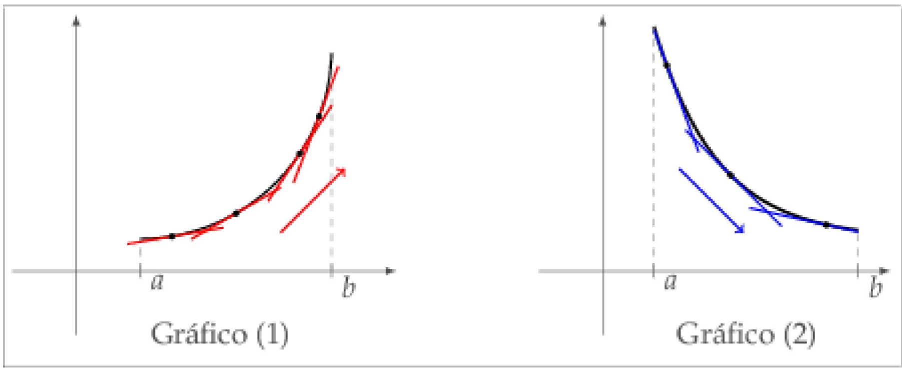
Crecimiento y decrecimiento

Cuando una función f es derivable en un intervalo $(a;b)$, su derivada f' nos da información sobre el crecimiento y decrecimiento de la función. Consideremos los siguientes gráficos de funciones:



Observamos que:

- Si las rectas tangentes al gráfico de f tienen pendientes positivas en todo el intervalo $(a;b)$ entonces f es creciente en $(a;b)$ (ver Gráfico (1)).
- Si las rectas tangentes al gráfico de f tienen pendientes negativas en todo el intervalo $(a;b)$, entonces f es decreciente en $(a;b)$ (ver Gráfico (2)).

Teniendo en cuenta las observaciones anteriores y recordando que la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en un punto $(x, f(x))$ es la derivada $f'(x)$, deducimos:

- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a;b)$, entonces f es creciente en $(a;b)$.
- Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a;b)$, entonces f es decreciente en $(a;b)$.

Ejemplo. Sea $f(x) = x^3 - 3x$. Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Como f es derivable en todo $\mathbb{R}$, por la propiedad anterior, para estudiar su crecimiento y decrecimiento, basta estudiar los conjuntos de positividad y negatividad de f'.
Tenemos que $f'(x) = 3x^2 - 3$. El conjunto de ceros de f' es $\{-1, 1\}$. Como f' es una función cuadrática con coeficiente de x^2 positivo, sabemos que $C^+(f') = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ y $C^-(f') = (-1; 1)$.
Podemos concluir entonces que f es creciente en $(-\infty; -1)$ y en $(1; +\infty)$, y que es decreciente en $(-1; 1)$:

$$\boxed{I^{\uparrow} : (-\infty; -1), (1; +\infty), \quad I_{\downarrow} : (-1; 1)}$$