 \pm 90}{2}$$

entonces

$x_1 = \dfrac{-60 + 90}{2} = \dfrac{30}{2} = 15 \quad$ y

$x_2 = \dfrac{-60 - 90}{2} = \dfrac{-150}{2} = -75$ (que vamos a descartar prque es negativa)

es decir , la solución que sirve es $\;x_1 = 15$

Entonces el cuadro tiene a = 15 cm y b = 30 cm

Veamos que es cierta esta afirmación

si a = 15 cm y b = 30 cm

Superfice del fondo = a b = 15 × 30 = 450 cm²

P = 2 b + 2 a = 2 (2 a) + 2 a = 6 a = 6 · 15 cm = 90 cm

costo de materiales :

superficie del fondo * 0.1 $ / cm² = 450 cm² · 0.1 $ / cm² = 45 $

costo de las varillas = perímetro · 2 $ / cm = 90 cm · 2 $ / cm = 180 $

Costo de materiales con a = 15 cm = 45 $ + 180 $ = 225 $ OK!!

++++++

a) el área de la abertura es $S(x) = x \cdot (1.6 - x)$

a) Cuál es al área de la abertura si $b = x = 0.40\,m$

$S(x) = x \cdot (1.6 - x)$

$S(0.40) = 0.40 \cdot (1.6 - 0.40) = 0.40 \cdot 1.2 = 0.48$

$S(0.60) = 0.60 \cdot (1.6 - 0.60) = 0.60 \cdot 1.0 = 0.60$

$S(0.90) = 0.90 \cdot (1.6 - 0.90) = 0.90 \cdot 0.7 = 0.63$

b) Si $S(x) = 0.55\,m^2$

cuál debe ser la base x? cuantas posibilidades hay?

$$0.55 = x \cdot (1.6 - x) = 1.6\,x - x^2 \implies 0.55 - 1.6\,x + x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a} \quad \text{con} \quad a = 1 \quad b = -1.6 \quad c = 0.55$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1.6) \pm \sqrt{(-1.6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0.55}}{2 \cdot 1} = \frac{1.6 \pm \sqrt{2.56 - 2.2}}{2} = \frac{1.6 \pm \sqrt{0.36}}{2} = \frac{1.6 \pm 0.6}{2}$$

entonces

$$x_1 = \frac{1.6 + 0.6}{2} = \frac{2.2}{2} = 1.1 \quad y$$

$$x_2 = \frac{1.6 - 0.6}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

La base x puede ser 1.1 o 0.5 , es decir existen 2 dos posibilidades

c) es posible hacer una ventana cuya S (x) sea de $1.20\,m^2$? (   )

$1.20 = x \cdot (1.6 - x) = 1.6\,x - x^2$

$0 = 1.6\,x - x^2 - 1.20$

es decir $-x^2 + 1.6\,x - 1.2 = 0 \implies x^2 - 1.6\,x + 1.2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a} \quad \text{con} \quad a = 1 \quad b = -1.6 \quad c = 1.2$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1.6) \pm \sqrt{(-1.6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1.2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1.6 \pm \sqrt{2.56 - 4.8}}{2} = \frac{1.6 \pm \sqrt{-2.24}}{2}$$

como no existe $\sqrt{-2.24}$

No se puede obtener una solución (base) para una ventana de 1.20 m^2

++++++

$\Longrightarrow \quad 0 = \frac{1}{2} x^2 - 162 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 2 \cdot 162 = 324 \Longrightarrow$

$|x| = \sqrt{324} = 18 \Longrightarrow \quad x = 18 \text{ o } x = -18$

-18 no puede ser el radio $\Longrightarrow$ x = 18

El radio de la torta cuyo precio es de 192 $ es de 18 cm

FUNCIONES POLINÓMICAS

Ejercicio 24.-

a. Dada $f(x) = 5x^4 + 7x^3 - 28x^2 - 12x$, encontrar todos los puntos donde el gráfico de f corta al eje x, sabiendo que $f(-3) = 0$.

