Ciclo Básico Común

MATEMÁTICA

Teórica

PROFESORES

AMBAS, Olga
BADANO, Cristina I.
BRAGHINI, M. Cecilia
BUNGE, Mario
BUXTON, Cintia M.
CAMUYRANO, Beatriz
DANON, Silvia
DEFERRARI, Graciela
DODERA, M. Graciela
FAURING, Patricia
FERRARINI, Graciela
GARCIA GOMEZ, Andrés
GITLIN, Diana
GUTIERREZ, Flora
LANCE, Marta
LAPLAGNE, Eduardo
PEDRAZA, Juan Carlos
PIETROCOLA, Norma
RONCO, María Ofelia
ROSITANO, M. Inés
RUBINSTEIN, Clara
RUIZ, Marisol
RUSSO, Bibiana
SLIMOVICH, Hugo
SEVESO, Julia
TUROVEZKY, Daniel
WERNER, Elia
WYKOWSKY, Ana R.

CENTRO DE COPIADO LA COPIA S.R.L.

INDICE

Capítulo I

R y R^2

NUMEROS REALES

o o o **La recta real**

El conjunto de los números reales, que notaremos **R** , puede representarse en una recta de manera que a cada punto de R corresponde un punto de dicha recta y sólo uno.

Los números positivos se ubican a la derecha del cero y los números negativos a la izquierda. Si p y q son números reales y p es menor que q, entonces el punto que representa a p se encuentra a la izquierda del punto que representa a q.

Para ubicar numeros reales sobre la recta, nos ayudará conocer (parte de) el desarrollo decimal de dicho número.

Recordemos que todo número admite una expresión decimal. Por ejemplo, 10.71381... quiere decir

$$10 + \frac{7}{10} + \frac{1}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{8}{10000} + \frac{1}{100000} + \cdots$$

Algunos números tienen expresión decimal finita, esto es, su desarrollo termina en ceros y otros, la tienen infinita.

Las calculadoras trabajan con expresiones decimales finitas (de 8, 10 ó 12 dígitos). Cuando los desarrollos decimales de los números que queremos representar o de los resultados de los cálculos que efectuamos son infinitos o tienen más cifras significativas que las que la calculadora admite, la máquina los representa con el más cercano que tiene. Así, por ejemplo:

- Si apretamos la tecla π, aparece 3.141592654, que muestra sólo las 10 primeras cifras significativas del desarrollo de π.
- Si hacemos $2 \div 3$, aparece 0.6666666667 , siendo que el verdadero desarrollo de $\frac{2}{3}$ es 0.666666666 ... (infinitos 6).

Ejemplo 1

Representar en la recta real los siguientes números:

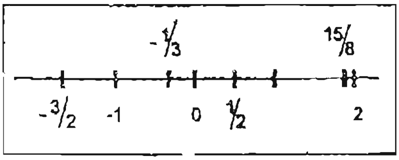
a) $-\frac{3}{2}$; 0 ; -1 ; $\frac{15}{8}$; $\frac{1}{2}$, 2 ; $-\frac{1}{3}$; 1

b) $\sqrt[3]{2}$; $3+\sqrt{3}$; $-\sqrt[3]{2}$; $\sqrt{3}-3$

Solución

a) Para los números enteros 0 ; -1 ; 2 y 1 no hace falta hacer cuentas. Para las fracciones hacemos los cuentas con la calculadora (algunas son muy fáciles y se pueden hacer mentalmente)

$$-\frac{3}{2} = -1{,}5 \ ; \quad \frac{15}{8} = 1{,}875 \quad ; \quad \frac{1}{2} = 0{,}5 \quad ; \quad -\frac{1}{3} = 0{,}333...$$

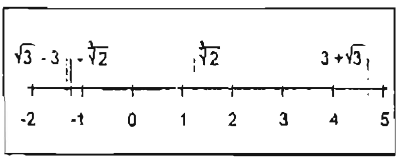


← Su representación en la recta, por lo tanto, es la siguiente

b) Usamos nuevamente la calculadora

$$\sqrt[3]{2} \cong 1{,}25 \qquad -\sqrt[3]{2} \cong -1{,}25$$

$$3 + \sqrt{3} \cong 4{,}73 \qquad \sqrt{3} - 3 \cong -1{,}27$$



← Su representación aproximada es

Ejemplo 2

Representar en la recta real los siguientes conjuntos:

a) $C = \{ x \in R \,/\, x\,(x + 3)\,(x - 1) = 0 \}$

b) $C' = \{ x \in R \,/\, (2x + 1)^2 = 0 \}$

Solución

Para representar números reales sujetos a determinada condición, debemos analizar primero el significado de la misma. Recordemos que para que el producto de varios factores sea cero, es necesario y suficiente que alguno de ellos lo sea.

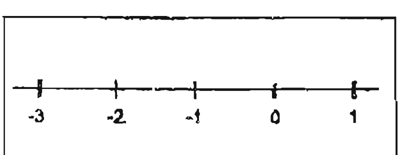
a) Si buscamos los x que verifiquen

$$x(x + 3)\,(x - 1) = 0$$

bastará tomar

$$x = 0 \ \text{ó} \ x = -3 \ \text{ó} \ x = 1$$

El conjunto tiene tres elementos: $C = \{ 0, -3, 1\}$

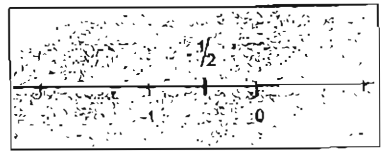


← Cuya representación en la recta es

b) En cambio los x que verifican $(2x + 1)^2 = 0$ serán los que anulen la expresión $(2x + 1)$, ya que aquí ambos factores son iguales. Por lo tanto,

$$C' = \{ -\frac{1}{2} \}$$

cuya representación es: ➔



Tanto C como C' están descriptos por ecuaciones con una indeterminada y en ambos casos hemos obtenido conjuntos formados por unos pocos puntos aislados (C con tres puntos y C' con un punto).

No ocurre lo mismo cuando la condición que define al conjunto no es tan restrictiva:

> **Observación**
>
> Se usan los signos "[" ó "]" cuando el conjunto estudiado incluye el origen de la semirrecta (semirrecta cerrada) y en cambio "(" ó ")" cuando el origen está excluido (semirrecta abierta).

Ejemplo 3

Representar los conjuntos

$$C_1 = \{ x \in R / x \geq 0 \}$$
$$C_2 = \{ x \in R / x < 1 \}$$
$$C_3 = \{ x \in R / 0 \leq x < 1 \}$$

Solución

C_1 está formado por los números reales no negativos, que son los puntos de la recta que se encuentran a la derecha del 0. Forman una semirecta. ➔

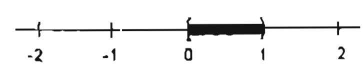
Se denota. $C_1 = [0 , +\infty)$

C_2 está formado por todos los puntos de la recta que están a la izquierda del 1 excluido éste (1 no es menor que 1) y su representación es la semirrecta de origen 1 que contiene al cero ➔

Se denota: $C_2 = (-\infty , 1)$

Observemos que, en C_3, estamos pidiendo a la vez que sea $x \geq 0$ y $1 > x$.

Esto describe a los puntos de la recta real que están simultáneamente, a la derecha de cero y a la izquierda de uno; obtenemos el segmento que va de cero a uno, excluido este último punto. ➔



Se denota: $C_3 = [0 , 1)$

○ ○ ○ Intervalos

Llamaremos *intervalos* a los segmentos de la recta real.

Pueden incluir a los extremos, o no hacerlo.
Por ejemplo, [0 , 1) es un intervalo cerrado a izquierda y abierto a derecha.

