
Comentarios teóricos y ejemplos

Introducción al estudio de funciones

Cambios de escala de una función

Los siguientes comentarios teóricos están basados en los que figuran
en las teóricas de Matemática fin de la página 66 y páginas 67 y 68

Los resultados que se presentan a continuación son generales y se aplican a cualquier función

Composición a derecha $\longrightarrow$ cambios en el Dominio de f

Sea $f : \text{Dom}(f) \longrightarrow \text{Cod}(f)$ de la cual se conoce su gráfico

1. - Si se hace la **composición a derecha** de $f(x)$ con $g(x) = x + a$ $\quad f_\circ g$

   $f_\circ g(x) = f(g(x)) = f(x + a)$

   el gráfico de $f(x + a)$ se obtiene **trasladando** el gráfico de $f(x)$ en "a" lugares

   1.1.- **trasladando** horizontalmente a la izquierda, si $a > 0$ (i)

   1.2.- **trasladando** horizontalmente a la derecha, si $a < 0$ (ii)

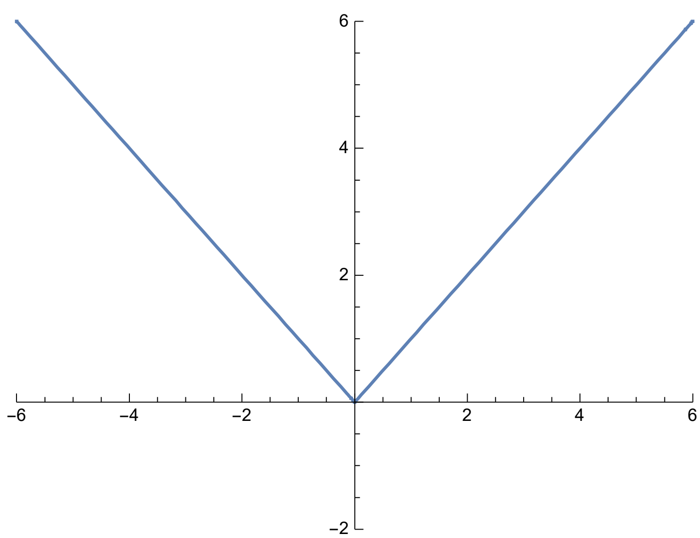
Ejemplo 1.1 :

Sea $f(x) = |x|$ y $a = 3 \quad \Longrightarrow \quad f(x + 3) = |x + 3|$

tiene el gráfico del módulo de x corrido en 3 lugares para la izquierda, por (i)

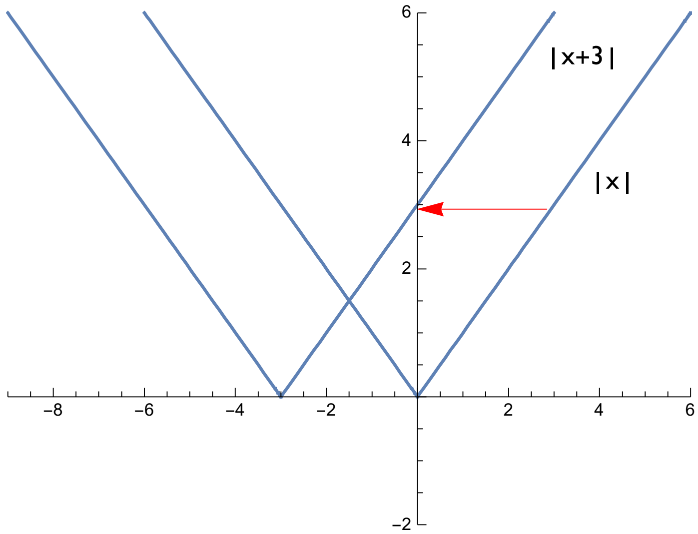
Efectivamente si el gráfico del módulo de x es :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Si hacemos la composición de $f(x)$ con $g(x) = x + 3$, $f_\circ g(x) = f(g(x)) = f(x + 3)$ tendremos :

$$f\,(x+3) = |x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{si } x+3 \geq 0 \\ -(x+3) & \text{si } x+3 < 0 \end{cases} \implies f\,(x+3) = |x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{si } x < -3 \end{cases}$$



Ejemplo 1.2 :