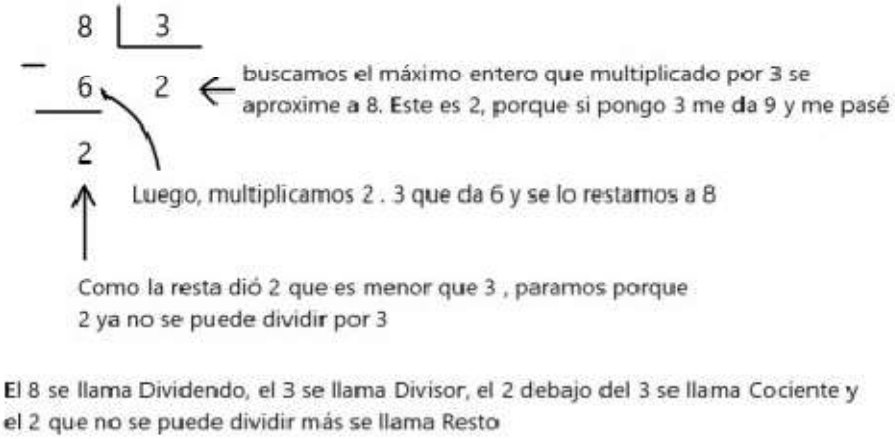
b. Encontrar el conjunto de ceros de $f(x) = x^6 \quad 5x^4 \quad x^5 \quad 3x^3$, sabiendo que $f(-1) = 0$.

Algoritmo de división de polinomios, Ruffini y Teorema del Resto y sus resultados

Vamos a explicar en este punto lo que se conoce como "Algoritmo de la división de polinomios" para el ejercicio tipo 24 de la Práctica 2

Recordemos como dividimos dos números enteros (Z : conjunto de los números enteros : positivos, negativos y el cero)

Por ejemplo : 8 dividido 3



El 8 se llama Dividendo, el 3 se llama Divisor, el 2 debajo del 3 se llama Cociente y el 2 que no se puede dividir más se llama Resto

El algoritmo de la división de números enteros dice entonces que un P dividido Q es igual a un C cociente más un Resto R, R debe ser mayor que 0, es decir:

P = Q . C + R, en nuestro ejemplo: 8 = 3 . 2 + 2

Cuánto dará la división de 5 con -2 ? por el algoritmo será: **5 = (-2) . 3 + 1**
Y la división de -11 con 3 ? será: **-11 = 3 . (-4) + 1**

Otro resultado importante :

Se dice que un número entero P es divisible por Q, cuando el resto de la division entera R es 0

Ejemplo : 8 es divisible por 4 porque 8 = 4.2 + 0
12 es divisible por 2, por 3, por 4 y por 6, porque 12 = 2.6 + 0 como también 12 = 3.4 + 0
como también 12 = 4.3 + 0 o como también 12 = 6.2 + 0
-6 es divisible por 3 porque -6 = 3. (-2) + 0
10 es divisible por (-5) porque 10 = (-5) (-2) + 0

Asimismo, cuando un número como el 8 es divisible por 4 (porque el resto es 0) se dice que 8 es múltiplo de 4

Ok, esto lo saben de hace rato
(aunque lo de dividir por un numero < 0 no, ahora ya lo saben !)

Extensión a los polinomios

Lo interesante es que este algoritmo de la división de números enteros en Z puede extenderse a Polinomios P (x)

Así como tenemos un conjunto de números en Z enteros, también existe el conjunto de todos los polinomios de grado n

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots + a_n x^n$

$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \quad n \in \mathbb{N}$

valor numérico

No es la intención dar una clase de Álgebra, para lo cual debería estar mucho más preparado, sino utilizar el resultado del Algoritmo de división de Polinomios, que dice :

Sean P (x) y Q (x) dos polinomios con el grado de P (x) mayor que el grado de Q (x)

Entonces existen C (x) y R (x),

constante

denominados C (X) polinomio Cociente y R (x) polinomio Resto

constante

con grado de C (x) menor que el de P (x) y el de Q (x), y R (x) con grado menor que el de Q (x)

constante

tal que

$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$

constante

Ejemplo de división de polinomios :

Sea $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 2x - 4$ **y sea** $Q(x) = x^2 - 2x - 1$

encontremos el polinomio Cociente C (x) y

constante

el polinomio Resto R (x) de la división de polinomios

Se ordenan los polinomios poniendo los términos de mayor grado a la izquierda y descendiendo de grado

Se toma el coeficiente de mayor grado de P (x) (el 3) y se lo divide por el coeficiente de mayor grado de Q (x) (el 1) lo cual da $\frac{3}{1} = 3$