En general si *a* y *b* son números reales, con $a < b$:

- El intervalo [a,b) representa al conjunto $\{x \in R / a \leq x < b\}$
- El intervalo (a,b] representa al conjunto $\{x \in R / a < x \leq b\}$
- El intervalo (a,b) representa al conjunto $\{x \in R / a < x < b\}$
- El intervalo [a,b] representa al conjunto $\{x \in R / a \leq x \leq b\}$

A veces, para representar algunos conjuntos gráficamente, hay que trabajar un poco más:

Ejemplo 4

Graficar $C = \{x \in R \,/\, 5 \leq 3x - 1 \leq 8\}$

Solución

Estamos pidiendo *simultáneamente* las condiciones:

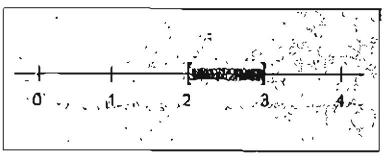
$$\begin{cases} 5 \leq 3x - 1 \\ 3x - 1 \leq 8 \end{cases}$$

$$5 \leq 3x - 1 \Leftrightarrow 5 + 1 \leq 3x \Leftrightarrow \frac{6}{3} = 2 \leq x$$

$$3x - 1 \leq 8 \Leftrightarrow 3x \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 3$$

de modo que finalmente, el conjunto buscado es:

$$C = \{x \in R \,/\, 2 \leq x \leq 3\} = [2,3]$$



← cuya representación es

Veamos ahora qué pasa cuando las condiciones involucran productos. Sabemos que un producto de dos factores es positivo cuando ambos factores tienen el mismo signo y que es negativo en los otros casos. Por ejemplo:

$$2.3 > 0 \;;\; (-2).(-3) > 0 \;;\; 2.(-3) < 0 \;;\; (-2).3 < 0$$

Ejemplo 5

Determinar y representar el conjunto

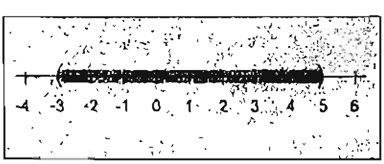
$$C = \{x \in R \,/\, (x + 3)\,(x - 5) < 0\}$$

Solución

Para que $(x + 3)\,(x - 5)$ sea negativo, hay dos posibilidades

$$\begin{cases} a)\; (x + 3) < 0 \;\wedge\; (x - 5) > 0 \\ \qquad\qquad \vee \\ b)\; (x + 3) > 0 \;\wedge\; (x - 5) < 0 \end{cases}$$

a) Ocurrirá si y sólo si $x < -3$ y $x > 5$, pero estas dos condiciones no pueden cumplirse simultáneamente. Un número no puede estar a la izquierda de -3 y, al mismo tiempo, a la derecha de 5. La posibilidad a) por lo tanto, no produce soluciones.



b) Para esto deberá ser $x < 5$ y $x > -3$, así que x estará en el intervalo (-3 , 5) que se representa en la figura:

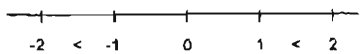
←

$$C = (-3 \,,\, 5)$$

Más atención hay que poner cuando para despejar x haya que multiplicar ambos miembros de una desigualdad por un número desconocido que podrá, eventualmente, ser negativo.

Recordemos que, si bien $1 < 2 \Rightarrow 1.3 < 2.3$, cuando multiplicamos ambos miembros por (-1) obtenemos:

$$\begin{cases} 1.(-1) = -1 \\ 2.(-1) = -2 \end{cases}$$



y ahora es $-1 > -2$.

En general:

- Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $a.c < b.c$
- Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $a.c > b.c$

Dicho con palabras: si se multiplican ambos miembros de una desigualdad por un número negativo, la misma invierte su sentido.

Ejemplo 6

Hallar y graficar $M = \{x \in R \,/\, 2 - \frac{4}{x} < 0\}$

Solución

Para todo x vale:

$$2 - \frac{4}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x-4}{x} < 0 \qquad (*)$$

Notemos primero, que en esta expresión, x aparece dividiendo, por lo tanto $x \neq 0$ (no tiene sentido la división por 0).
Para poder despejar x de (*) necesitamos multiplicar, en la desigualdad, ambos miembros por x. La desigualdad va a cambiar de sentido o no, según x sea negativo o positivo. Por ello, dividimos el análisis en los dos casos siguientes:

Caso I, $x > 0$

Entonces $\frac{2x-4}{x} < 0 \Leftrightarrow 2x - 4 < 0$ de donde se despeja $x < \frac{4}{2}$, y queda:

$$0 < x < 2$$

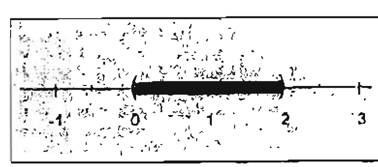
Caso II, $x < 0$

Al multiplicar nuestra condición inicial

$$\frac{2x-4}{x} < 0$$

a ambos lados por x (que ahora es negativo), es:
$2x - 4 > 0$ o, equivalentemente, $x > \frac{4}{2}$. Obtenemos que simultáneamente debe ser $x < 0$ y $x > 2$, lo cual es imposible.
Entonces el conjunto M buscado es:

$$M = (0\,,\,2) \quad \rightarrow$$



Ejemplo 7

Representar en la recta el conjunto:

$$B = \{x \in R \,/\, \frac{4}{x} < x\}$$

Solución

Dividimos el problema en dos partes, descartando x = 0 pues la inecuación tiene un denominador x:

Caso I, $x > 0$.

Entonces $\frac{4}{x} > x \Leftrightarrow 4 > x^2$. Tenemos en este caso los números positivos que elevados al cuadrado dan números menores que 4:

$$0 < x < 2$$

Caso II, $x < 0$

Entonces $\frac{4}{x} > x \Leftrightarrow 4 < x^2$. Se trata de los números negativos que elevados al cuadrado dan más que 4:

$$x < -2$$

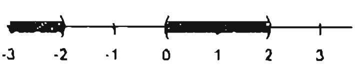
Hemos obtenido que $B = (-\infty,-2) \cup (0,2)$

Representamos en la recta el subconjunto hallado:

←

Observación:

Uno podría preguntarse para qué estudió el caso II, con la complicación de "multiplicar por un negativo" si al fin y al cabo todos los elementos del conjunto M buscado se obtuvieron a partir del caso [illegible] ERA IMPRESCINDIBLE ANALIZARLO. Si no, el estudio hubiera quedado incompleto, y no estaríamos en condiciones de asegurar que M es igual a (0,2).



Valor absoluto ○ ○ ○

Dado un número real x se llama valor absoluto de x al número real que mide la distancia desde x al 0. Lo denotamos $|x|$.

Con la definición dada resulta que

$$|x| = x \quad si \quad x \geq 0$$
$$|x| = -x \quad si \quad x < 0$$

Por ejemplo

$$|3| = 3\,;\ |-3| = -(-3)\,;\ |18{,}3| = 18{,}3\,;\ |-1{,}5| = 1{,}5\,;\ \text{etc.}$$

Observar que $|x| \geq 0$ para todo $x \in$ **R**, pues es una distancia, y que $|x| = 0$ sólo si $x = 0$.

Ejemplo 8

Hallar todos los x que verifican $|x| = 3$

Solución

Como estamos buscando todos los puntos de la recta que disten 3 del origen, vamos a encontrar dos: a la izquierda del cero el -3 y a la derecha del cero el 3. Y no hay ningún otro.