Sea $f\,(x) = x^2$ **encontrar el gráfico de** $f\,(x-2)$

este caso corresponde a la composición de $f\,(x)$ **con** $g\,(x) = x - 2$

es decir $f_\circ g\,(x) = f\,(g\,(x)) = f\,(x-2) = (x-2)^2$

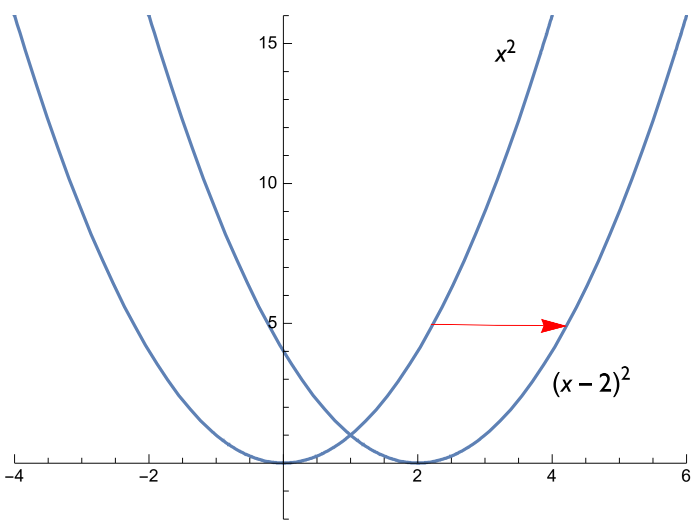
$f\,(x-2) = (x-2)^2$

como $a < 0$ **el gráfico de** $f\,(x)$ **se correrá en 2 lugares para la derecha, por (ii)**

Efectivamente :

$f\,(x) = x^2$ **tiene como gráfico la parábola de vértice** $(0,\ 0)$ **con sus ramas para arriba**

Ahora veamos el gráfico de $f\,(x-2) = (x-2)^2$ **parábola que ahora tiene vértice en el** $(2,\ 0)$



----

2. - Sea $f : \text{Dom}\,(f) \longrightarrow \text{Cod}\,(f)$ **de la cual se conoce su gráfico**

Si se hace la composición a derecha de $f\,(x)$ **con** $g\,(x) = a \cdot x$, $f_\circ g$

$f_\circ g\,(x) = f\,(g\,(x)) = f\,(a \cdot x)$

el gráfico de $f(a \cdot x)$ se obtiene

2.1.- **contrayendo** horizontalmente el gráfico de $f(x)$, si $a > 1$ (iii)

2.2.- **dilatando** horizontalmente el gráfico de $f(x)$, si $0 < a < 1$ (iv)

Ejemplo 2.1 :

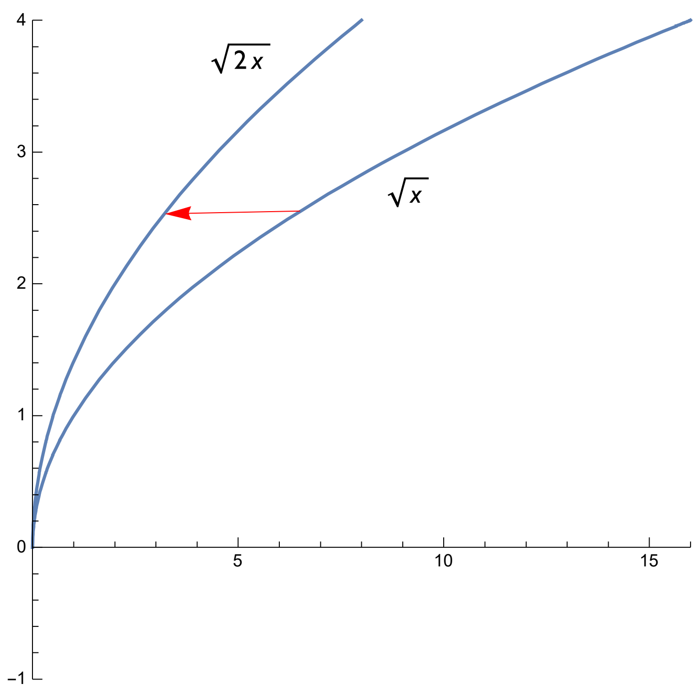
Sea $f(x) = \sqrt{x}$ f definida como $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

Cómo será el gráfico de la composición $f(2x)$ es decir $f(x)$ con $g(x) = 2x$, $f_\circ g$?

$f_\circ g(x) = f(g(x)) = f(2x) = \sqrt{2x}$

En este caso $a = 2$ corresponde al caso $a > 1$ ver (iii)

El gráfico de $f(2x) = \sqrt{2x}$ se contraerá a la mitad según las x



Si para $x = 16$ $\sqrt{x}$ daba 4 ahora $\sqrt{2x}$ será 4 para $x = 8$ (la mitad que antes)

Si para $x = 4$ $\sqrt{x}$ daba 2 ahora $\sqrt{2x}$ será 2 para $x = 2$ (la mitad que antes)

El dibujo de $\sqrt{2x}$ es el mismo que el de $\sqrt{x}$ pero para los x que valen la mitad

----

Ejemplo 2.2 :

Sea $f(x) = x^2$ f definida como $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Cómo será el gráfico de la composición $f\left(\frac{1}{2}x\right)$ es decir $f(x)$ con $g(x) = \frac{1}{2}x$, $f_\circ g$?