Se divide x^3 con x^2 lo cual da x elevado a la resta de los exponentes, es decir $x^{(3-2)} = x$ como cociente va quedando 3 x

Ahora se multiplica 3 x con el término del divisor de menor grado (grado , el - 1) y el resultado -3 x , se lo escribe debajo del término de P (x) correspondiente a ese grado, (grado 1)

Lo mismo se hace con los demás términos, coeficiente a coeficiente y grado con grado, aplicando la regla de los signos para cada término

Si el grado del polinomio que queda de restar todavía es mayor que el grado del divisor Q (x) , se baja el término que no se consideró (el - 4) y se procede de la misma forma hasta que el polinomio que queda de restar, tenga grado menor que el grado del divisor Q (x)

Ahi se para el procedimiento y el que quedó de restar será el polinomio resto R (x)

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & C(x) \end{array} \Longrightarrow \quad P(x) = Q(x) \,.\, C(x) + R(x)$$

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 + 2x^2 - 2x - 4 & 1x^2 - 2x - 1 \\ \hline -\,(3x^3 - 6x^2 - 3x) & 3x + 8 \\ \hline \cancel{0x^3} + 8x^2 + 1x & \end{array}$$

como el grado de este polinomio todavia es mayor o igual que el grado del divisor Q, bajo el - 4 y sigo un paso más

$3x^3 + 2x^2 - 2x - 4$

$$\begin{array}{l} +8x^2 + 1x - 4 \\ -\,(+8x^2 - 16x - 8) \\ \hline 0x + \underbrace{17x + 4}_{R(x)} \end{array}$$

8 dividido 1 es 8 y x^2 dividido x^2 es x^0 que es 1

luego multiplico 8 con -1 que da -8 y lo ubico debajo del -4

acá paro porque el grado del resto es menor que el grado del divisor Q(x)

Como $P(x) = Q(x) \,.\, C(x) + R(x)$

$$3x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = (x^2 - 2x - 1) \,.\, (3x+8) + (17x+4)$$

si distribuyen del lado derecho verán que se obtiene P(x)

Se obtiene : $C(x) = 3x + 8$ y $R(x) = 17x + 4$

constante

si hacen la cuenta podrán verificar que

$$3x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = (x^2 - 2x - 1)\,(3x + 8) + 17x + 4$$

Asi como con los números enteros existe el concepto de divisible o múltiplo de un número entero cuan do el resto de la divisón entera es cero, también existe para polinomios que un P (x) sea divisible por Q (x) . Eso ocurre cuando R (x) = 0

Resultado importante :

Teorema del Resto

Sea r un número real . El Resto de la división de P (x) por el monomio (x - r) es P (r)

Observen que al dividir P (x) con (x - r) existe un cociente C (x) y un resto R
constante

que es 0 o una constante

es decir P (x) = (x - r) C (x) + R
constante

Si evaluamos P (x) en r

P (r) = (r - r) C (r) + R = 0 + R = R como dice el teorema
constante

Resultados que se obtienen del Teorema del Resto

1. si r es raíz de P (x) o sea P (r) = 0, P (x) es divisible por (x - r) y viceversa
(que sea divisible quiere decir que R = 0)

Este resultado es el que se usa para, dada una raíz de f (x), ir bajando uno a uno el grado de f (x), factorizándola en factores del tipo (x - raíz)

2. Si P (x) es un polinomio de grado n y se conocen q < n raíces entonces

$P(x) = (x - r_1)\ (x - r_2)\ (x - r_3)\ \ldots\ (x - r_q).C(x)$
constante

3. Un polinomio de grado n tiene a lo sumo n ceros o raíces reales
(a lo sumo = tiene n o menos que n)

Regla de Ruffini

Este algoritmo sirve para dividir porlinomios por monomios del tipo (x - r)

Apliquemos Ruffini a $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 2x - 4$ y dividamos por el monomio (x - 2)

procedimiento : ordenando P (x) de izquierda a derecha en orden descendente desde el mayor grado al menor (P (x) ya está ordenado)

Si algún grado no apareciera en P (x) se completa con el coeficiente 0 para ese grado

Se escriben los coeficientes de cada grado en orden descendente y hacia la derecha y se traza una recta horizontal debajo de ellos.