Ejemplo 9

Comparar

(i) $|5 + (-8)|$ con $|5| + |-8|$
(ii) $|5 + 8|$ con $|5| + |8|$

Solución

(i) $|5 + (-8)| = |-3| = 3$; $|5| + |-8| = 5 + 8 = 13$

entonces resulta

$$|5 + (-8)| < |5| + |-8|$$

(ii) $|5 + 8| = |13|$; $|5| + |8| = 5 + 8 = 13$

entonces resulta

$$|5 + 8| = |5| + |8|$$

En general, vale la siguiente propiedad:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

que nos está diciendo que la distancia entre la suma de dos números y el origen es menor o igual que la suma de las distancias entre dichos números y el origen.

Para el producto, en cambio, siempre vale:

$$|a.b| = |a|.|b|$$

Así, por ejemplo:

$$|5.8| = |5|.|8| \; ; \; |(-5).8| = |-5|.|8| \; ; \; |5.(-8)| = |5|.|-8|$$

R^2 - COORDENADAS CARTESIANAS

O O O Representación en el plano

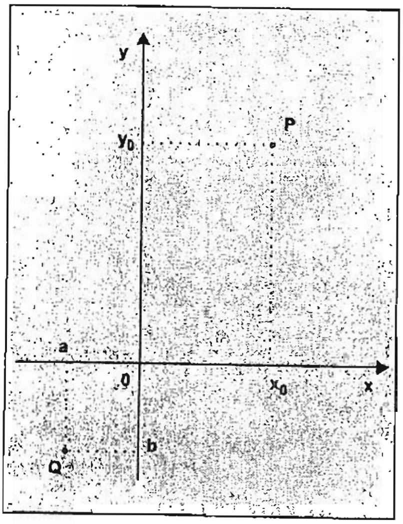
Como es habitual, llamamos R^2 al conjunto de pares ordenados

$$R^2 = \{(x , y) / x \in R , y \in R\}$$

Veamos cómo representar este conjunto en el plano, una vez fijado un sistema de coordenadas cartesianas.

Para ello se eligen dos rectas perpendiculares llamadas ejes coordenados. El horizontal es el eje de las abscisas o "eje de las x".El vertical es el eje de las ordenadas o "eje de las y". El punto 0 donde se cortan los ejes se llama origen de coordenadas o simplemente origen.

En cada uno de los ejes se representa R como vinimos haciéndolo hasta ahora, eligiendo al origen de coordenadas como 0 y conviniendo que en el eje



vertical, el 1 se ubica arriba del 0.

En este sistema, cada punto P del plano queda bien determinado por las proyecciones x_0 e y_0 del mismo sobre ambos ejes y se corresponde con el par (x_0, y_0) de R^2.

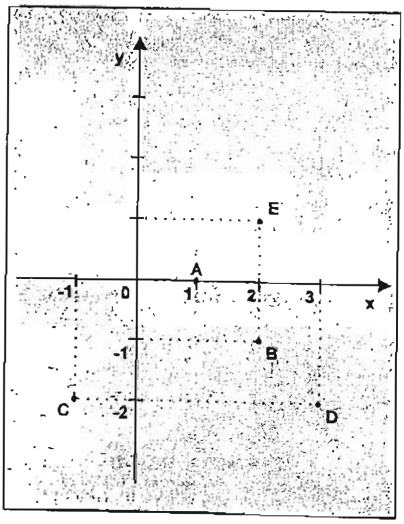
Recíprocamente, dado un par ordenado de números reales (a , b) existe un único punto Q del plano cuyas proyecciones sobre los ejes horizontal y vertical son respectivamente a y b.

←

Ejemplo 10

Representar en el plano los puntos

A = (1 , 0) ; B = (2 ; -1) ; C = (-1 , -2) ; D = (3 , -2) ; E = (2 , 1)



Solución

← Esta correspondencia permite describir objetos geométricos mediante relaciones algebraicas y recíprocamente.

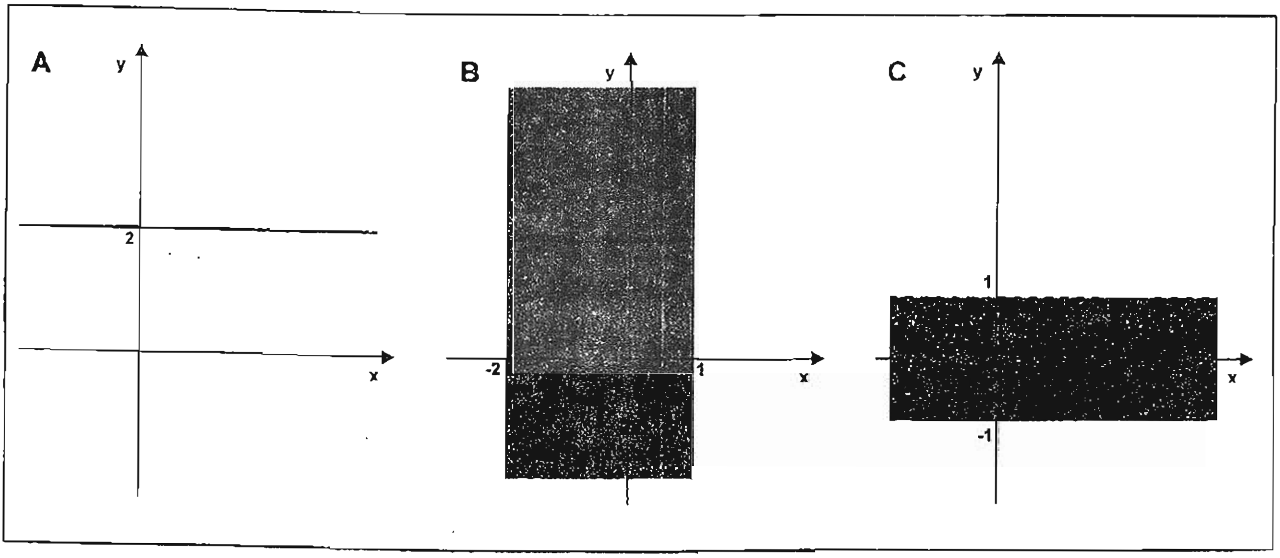
Ejemplo 11

Representar en el plano los conjuntos:

$A = \{ (x , y) \in R^2 / y = 2 \}$
$B = \{ (x , y) \in R^2 / -2 \leq x \leq 1 \}$
$C = \{ (x , y) \in R^2 / -1 < y < 1 \}$

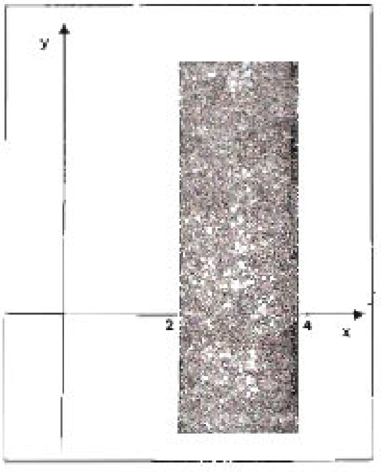
Solución

↓



Ejemplo 12

Describir algebraicamente el conjunto del plano aquí graficado →



Solución

Para que un par (x , y) esté en A es necesario que verifique

$$2 \leq x \leq 4$$

y ésta es la única condición, así que

$$A = \{ (x , y) \in R^2 / 2 \leq x \leq 4 \}$$

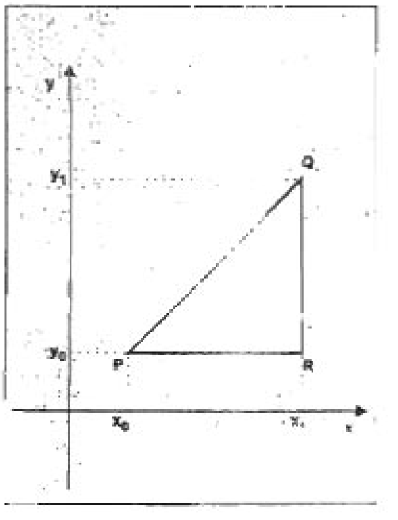
○ ○ ○

Distancia entre dos puntos del plano

Consideremos dos puntos cualesquiera del plano.