$f_\circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{2}x\right) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$

En este caso $a = \frac{1}{2}$ corresponde al caso $a < 1$ ver (iv)

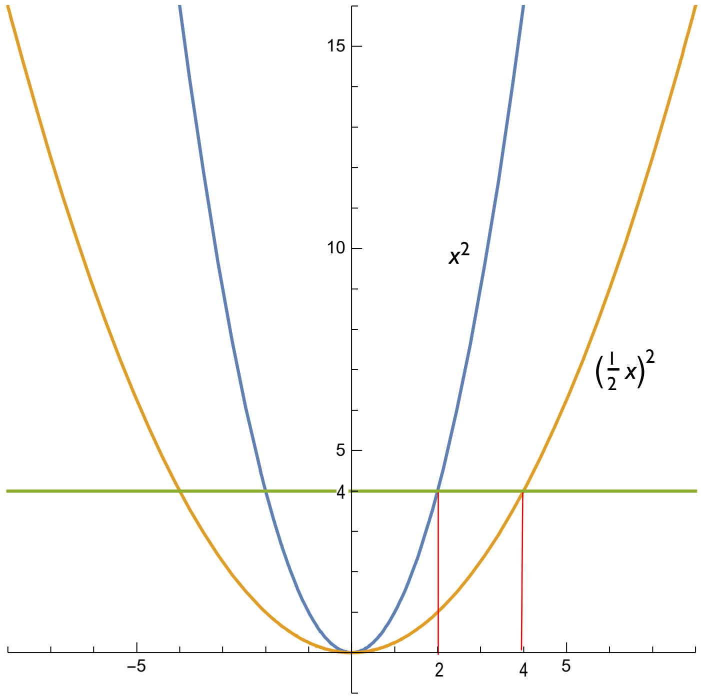
El gráfico de $f\left(\frac{1}{2}x\right) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2$ **se dilatará al doble según las x**

Para imaginarlo pensemos que si con $x = 2$, $x^2 = 4$

Ahora se obtendrá el valor 4 para $x = 8$ **(o sea el doble de antes)**

$\left(\frac{1}{2}x\right)^2 = 4$ **para** $x = 8$

Es como que hay que "estirar" el gráfico de x^2 **para que valga lo mismo pero para el doble del valor de las x de antes**



Composición a izquierda ⟶ cambios en las Imágenes de f

Sea f : Dom (f) ⟶ Cod (f) de la cual se conoce su gráfico

3. - Si se hace la composición a izquierda de f (x) con g (x) = x + a $g_\circ f$

$g_\circ f(x) = g(f(x)) = f(x) + a$

el gráfico de f (x) + a se obtiene trasladando el gráfico de f (x) en "a" lugares

3.1.- trasladando verticalmente hacia arriba, si a > 0 (v)

3.2.- trasladando verticalmente hacia abajo, si a < 0 (vi)

Ejemplo 3.1 :

Volvamos a nuestro ejemplo anterior el modulo de x

$f(x) = |x|$ **y sea** $g(x) = x + 3$

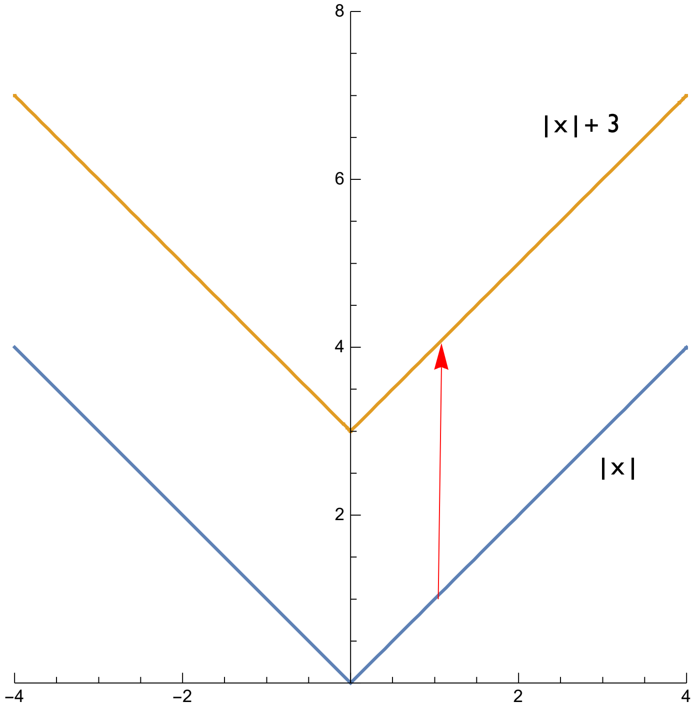
Cómo será el gráfico de la composición $g_\circ f$ **es decir** $g_\circ f(x) = g(f(x)) = |x| + 3$ **?**

$g_\circ f(x) = g(f(x)) = |x| + 3$

El gráfico de |x| + 3 por (v) será igual al gráfico de |x| trasladado en 3 lugares para arriba

Efectivamente :

$$|x| + 3 = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \geq 0 \\ -x + 3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Ejemplo 3.2 :

Volvamos a nuestro ejemplo anterior la parábola x^2

$f(x) = x^2$ y sea $g(x) = x - 2$

Cómo será el gráfico de la composición $g_\circ f$ es decir $g_\circ f(x) = g(f(x)) = x^2 - 2$?