Se traza una recta vertical a la izquierda del coeficiente de mayor grado y debajo y a la izquierda se escribe el r (del monomio x - r)

Luego se traza una recta horizontal paralela a la que está más arriba.

Vean la imagen siguiente aplicando al ejemplo

$P(x)=3x^3+2x^2-2x-4$

$Q(x)=x-2$

	3	2	-2	-4
		+	+	+
2		6	16	28
x	3	8	14	$\boxed{24}$

coeficientes del cociente con grado de P(x) menos 1 — resto

$C(x)=3x^2+8x+14$

por el algoritmo de división: $P(x)=(x-r).C(x)+R(x)$

$$3x^3+2x^2-2x-4=(x-2)(3x^2+8x+14)+24$$

Las cuentas se hacen asi :
se pone debajo de la recta horizontal de más abajo el coeficiente de mayor grado (es como que se lo baja, en el ejemplo se baja el 3)
se multiplica este coeficiente que bajamos el 3 por el r = 2,
aplicando regla de los signos
se ubica el resultado a la misma altura que la fila imaginaria a la altura del r,
pero debajo de la columna del coeficiente justo siguiente a la derecha (el 6)
se suma el 2 do coeficiente de arriba con este resultado y lo que resulta se pone debajo de la recta horizontal de abajo (el 8)
Y asi se sigue hasta llegar a la última columna de coeficientes
Finalmente se construye el polinomio cociente con los coeficientes de abajo teniendo en cuenta que el cociente tendra un grado menos que el P (x)

$C(x) = 3x^2 + 8x + 14$, $R(x) = 24$
constante

Entonces $3x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = (x-2)(3x^2+8x+14) + 24$

Veamos un caso particular, que es cuando P (x) es divisible por (x - r), o sea el resto de la división es cero, aplicando Ruffini

Este caso sucede cuando r es raíz de P (x), o sea P (r) = 0

Ejemplo

sea $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 2x - 3$ y $r = 1$ que es raíz, lo cual se ve reemplazando en $P(x)$

Entonces, $P(x)$ es divisible por $(x - 1)$ ($R(x)$ va a dar cero)

Apliquemos Ruffini

$P(x)=3x^3 + 2x^2 - 2x - 3$

$r=1$ es raíz, vamos a dividir por $x-1$

	3	2	-2	-3
1		3	5	3
	3	5	3	$\boxed{0}$

resto

Como el resto es cero P(x) es divisible por (x-1)

Entonces $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 2x - 3 = (x - 1)(3x^2 + 5x + 3)$

++++++

$P(x) = 5x^3 + 7x^2 - 28x - 12$

como -3 es raíz, estamos dividiendo por (x+3)

	5	7	-28	-12
		+		
-3		-15	24	12
	5	-8	-4	0

Entonces $P(x)=(x+3)\,(5x^2 - 8x - 4)$

Entonces $f(x) = x\,(x+3)\,(5x^2 - 8x - 4)$

Ahora para encontrar los ceros de $5x^2 - 8x - 4$ **aplicamos la fórmula de resolución de las ecuaciones cuadráticas** $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{con} \quad a = 5 \quad b = -8 \quad c = -4$$

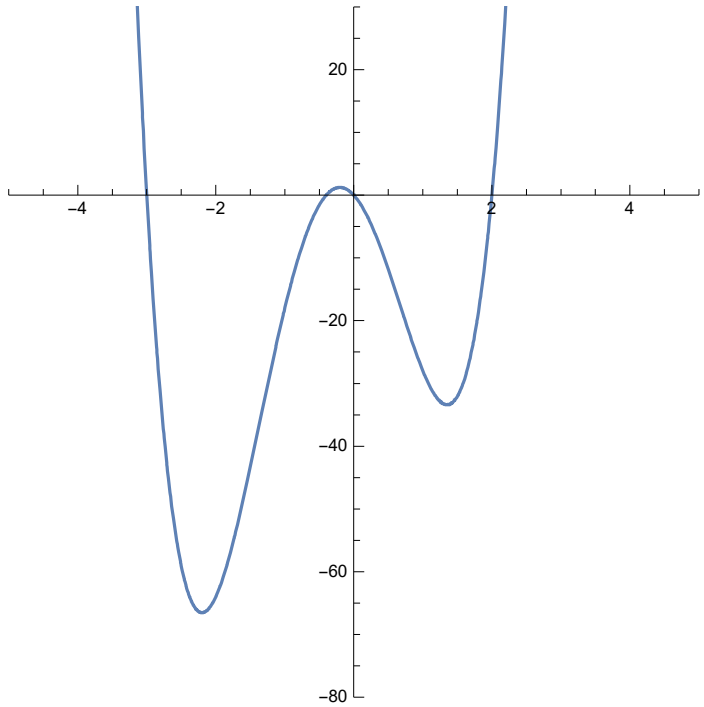
$$x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-4)}}{2 \cdot 5} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 80}}{10} = \frac{8 \pm \sqrt{144}}{10} = \frac{8 \pm 12}{10}$$