$$P = (x_0 , y_0) \quad y \quad Q = (x_1 , y_1)$$

→



Se trata de determinar la distancia entre P y Q, es decir, la longitud del segmento $\overline{PQ}$. Para ello se construye el triángulo rectángulo $\widehat{PQR}$, de hipotenusa $\overline{PQ}$, siendo $R = (x_1 , y_0)$. Las longitudes de los catetos $\overline{PR}$ y $\overline{QR}$ son respectivamente,

$$| x_1 - x_0 | \ e \ | x_1 - y_0 |$$

Luego, por Pitágoras,

$$| PQ |^2 = | PR |^2 + | RQ |^2$$

que se traduce en

$$| PQ |^2 = | x_1 - x_0 |^2 + | y_1 - y_0 |^2$$

Por lo tanto, la distancia entre P y Q, que notaremos d(P,Q) es

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

Ejemplo 13

Dados los puntos A = (1 , 3) y B = (-2 , 5), calcular la d(A,B)

Solución

$$d(A,B) = \sqrt{(1-(-2))^2 + (3-5)^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

Ejemplo 14

Hallar a ∈ R para que la distancia entre P = (-1 , a) y Q = (2 , -1) sea 4.

Solución

$$d(P,Q) = \sqrt{(-1-2)^2 + (a-(-1))^2} = \sqrt{(-3)^2 + (a+1)^2} =$$

$$= \sqrt{9 + a^2 + 2a + 1} = \sqrt{a^2 + 2a + 10}$$

Por lo tanto, buscamos los valores de a tales que

$$\sqrt{a^2 + 2a + 10} = 4$$

O, lo que es lo mismo, resolvemos :

$$a^2 + 2a + 10 = 16$$

Las soluciones de $a^2 + 2a - 6 = 0$ son:

$$\frac{-2 - \sqrt{4 - 4.(-6)}}{2} \quad y \quad \frac{-2 + \sqrt{4 - 4.(-6)}}{2}$$

Los valores de a para los cuales d(P,Q) = 4 son dos:

$$\frac{-2 - \sqrt{28}}{2} \quad y \quad \frac{-2 + \sqrt{28}}{2}$$

Ejemplo 15

Caracterizar todos los puntos del plano que equidisten de

$$A = (0\ ,\ 0) \quad y \quad B = (3\ ,\ 0)$$

Solución

Sea P = (x , y) uno de los puntos buscados, entonces

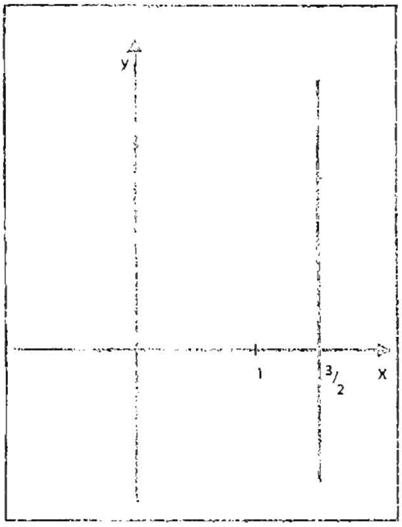
$$d(P,A) = d(P,B)$$

es decir

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 0)^2}$$

o equivalentemente:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + y^2} \qquad (*)$$



Observemos que, al ser ambos miembros positivos (*), resulta equivalente a

$$x^2 + y^2 = (x - 3)^2 + y^2$$

De esta última expresión, restando x^2 e y^2 ambos miembros obtenemos que los puntos buscados deben satisfacer:

$$0 = -6x + 9$$

o lo que es lo mismo $\qquad x = \dfrac{3}{2}$

Sobre y no hay restricciones.

← Los puntos buscados resultan ser los de la recta de la figura.

Capítulo II

Funciones

Este capítulo tiene como objetivo introducir el tema "Funciones" mostrando la presencia natural de las mismas en la vida real, y la conveniencia de poder hacer un ánalisis del comportamiento de las mismas.

○ ○ ○ ¿Qué es una función?

Una función $f : A \rightarrow B$ es una regla que a cada elemento del conjunto A le asigna un único elemento del conjunto B.

Para nosotros, A y B serán , en general, conjuntos numéricos: es habitual que en fenómenos de la vida cotidiana, interesen magnitudes, algunas de las cuales dependen de otras. Las funciones numéricas proporcionan, en estos casos, una manera de "cuantificar" y describir dicha dependencia, un modelo para el estudio de aspectos del fenómeno en cuestión.

En este sentido, (se trata a veces de tomar decisiones en el curso de un proceso), más que el valor que una función toma en cada punto, interesa hacer un análisis de caracteristicas globales de la función: dónde crece, dónde decrece, cuán rápido lo hace, dónde toma sus valores extremos, etc.

Parte del curso está orientado a estudiar cómo se hace este tipo de estudio de las funciones, y este capitulo en particular, propone ese análisis para las funciones cuando se conoce su gráfico (es cuando es fácil).

○ ○ ○ Dominio, imagen, gráfico

Si f es una función, $f : A \rightarrow B$, diremos que:

- El **dominio de f** es el conjunto de puntos para los que la función existe:

  $$\text{dom } f = A$$

- La **imagen de f** es el conjunto de valores que alcanza f, es decir:

  $$\text{Im } f = (y \in B \ / \ \text{existe } x \in A \text{ con } f(x) = y)$$

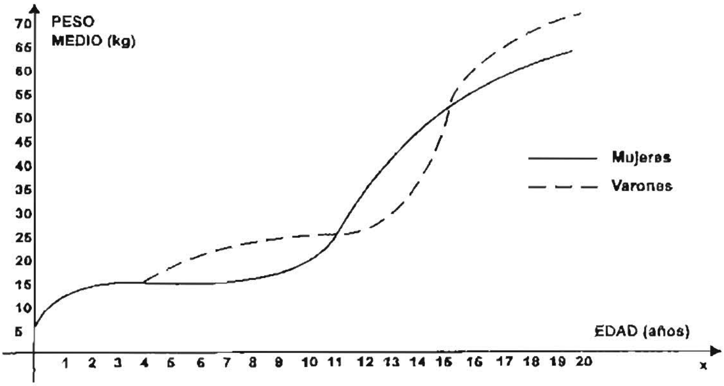
  Coloquialmente, un punto de B está en la imagen de f si es f (alguien del dominio).

- El **gráfico de f** (o gráfica de f) es el conjunto de los pares $(x, f(x))$, con x en A.

¿Cómo se presentan las funciones?

Las funciones se pueden presentar de diversas maneras, según se muentra en los siguientes ejemplos:

- por medio de un gráfico.



1.- *El peso medido de los chicos desde que nacen hasta los 20 años representado en un gráfico*

- mediante una tabla de valores (que a veces sólo aporta información parcial sobre la función, por ejemplo, si la función está definida sobre todos los puntos de un intervalo)

2.- *La siguiente tabla contiene las temperaturas registradas durante un día de agosto en Buenos Aires.*

Hora	Temp	12	8
0	9	14	12
2	8,5	16	12
4	8	18	6
6	7	20	4,5
8	5,5	22	4
10	6	Hora	Temp

- por medio de una fórmula que relaciona la variable dependiente con la independiente.