$g_\circ f(x) = g(f(x)) = x^2 - 2$

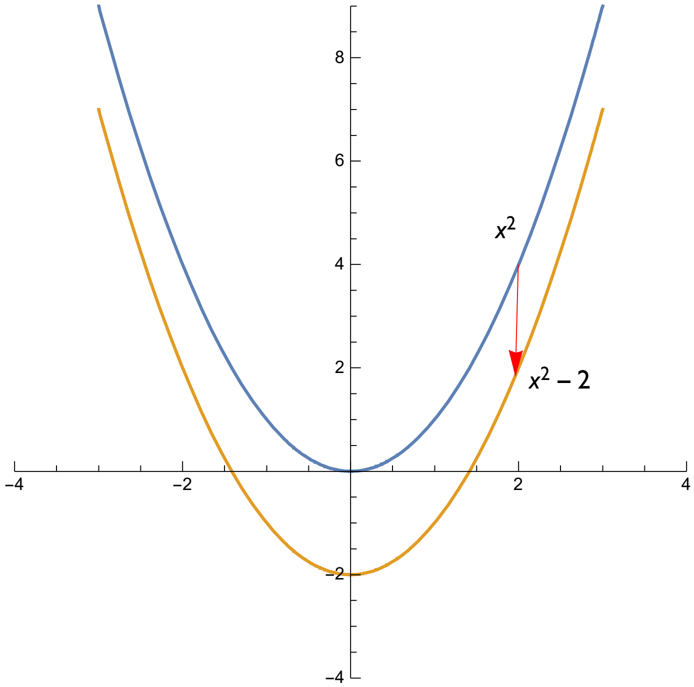
El gráfico de $x^2 - 2$ por (vi) y como $a = -2 < 0$ será igual al gráfico de x^2 trasladado en 2 lugares para abajo

Efectivamente :

para los mismos x antes daba x^2 y ahora dará $x^2 - 2$

el efecto es que las imágenes de x^2 deben "bajarse" dos lugares

```
grafCambioEscala32 =
 Plot[{x^2, x^2 - 2}, {x, -3, 3}, PlotRange → {{-4, 4}, {-4, 9}}, AspectRatio → 1]
 representación gráfica        rango de representación        cociente de aspecto
```



Sea f : Dom (f) ⟶ Cod (f) de la cual se conoce su gráfico

4. - Si se hace la **composición a izquierda** de f (x) con g (x) = a · x   g∘ f

g∘ f (x) = g (f (x)) = a · f (x)

el gráfico de a · f (x) se obtiene

4.1.- **dilatando** verticalmente el gráfico de f (x) ,   si a > 1   (vii)

4.2.- **contrayendo** verticalmente el gráfico de f (x) ,   si 0 < a < 1   (viii)

Ejemplo 4.1 :

Sea f (x) = $\sqrt{x}$ f definida como f : $[0, +\infty)$ ⟶ ℝ

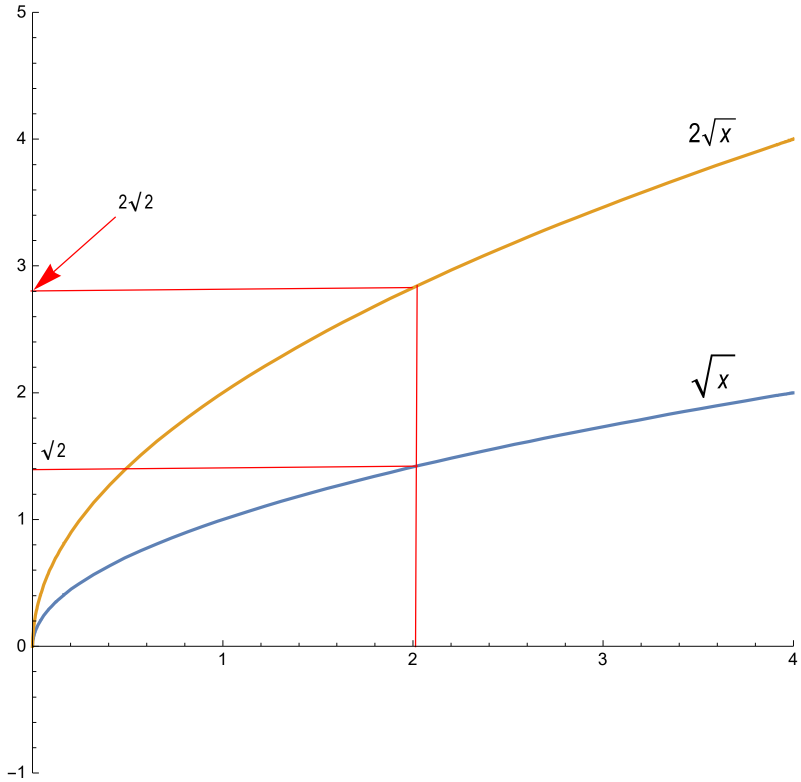
Cómo será el gráfico de la composición g∘ f , siendo g (x) = 2 x con f ?