$$x_1 = \frac{8 + 12}{10} = \frac{20}{10} = 2 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{8 - 12}{10} = \frac{-4}{10} = -\frac{2}{5}$$

Entonces el $C^0 = \left\{-3, -\frac{2}{5}, 0, 2\right\}$ **y** $f(x) = 5x\,(x+3)\,(x-2)\left(x + \frac{2}{5}\right)$

In[126]:=
```
grafF24a = Plot[5 x^4 + 7 x^3 - 28 x^2 - 12 x,
                representación gráfica
  {x, -5, 5}, PlotRange → {{-5, 5}, {-80, 30}}, AspectRatio → 1]
                rango de representación            cociente de aspecto
```

Out[126]=



---

24 b) Encontrar el C^0 de $f(x) = x^6 - 5x^4 - x^5 - 3x^3$ sabiendo que $f(-1) = 0$

que $f(-1) = 0$ significa que -1 es raíz o cero de $f(x)$

Ojo con la forma en que está escrita $f(x)$ la reordenamos con grados en forma decreciente

$f(x) = x^6 - x^5 - 5x^4 - 3x^3$

Sacando factor común x^3 queda $f(x) = x^3 (x^3 - x^2 - 5x - 3)$

tenemos que factorizar $x^3 - x^2 - 5x - 3$ para ello dividimos por $(x - \text{raíz}) = (x + 1)$

$P(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$

como -1 es raíz, dividimos por (x+1)

$$
\begin{array}{l|l}
\quad x^3 - x^2 - 5x - 3 & 1x + 1 \\
\hline
-\,(x^3 + x^2) & x^2 - 2x - 3 \\
\hline
\quad -2x^2 - 5x & \\
-\,(-2x^2 - 2x) & \\
\hline
\qquad -3x - 3 & \\
-\,(-3x - 3) & \\
\hline
\qquad\qquad \boxed{0} &
\end{array}
$$

Entonces: $x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x + 1)(x^2 - 2x - 3)$

Nos faltan las raíces de $x^2 - 2x - 3$ que resolvemos por la fórmula de solución de las raíces de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{con} \quad a = 1 \quad b = -2 \quad c = -3$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{2 + 4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad y \quad x_2 = \frac{2 - 4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$x_1 = 3$ y $x_2 = -1$

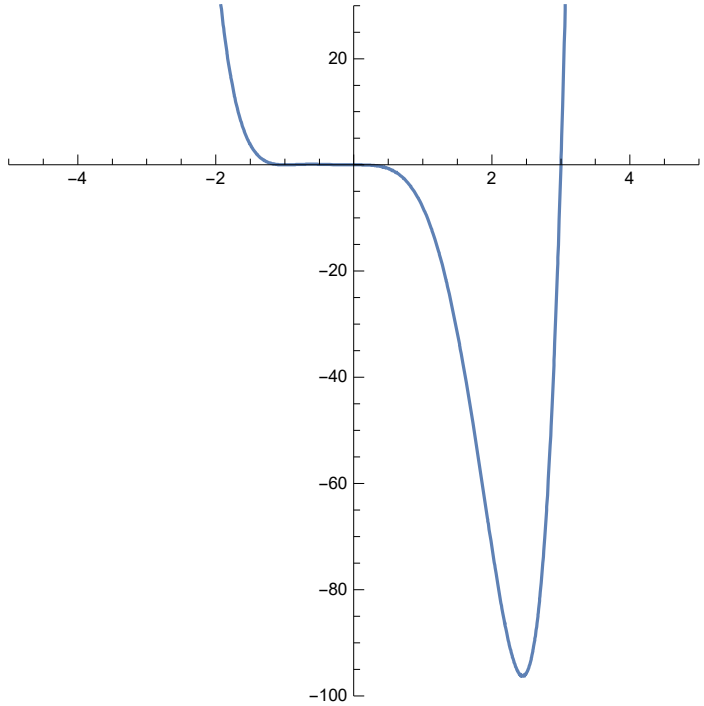
Ya tenemos todas las raíces o ceros de f (x)