3.- *El volumen V de un cubo cuya arista mide x metros es igual a*

$$V(x) = x^3$$

- mediante una descripción detallada del comportamiento de cierta variable (es habitual que sea a lo largo del tiempo) a partir de la cual, por ejemplo, puede hacerse un gráfico razonable.

4.- *Se describe la siguiente situación: "Saqué del fuego una cacerola con agua hirviendo. Al principio, la temperatura bajó con rapidez, de modo que a los 5 minutos estaba a 60° C. Luego fue enfriándose con más lentitud. A los 20 minutos después de haberla sacado estaba a 30° C, temperatura de la cual no bajó, pues era la temperatura que había en la cocina." La temperatura del agua a lo largo del tiempo es una función.*

En la definición del dominio inciden diversas cuestiones:

- Las limitaciones algebraicas de la fórmula (si es que la función viene por fórmula). Por ejemplo, no se puede dividir por cero, ni tomar raiz cuadrada a un número negativo.

  El **dominio natural** de una función que viene por fórmula es el (mayor) conjunto de puntos a los cuales la fórmula puede aplicarse.

- Restricciones propias del problema que se trata: si la variable es una longitud, debe ser positiva; si es la edad de una persona, hay que manejarse con números enteros mayores o iguales que cero.

- La conveniencia (e incluso las preferencias) de la persona que analiza el problema: en el caso de la edad de las personas pueden agregarse condiciones del tipo:

$$\text{edad} \leq 120 / 150 / 200 \text{ , etc.}$$

Ejemplo 1

La Sociedad de Fomento de la Av. Carabobo dispone de 5000 dólares para armar una comparsa para el día de la Primavera.

a) Encontrar una fórmula que dé lo que cobraría cada participante en función del número total de éstos. ¿Cuál es el dominio de la función?.
Hacer el gráfico de la función.

b) Si de lo que se le paga, cada participante debe pagar 20 dólares para el traje. ¿Cuál es un número "tope" razonable para la cantidad de participantes?

Solución

a) Si la comparsa tuviera un integrante, éste cobraría los 5000 u$s. Si estuviera formada por 2 integrantes, cada uno cobraría $\frac{5000}{2} = 2500$.
Si fueran100, cada una cobraría $\frac{5000}{100} = 50$. En general, si la comparsa estuviera compuesta por n personas, a cada una de ellas se le pagaría:

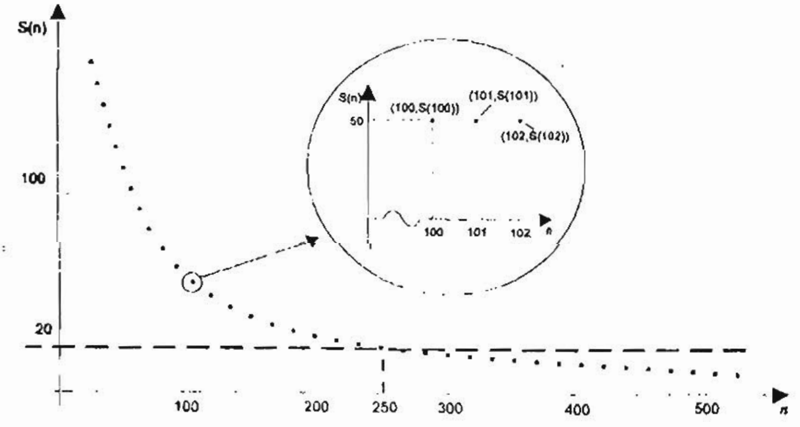
$$S(n) = \frac{5000}{n} \text{ u\$s}$$

Notemos que la función S(n) está definida sólo para valores enteros y positivos de n (n es la cantidad de integrantes de la comparsa y no tiene sentido considerar, por ejemplo, valores negativos o fraccionarios). Por lo tanto

dom S = { 1,2,3,...} = {números naturales}

En casos como éste, en que los puntos del dominio están "separados" unos de otros, decimos que la variable independiente de la función es *discreta*, a diferencia de otros en que el dominio es un intervalo de la recta o una unión de ellos, situaciones en que decimos que la variable es *continua*. Lo habitual es encontrarse en los problemas con funciones cuyos dominios son de uno u otro tipo.

Aproximadamente el gráfico de S es:



Notemos que la escala elegida oculta, en parte, el hecho de que los puntos del dominio (y por ende los del gráfico) están separados; sirve entonces para aclarar la situación mirar un pedacito del gráfico como si tuviéramos un microscopio.

Observemos que a medida que n crece, los valores de S son cada vez menores y se acercan indefinidamente a cero, lo que provoca que la gráfica se vaya "pegando" al eje a medida que n es más grande. Se dice que la recta horizontal de ecuación y = 0 es una *asíntota* **horizontal para *f*.**

b) Si de lo que se le paga, cada participante debe gastar 20 u$s en el traje, puede interesarle (económicamente, se entiende) a una persona integrar la comparsa sólo si lo que le pagan es más de lo que debe desembolsar. Como deseamos determinar una cantidad "tope" de participantes para que esto ocurra, buscamos el máximo n para el que S(n) > 20:

$$\text{Es } S(n) > 20 \Leftrightarrow \frac{5000}{n} > 20 \Leftrightarrow n < \frac{5000}{20} = 250 \Leftrightarrow n < 250$$

Gráficamente M = 250 es el valor máximo tal que la parte del gráfico de S correspondiente a { 1,2,3, ...M-1} se mantiene por sobre la recta horizontal de ecuación y = 20.
La conclusión es que si la comparsa estuviera formada por más de 249 personas sus integrantes tendrían que poner plata encima para participar (difícilmente habría enteresados ¿no?)

Ejemplo 2

Un barril vacío, con capacidad para 20 litros, pesa 2,5 kg

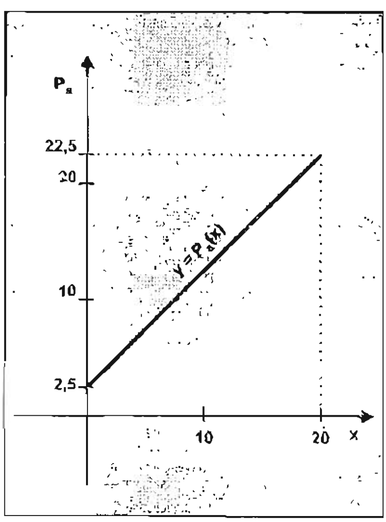
a) Representar la función peso total del barril en función de la cantidad de agua (en litros) que contiene. Hallar su fórmula. ¿Cuál es el dominio de esta función? ¿Cuál es su imagen?
b) Si disponemos de 3 litros de mercurio, cuyo peso total es 40,8 kg, resolver el problema anterior reemplazando agua por mercurio.