g∘ f (x) = g (f (x)) = g $\left(\sqrt{x}\right)$ = 2 $\sqrt{x}$

En este caso a = 2 corresponde al caso a > 1   ver (vii)

El gráfico de g $\left(\sqrt{x}\right)$ = 2 $\sqrt{x}$ se dilatará verticalmente al doble para las mismas x

```
grafCambioEscala41 =
 Plot[{√x , 2 √x }, {x, 0, 4}, PlotRange → {{0, 4}, {-1, 5}}, AspectRatio → 1]
 representación gráfica        rango de representación        cociente de aspecto
```



Ejemplo 4.2 :

Sea f (x) = $\sqrt{x}$ f definida como f : $[0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

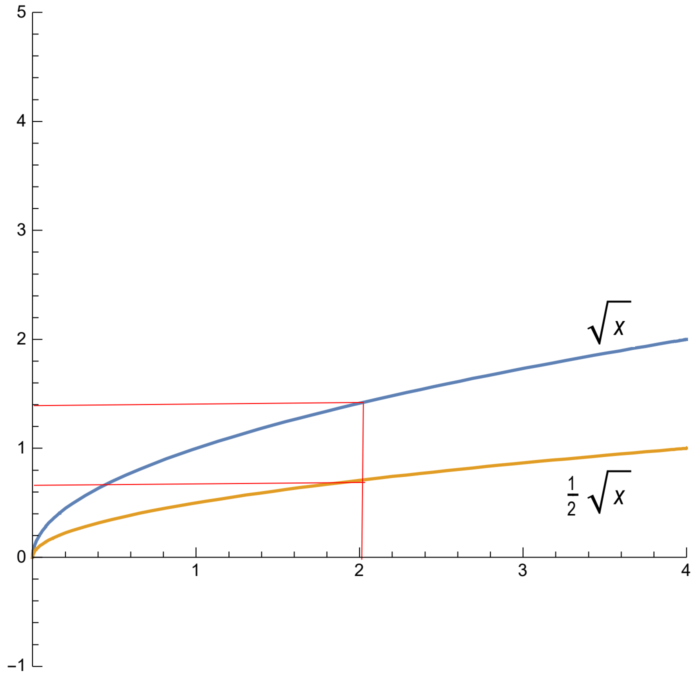
Cómo será el gráfico de la composición $g_\circ f$, siendo g (x) = $\frac{1}{2}$ x con f ?

$g_\circ f (x) = g (f (x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

En este caso a = $\frac{1}{2}$ corresponde al caso $0 < a < 1$ ver (viii)

El gráfico de g $\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ se contraerá verticalmente a la mitad para las mismas x

```
grafCambioEscala41 =
 Plot[{√x , 1/2 √x}, {x, 0, 4}, PlotRange → {{0, 4}, {-1, 5}}, AspectRatio → 1]
```
representación gráfica | rango de representación | cociente de aspecto



----

5. - Composición de f con g (x) = - x

La composición a derecha de f (x)   f∘ g

f (g (x)) = f (- x)   provoca cambios en las x

y se piensa así : se obtienen las mismas imágenes ahora para - x

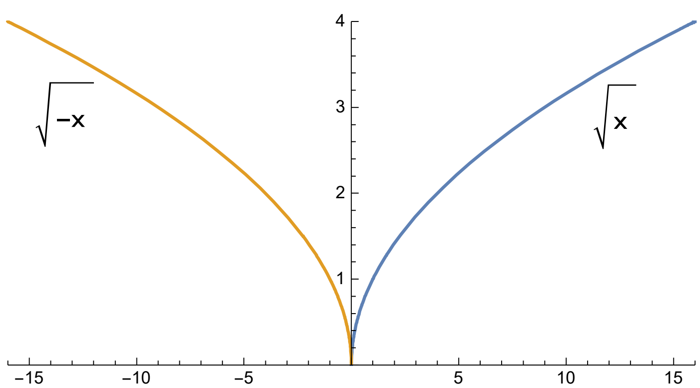
Es decir que el gráfico de f (x) rota rígidamente alrededor del eje y

----

Ejemplo 5 :

Sea f (x) = $\sqrt{x}$ y g (x) = - x

f∘ g (x) = f (g (x)) = f (- x) = $\sqrt{x}$



----

6. - Composición de f con g (x) = - x

La composición a izquierda de f (x)   g∘ f

g (f (x)) = - f (x)   provoca cambios en las y (imágenes)

y se piensa así : para las mismas x que para f ahora se obtienen imágenes negativas