Entonces el $C^0 = \{-1, 0, 3\}$ ojo -1 es raíz doble y el 0 es raíz triple

y $f(x) = x^3 (x + 1)^2 (x - 3)$

In[128]:=
```
grafF24b =
 Plot[x^6 - 5 x^4 - x^5 - 3 x^3, {x, -5, 5}, PlotRange → {{-5, 5}, {-100, 30}}, AspectRatio → 1]
```
representación gráfica rango de representación cociente de aspecto

Out[128]=



++++++

---

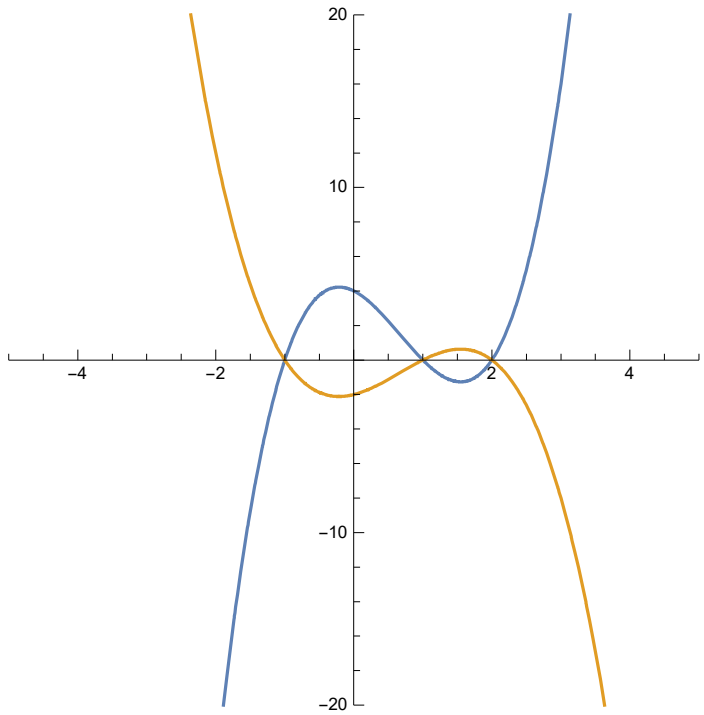
25 b) como f (3) = -8, esta es otra f distinta que la del inciso a)

$-8 = a\,(3+1)\,(3-1)\,(3-2) = a \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8\,a \implies$ sale $a = -1$

Entonces $f(x) = -(x+1)\,(x-1)\,(x-2)$ o bien $f(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 2$

In[134]:=
```
grafF25ayb = Plot[{2 x^3 - 4 x^2 - 2 x + 4, -x^3 + 2 x^2 + x - 2},
  {x, -5, 5}, PlotRange → {{-5, 5}, {-20, 20}}, AspectRatio → 1]
```
representación gráfica; rango de representación; cociente de aspecto