Solución

a) Sabemos que 1 litro de agua pesa 1 kg. Por lo tanto, el peso de x litros es x kg. Así, el peso total del barril (en kg), P_a, en función de la cantidad de agua (en litros) que contiene, es:

$$P_a(x) = 2,5 + x$$

x, por ser una cantidad, debe ser no negativo, y como la capacidad del barril es 20 litros, debe ser menor o igual que 20.
Por esto, es dom P_a = [0 , 20].
← Gráficamente



Para calcular Im P_a, observamos que el peso P_a del barril, está siempre entre 2,5 kg (cuando está vacío) y 22,5 kg (cuando el barril contiene 20 litros de agua). Si p es cualquier valor entre 2,5 y 22,5 , poniendo una cantidad adecuada de agua (p - 2,5 litros) se consigue que el peso total del barril sea p kg. (p ∈ Im P_a).
Concluimos que: Im P_a = [2,5 , 22,5]

b) Llamemos aquí $P_m(x)$ al peso total del barril (en kg) cuando contiene x litros de mercurio.
La variable x debe ser no negativa, y como sólo hay 3 litros de mercurio, debe ser menor o igual que 3. De aquí,

$$\text{dom } P_m = [0\ ,\ 3\ ]$$

Ahora, si 3 litros de mercurio pesan 40,8 kg, x pesarán $\frac{40{,}8}{3}$ .x kg

Como $\frac{40{,}8}{3} = 13{,}6$, será entonces

$$P_m(x) = 2{,}5 + 13{,}6\ x$$

Por ejemplo, el peso del barril cuando contiene 1 litro de mercurio es

$$P_m(1) = 2{,}5 + (13{,}6)\ .1 = 16{,}1 \text{ kg}$$

Vemos que el peso aumenta gradual y continuamente al aumentar la cantidad x de litros de mercurio que contiene.

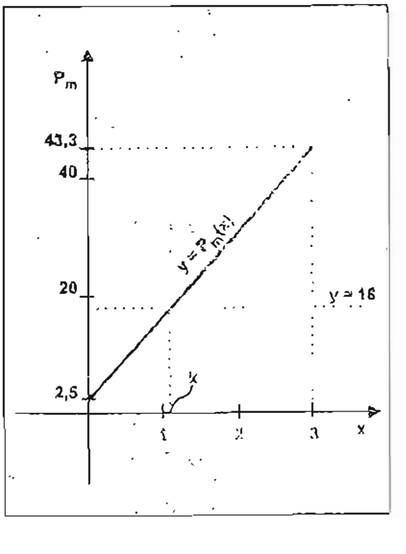
Es $P_m(0) = 2{,}5 + (13{,}6)\ .\ 0 = 2{,}5$
$P_m(3) = 2{,}5 + (13{,}6)\ .\ 3 = 43{,}3$

P_m toma todos los valores entre 2,5 y 43,3. Por esto, es:

$$\text{Im } P_m = [2{,}5\ ,\ 43{,}3]$$

Analicemos, finalmente, para qué cantidades de mercurio el peso total del barril no supera los 18 kg.

En el gráfico se ve que esto corresponde a determinar para qué valores de x, la porción correspondiente del gráfico de P_m se mantiene por debajo de la recta horizontal de ecuación y = 18: concretamente queremos calcular el valor de k (allí representado). Lo hacemos usando la fórmula de P_m: ➔



$$P_m(x) \leq 18 \Leftrightarrow 2{,}5 + (13{,}6)\ x \leq 18 \Leftrightarrow (13{,}6)\ x \leq 15{,}5 \Leftrightarrow x \leq \frac{15{,}5}{13{,}6}$$

$$x \leq 1{,}139705882..$$

Elegimos entonces: $k = \frac{15{,}5}{13{,}6}$

y es $P_m(x) \leq 18 \Leftrightarrow x \in [0\ ,\ \frac{15{,}5}{13{,}5}\ ]$

Ejemplo 3

La familia Dongo, que por mes recorre 3000 km con el auto, se plantea la posibilidad de instalar un equipo de gas en el auto. Si la instalación del equipo cuesta 1500 u$s; 1 litro de nafta cuesta 0,69 u$s; 1 m^3 de gas cuesta 0,32 u$s; y con un litro de nafta o con 0,8 m^3 de gas se recorren 14 km, obtener:

a) La función que mide el gasto en combustible en función del tiempo (medido en meses a partir del hipotético momento de la conversión a gas) si se usa nafta.
b) Idem si se usa gas (incluir el valor del equipo)
c) El gráfico de ambas funciones en un mismo sistema de ejes
d) El momento en que se amortiza la inversión de la instalación del equipo de gas. (utilizar el gráfico de c).

Solución

a) *Cálculo de la función de gasto si se usa nafta*

Calculemos primero cuánto se gasta en un mes:
Si cada 14 km se consume 1 litro de nafta entonces para recorrer 3000 km se gastarán 3000/14 = 214,29 litros que costarán:

$$(0{,}69)\ .\ (214{,}29) = 147{,}86 \text{ u\$s}$$

Como del problema se han eliminado todo otro tipo de gastos en todos los meses gastará lo mismo y en t meses se gastará

$$t\ .\ (147{,}86) \text{ u\$s}$$

Si llamamos f(t) al gasto en que se incurre durante t meses si se usa nafta tenemos:

$$f(t) = t\ .\ (147{,}86)$$

Por ejemplo, si transcurren 3 meses entonces t = 3 y

$$f(3) = 3\ .\ (147{,}86) = 443{,}58 \text{ u\$s}$$

Si agregamos la hipótesis de que el vehículo está permanentemente en movimiento se puede extender la función f(t) a valores no enteros de t. Por ejemplo, el gasto en medio mes es:

$$f(½) = 0{,}5\ .\ (147{,}86) = 73{,}93$$

b) *Cálculo de la función de gasto si se usa gas*

El costo por la reconversión es de 1500 u$s. Este valor es fijo, por única vez, y debe sumarse al gasto por consumo de gas que sí varía de acuerdo a los kilómetros recorridos (o a los meses transcurridos).
Ahora bien, si con 0,8 m^3 de gas se recorren 14 km, para recorrer 3000 km se consumirán $\frac{3000\ .\ 0{,}8}{14} = 171{,}43\ m^3$ de gas.
Luego, por mes, se gastará en gas 171,43 . 0,32 = 54,86 u$s.
En consecuencia, en el primer mes se gastarán 1500 + 54,86 dólares y durante los primeros t meses se gastarán

$$1500 + t\ .\ 54{,}86 \text{ u\$s}$$

Si llamamos g(t) al gasto en que se incurre durante t meses si se usa gas tenemos:

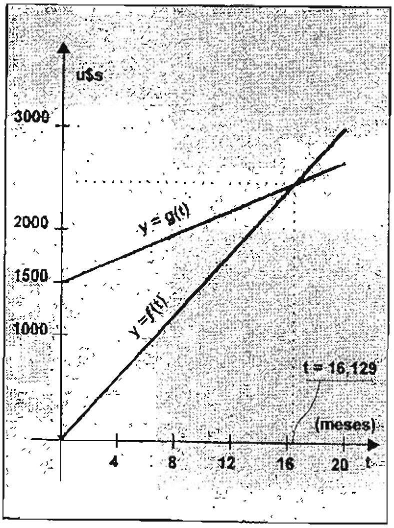
$$g(t) = 1500+ t\ .\ (54{,}86)$$

Si mantenemos la hipótesis anterior sobre el consumo continuo entonces, por ejemplo, el gasto durante 3 meses y medio es

$$g(3{,}5) = 1500 + 3{,}5\ .\ (54{,}86) = 1692{,}01 \text{ dólares}$$

c) Si graficamos ambas curvas f(t) y g(t) sobre un mismo sistema de ejes obtenemos la figura del margen

←



d) *Cálculo del momento en que se amortiza el equipo de gas*

Las curvas se cortan entre t = 14 y t = 18. El valor de t para el que esto ocurre, representa el momento en que los gastos para una y otra modalidad de consumo se equiparan. Para calcularlo exactamente, buscamos para qué valores de t es f(t) = g(t) :

$$t\,.\,(147{,}86) = 1500 + t\,.\,(54{,}86) \Leftrightarrow t\,.\,(147{,}86) - 54{,}86 = 1500$$

$$\Leftrightarrow t = 16{,}129...$$

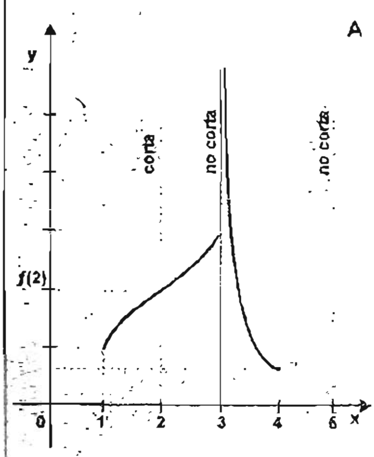
Esto dice que aproximadamente a los 16 meses de efectuada la conversión a gas se igualan los gastos. Hasta allí era más caro usar gas, y a partir de ese momento queda amortizada la inversión y comienzan a notarse las ventajas económicas de hacer el cambio.