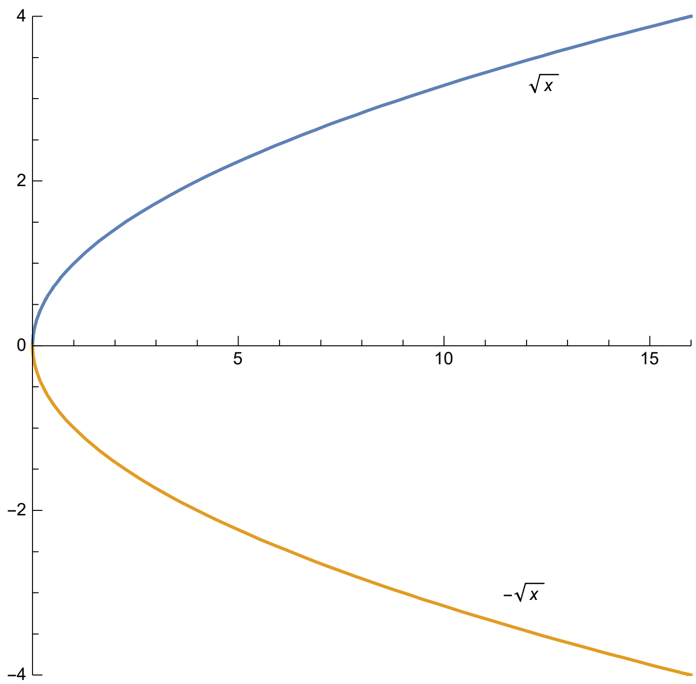
Es decir que el gráfico de f (x) rota rígidamente alrededor del eje x

----

Ejemplo 6 :

Sea $f(x) = \sqrt{x}$ **y** $g(x) = -x$

$g_\circ f(x) = g(f(x)) = -f(x) = -\sqrt{x}$



Resumiendo :

si g(x)	fog	composición a derecha de f cambios en las x	gof	composición a izquierda de f cambios en las y
x+3	**f(x+3)**	f se traslada 3 lugares hacia la derecha	**f(x) + 3**	f se traslada 3 lugares hacia arriba
x-3	**f(x-3)**	f se traslada 3 lugares hacia la izquierda	**f(x) - 3**	f se traslada 3 lugares hacia abajo
2x	**f(2x)**	f se comprime a la mitad según las x	**2 f(x)**	f se dilata o estira al doble según las y
(1/2) x	**f(1/2 x)**	f se dilata o estira al doble según las x	**1/2 f(x)**	f se comprime a la mitad según las y
- x	**f(-x)**	f tiene una rotación rígida respecto al eje y	**- f(x)**	f tiene una rotación rígida respecto al eje x

----

Combinación de traslados y traslaciones

Dado el gráfico de f (x) encontrar el gráfico de $-f(2x-4)+1$

se piensa asi :

sacamos factor común 2 dentro del paréntesis $2(x-2)$

entonces $-f(2x-4)+1 = -f(2(x-2))+1$

se empieza a mover el gráfico de f (x) desde
la 1 a composición a derecha y hasta la última a izquierda

$f(x) \longrightarrow f(x-2) \longrightarrow f[2(x-2)] \longrightarrow -f[2(x-2)] \longrightarrow -f[2(x-2)]+1$

f (x - 2) : primero se traslada 2 lugares a la derecha según las x

f[2 (x - 2)] : luego se comprime a la mitad según las x

-f[2 (x - 2)] : luego se hace una rotación de este último gráfico alrededor del eje x

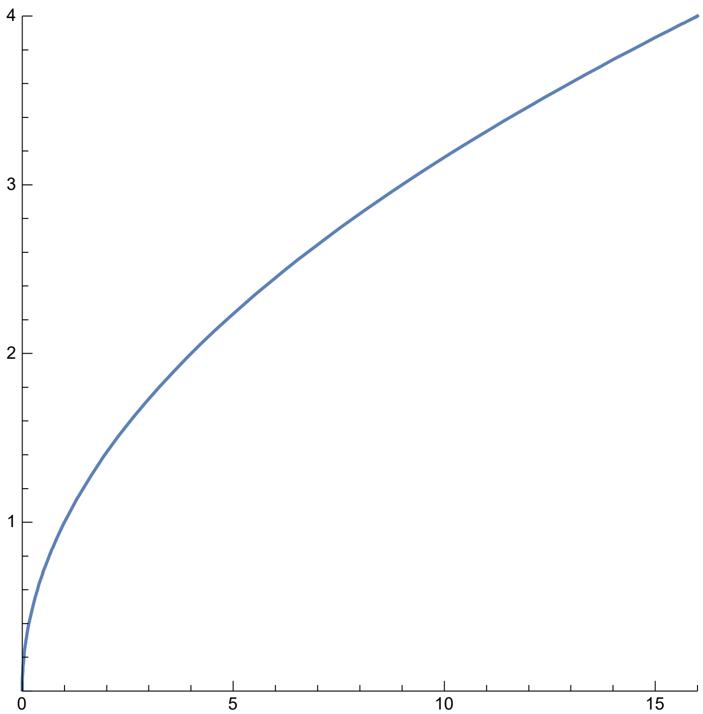
-f[2 (x - 2)] + 1 : finalmente se desplaza este último gráfico 1 lugar hacia arriba

Ejemplo :

Sea f (x) = $\sqrt{x}$ ⟹ -f[2 (x - 2)] + 1 será el producto de :