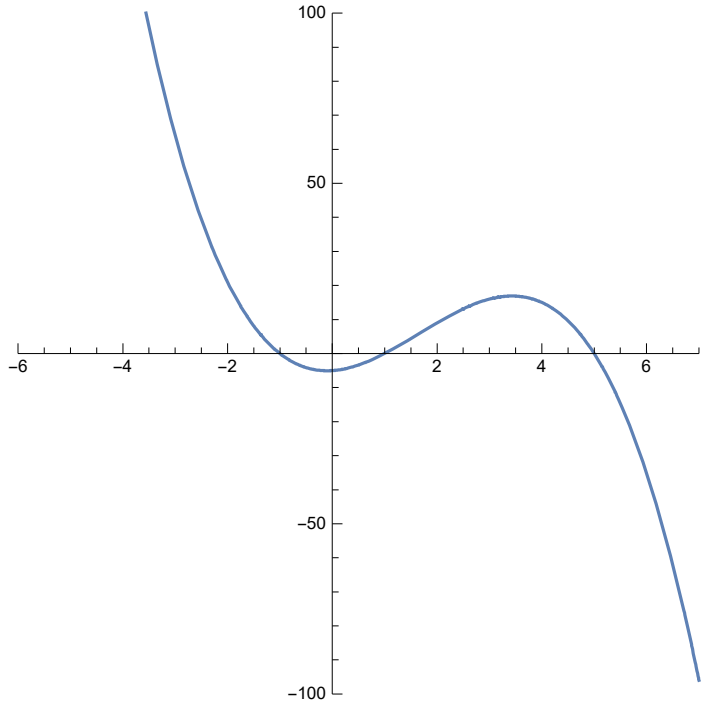
Out[134]=



++++++

In[142]:=
```
grafF25ayb =
 Plot[-x^3 + 5 x^2 + x - 5, {x, -6, 7}, PlotRange → {{-6, 7}, {-100, 100}}, AspectRatio → 1]
```
representación gráfica rango de representación cociente de aspecto

Out[142]=



++++++

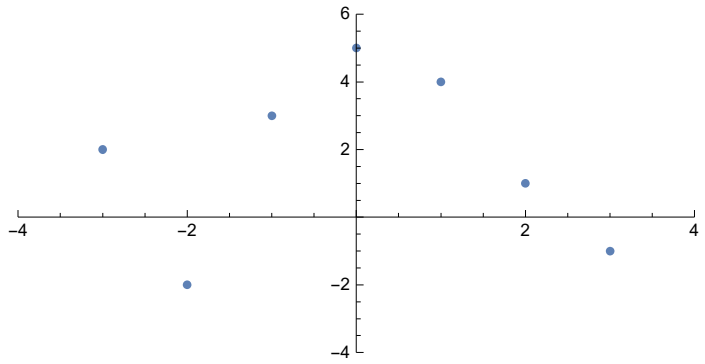
27 a)

In[143]:=
```
tabla27 = {{-3, 2}, {-2, -2}, {-1, 3}, {0, 5}, {1, 4}, {2, 1}, {3, -1}}
```

Out[143]=
```
{{-3, 2}, {-2, -2}, {-1, 3}, {0, 5}, {1, 4}, {2, 1}, {3, -1}}
```

In[152]:=
```
ListPlot[tabla27, PlotRange → {{-4, 4}, {-4, 6}}, AspectRatio → 0.5]
```
representación de lista rango de representación cociente de aspecto

Out[152]=



Observen que f (x) va cambiando de signo positivo a negativo cruzando el eje x

En el intervalo de x [-3, -2] es f (-3) > 0 y f (-2) < 0 y como f es continua entonces, por Teorema de Bolzano (leer el documento "Teorema de Bolzano y aplicaciones para Practica 2 Mate 51 Sede Pilar")

existe un valor de x en el intervalo [-3, -2] tal que allí corta al eje x, es decir existe un número c tal que f (c) = 0 o sea c es raíz

Para el 1 er cero el intervalo de amplitud 1 es el [-3, -2]

Para el 2 do cero de f (x) : el intervalo de amplitud 1 es el [-2, -1]

Para el 3 er cero de f (x) : el intervalo de amplitud 1 es el [2, 3]

----

27 b) i) decidir si f es positiva o negativa en el intervalo (0, 1)
f (x) es positiva, f (x) > 0 , en el intervalo (0, 1)

ii) en el (2, 3) no podemos decidir porque para algunos x ∈ (2, 3)
f (x) es positiva y para otros x es negativa. No se puede decidir el signo de f

iii) en el intervalo (5, +∞) es f (x) < 0 porque no tiene más ceros a la derecha y tiende a -∞

iv) en el intervalo (-∞, -2) no se puede decidir porque hasta el 1 er cero es f > 0 y entre (-3, 2) pasa a ser negativa. No se puede decidir el signo de f en (-∞, -2)

v) en el intervalo (0, 2) es f (x) > 0

vi) en el intervalo (-3, -1) No se puede decidir el signo de f porque pasa de ser positiva a negativa y luego de negativa a positiva

---

27 c) Hacer el grafico de una f (x) que satisfaga las condiciones dadas es claro que habrá infinitas posibilidades Se les pide dibujar a mano alzada una f (x) que pase por los puntos de la tabla y sea continua (sin levantar el lápiz)

++++++