O O O

Estudio de las funciones a partir de su gráfico

Cuando de una función numérica conocemos su gráfico →

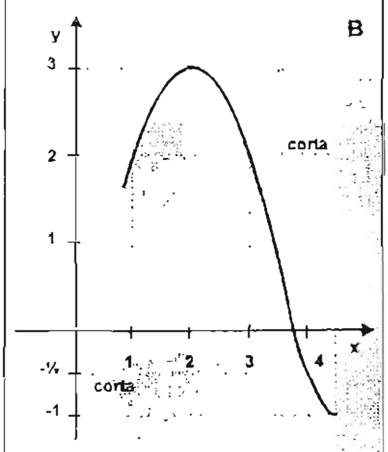
Ejemplo 4



$2 \in \text{dom}\, f$; $3 \notin \text{dom}\, f$; $5 \notin \text{dom}\, f$

$\text{dom}\, f = [1\,,3) \cup (3\,,4] = [1\,,4] - \{3\}$

Ejemplo 5



$4 \notin \text{Im}\, f$; $2 \in \text{Im}\, f$ pues $f(1) = f(3) = 2$

$-\frac{1}{2} \in \text{Im}\, f$ pues $f(4) = -\frac{1}{2}$; $\text{Im}\, f = [-1\,,3]$

A Determinamos su **dominio** sobre el eje de abscisas como el conjunto de los puntos "*a*" tales que la recta vertical que pasa por "*a*" corta al gráfico. Si el punto de intersección es (*a* , y) entonces y = *f*(*a*)

B La **imagen** de *f* puede verse sobre el eje de las ordenadas como el conjunto de los puntos "*b*" para los cuales la recta horizontal que pasa por *b* corta al gráfico por lo menos una vez. Observemos que si (x , *b*) es un punto de dicha intersección, entonces *f*(x) = *b*

C El **conjunto de ceros** de *f* es el conjunto de puntos sobre el que *f* vale cero. Es decir:

$$C_0 = \{\, x \in \text{dom}\, f \;/\; f(x) = 0 \,\}$$

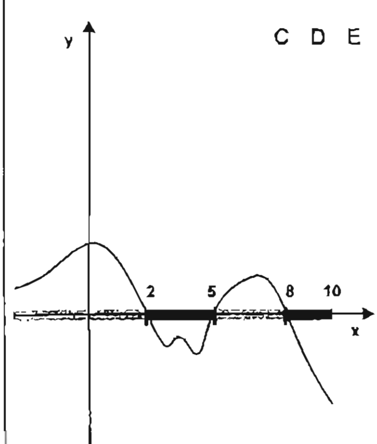
Los ceros de *f* se visualizan como los puntos del dominio para los que el gráfico de *f* corta el eje x.

D El **conjunto de positividad** de *f* es el conjunto de puntos sobre el que *f* toma valores positivos. De otra forma:

$$C_+ = \{\, x \in \text{dom}\, f \;/\; f(x) > 0 \,\}$$

Son los puntos del dominio para los que la correspondiente porción del gráfico se encuentra por encima del eje x.

Ejemplo 6



$C_+ = (-\infty\,,2) \cup (5\,,8)$

$C_- = (2\,,5) \cup (8\,,10)$

$C_0 = \{2{,}5{,}8\}$

E El **conjunto de negatividad** de f es el conjunto de puntos sobre el que f toma valores negativos. De otra forma

$$C_{-} = \{ x \in \text{dom } f \; / \; f(x) < 0 \}$$

Son los puntos del dominio para los que la correspondiente porción del gráfico se encuentra por debajo del eje x.

Crecimiento y decrecimiento. Extremos

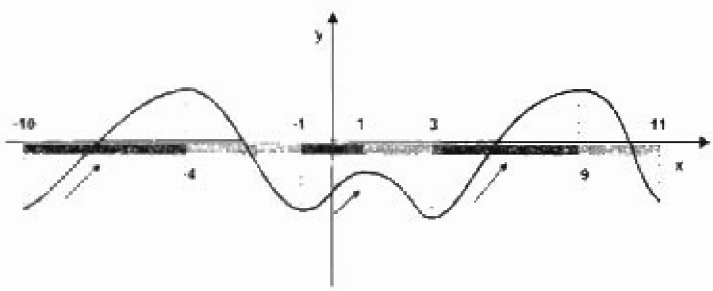
En lo que sigue, f será una función de variable continua. Algunas de las nociones que se presentarán pueden adaptarse al caso de variables discretas, pero no todas.
En todos los incisos F se considerarán funciones $f : A \to R$ donde A es un intervalo de la recta o una unión de ellos.

F1 Un intervalo $I \subseteq A$ es un **intervalo de crecimiento** de f si toda vez que a y b son puntos de I tales que $a < b$ entonces $f(a) \leq f(b)$.
Si recorremos la porción del gráfico correspondiente a uno de estos intervalos de izquierda a derecha, la altura de los puntos va aumentando o manteniéndose.
Una función puede tener un intervalo de crecimiento, más de uno, o eventualmente no tener ninguno.

F2 Análogamente los **intervalos de decrecimiento** de f son aquellos intervalos I tales que siempre que a y b estén en I y sea $a < b$ entonces $f(a) \geq f(b)$.
Cuando la última desigualdad es estricta, si recorremos la porción del gráfico correspondiente a uno de estos intervalos, las ordenadas de dichos puntos son cada vez menores (La altura del gráfico va disminuyendo de izquierda a derecha).

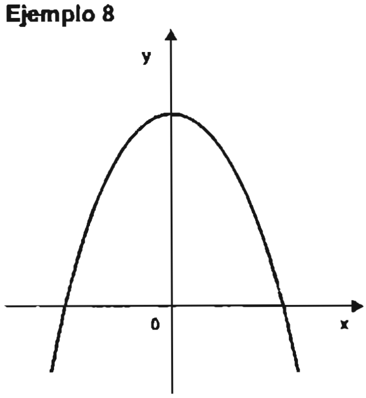
Ejemplo 7

Si f es la del gráfico →
Los intervalos de crecimiento de f son: $[-10, -4]$; $[-1, 1]$; $[3, 9]$
los intervalos de decrecimiento son: $[-4, -1]$; $[1, 3]$; $[9, 11]$

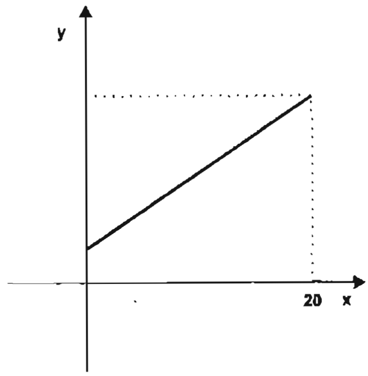


F3 Sea $x_0 \in A$. Decimos que f tiene un **máximo absoluto** en x_0 si $f(x_0) \geq f(x)$ para todo otro x de A. Esto es, $f(x_0)$ es el más grande de los valores que toma f. Una función puede no tener máximo absoluto.