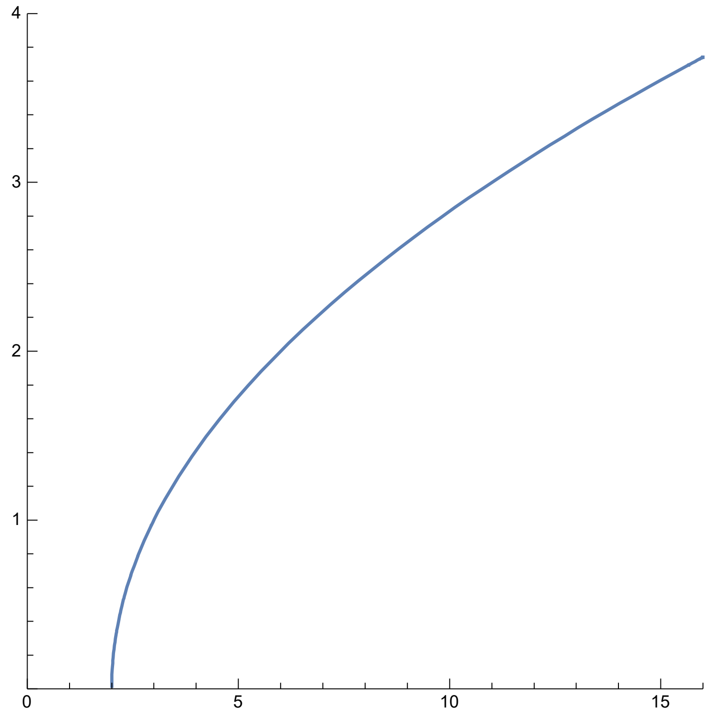
```
grafCambioEscala7 = Plot[√x, {x, 0, 16}, PlotRange → {{0, 16}, {0, 4}}, AspectRatio → 1]
```

representación gráfica · rango de representación · cociente de aspecto



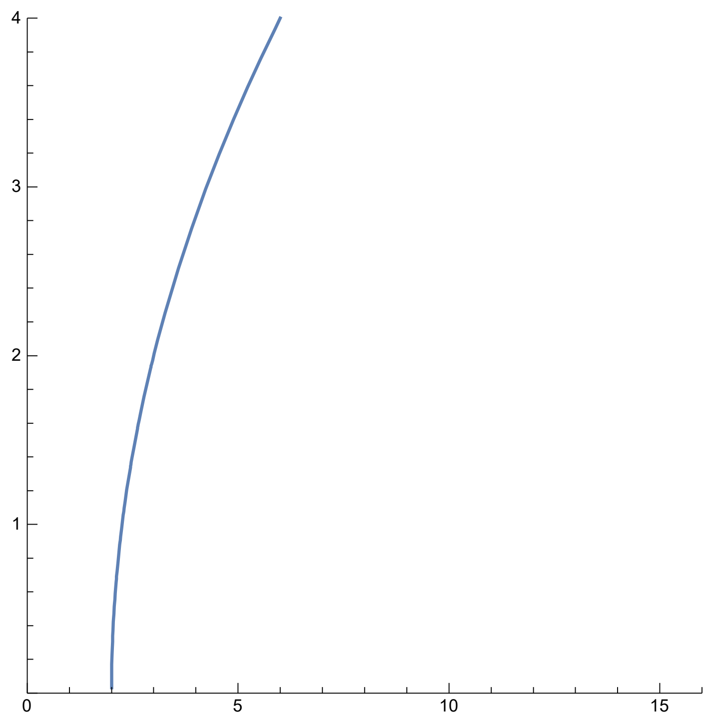
```
grafCambioEscala7 = Plot[√(x - 2), {x, 0, 16}, PlotRange → {{0, 16}, {0, 4}}, AspectRatio → 1]
```

representación gráfica | rango de representación | cociente de aspecto

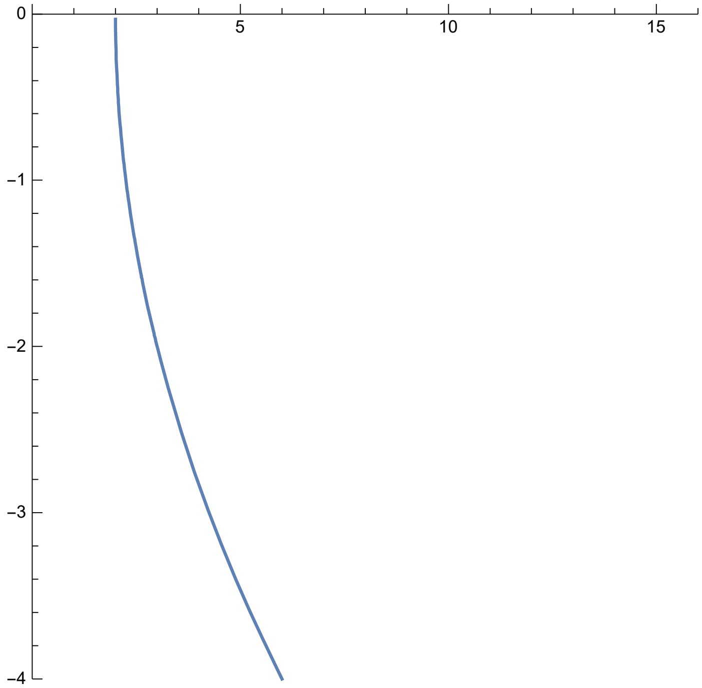



```
grafCambioEscala7 = Plot[2 √(x - 2), {x, 0, 16}, PlotRange → {{0, 16}, {0, 4}}, AspectRatio → 1]
```

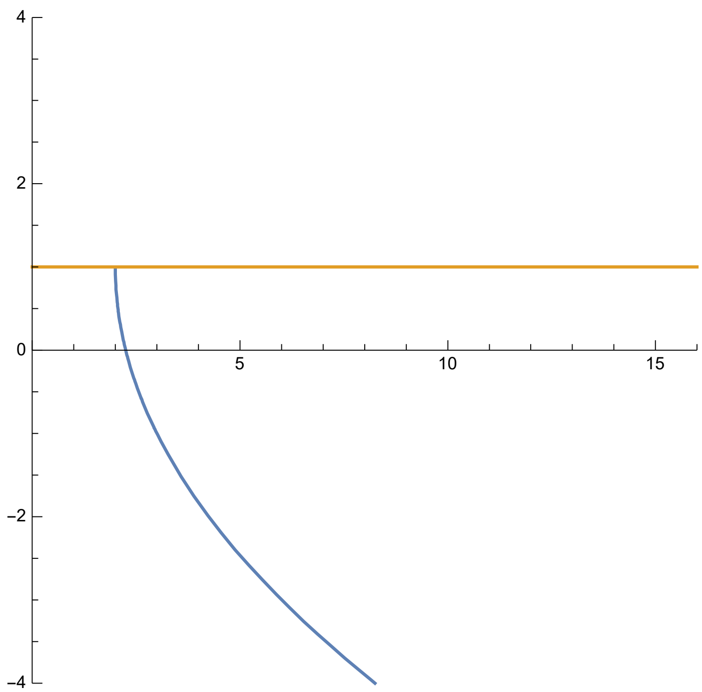
representación gráfica | rango de representación | cociente de aspecto



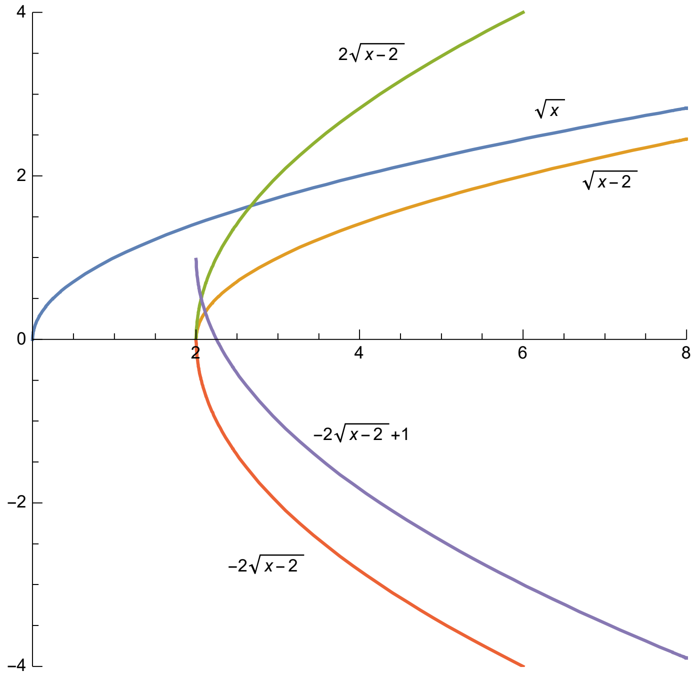
```
grafCambioEscala7 = Plot[-2 √(x - 2), {x, 0, 16}, PlotRange → {{0, 16}, {-4, 0}}, AspectRatio → 1]
```
representación gráfica | rango de representación | cociente de aspecto




```
grafCambioEscala7 =
 Plot[{-2 √(x - 2) + 1, 1}, {x, 0, 16}, PlotRange → {{0, 16}, {-4, 4}}, AspectRatio → 1]
```
representación gráfica | rango de representación | cociente de aspecto




```
grafCambioEscala6junto = Plot[{√x, √(x - 2), 2 √(x - 2), -2 √(x - 2), -2 √(x - 2) + 1},
   {x, 0, 8}, PlotRange → {{0, 8}, {-4, 4}}, AspectRatio → 1]
```
representación gráfica | rango de representación | cociente de aspecto


4
2
0
-2
-4
2
4
6
8
$2\sqrt{x-2}$
$\sqrt{x}$
$\sqrt{x-2}$
$-2\sqrt{x-2}+1$
$-2\sqrt{x-2}$

++