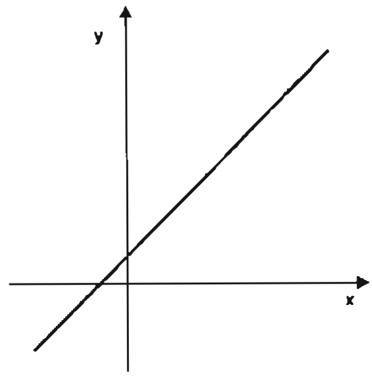
Ejemplo 8



f tiene un máximo absoluto en x = 0



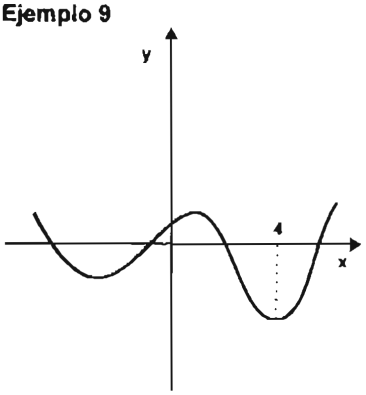
f tiene un máximo absoluto en x =20



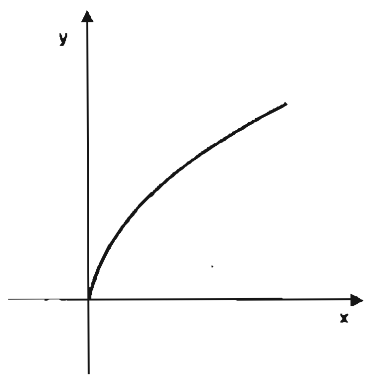
f no tiene máximo absoluto

F4 Decimos que *f* tiene un **mínimo absoluto** en x_0 si $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in A$; o lo que es lo mismo: $f(x_0)$ es el más pequeño de los valores que toma *f*.

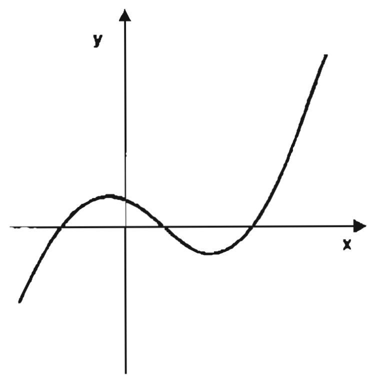
Ejemplo 9



f tiene un mínimo absoluto en x = 4



f tiene un mínimo absoluto en x = 0

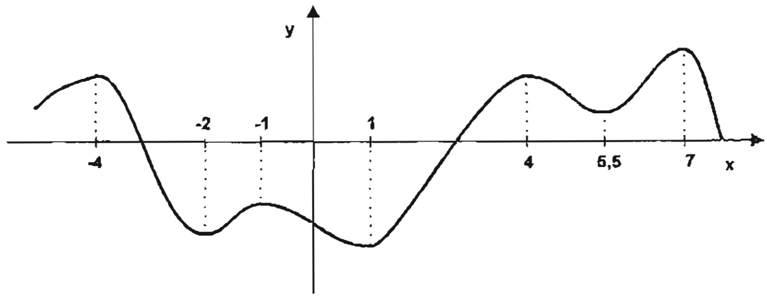


f no tiene mínimo absoluto

F5 Decimos que *f* tiene un **máximo local** en $x_0 \in A$ si puede encontrarse un intervalo alrededor de él en donde $f(x_0)$ sea mayor o igual que $f(x)$ para todos los x de dicho intervalo.
Análogamente, decimos que tiene un **mínimo local** en $x_0 \in A$ si puede encontrarse un intervalo alrededor de él en donde $f(x_0)$ sea menor o igual que $f(x)$ para todos los x de dicho intervalo.

Ejemplo 10 →

f tiene máximos locales en -4; -1; 4 y en 7
f tiene mínimos locales en -2; 1; 5,5 y en 8 ...
En 7 tiene el máximo absoluto;
en 1 el mínimo absoluto.

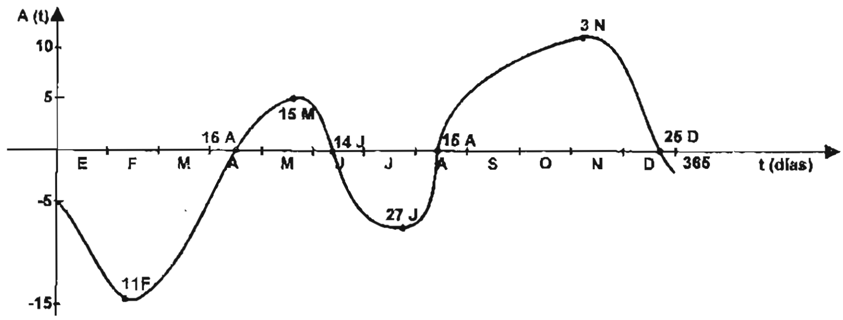


Es frecuente que los máximos locales sean puntos donde se unen un intervalo de crecimiento (a la izquierda) con uno de decrecimiento (a la derecha). Así ocurre en el ejemplo anterior.

Cuando el gráfico de la función puede interpretarse como el perfil de una zona montañosa, los máximos locales están asociados a las cumbres y los mínimos a los valles. La situación anterior no necesariamente debe presentarse toda vez que hay máximo o mínimo absoluto.

Ejemplo 11

Un reloj de sol no es exacto debido a que la tierra en sus movimientos alrededor del sol no va siempre a la misma velocidad. Esta gráfica muestra cuántos minutos se adelanta o se atrasa el reloj en el transcurso de un año.



Para hacer esta gráfica debió elegirse una escala numérica para medir el tiempo:

$t = 0$ indica la 0 horas del 1 de enero de algún año (por ejemplo,1995)

$t = 1$ indica las 0 horas del 2 de enero.

Si $h(t)$ es la hora verdadera en el instante t y $r(t)$ es la hora que indica el reloj de sol en el mismo instante (ambas medidas en minutos), la función graficada es

$$A(t) = r(t) - h(t) \qquad \text{para } t \in [0\ ,\ 365]$$

De todas formas, el dominio natural para A es **R**: el tiempo se extiende indefinidamente hacia el pasado y hacia el futuro, y siempre tiene sentido evaluar A. Ahora bien, como las causas que determinan la distorsión A(t) se repiten año tras año, A(t) repite sus valores cada 365 días. Por lo tanto, el "trozo" de A que se ha graficado, permite obtener conclusiones sobre A para cualquier año.

El reloj de sol "adelanta" en el conjunto de positividad de A, y "atrasa" en el conjunto de negatividad de A.

Los ceros de A, corresponden a los momentos en los que el reloj indica exactamente la hora: esto se registra apenas 4 veces al año, en instantes que ocurren los días 16 de abril, 14 de junio, 1 de setiembre y 25 de diciembre.

El máximo adelanto se registra el 3 de noviembre: el reloj llega a estar 11 minutos adelantado. (Durante ese día, A toma su máximo absoluto)

El máximo atraso se registra el 11 de febrero (corresponde al mínimo absoluto de A(t)). En algún monento de ese día, llega a estar 14 minutos atrasado.

** Hoja en blanco **

Capítulo III

Funciones lineales y Funciones cuadráticas

Introducción

Hemos presentado ya el concepto de función, poniendo de relieve la importancia que tiene este concepto a la hora de representar o modelizar diversos fenómenos sociales o de la naturaleza.

El objetivo principal de la materia es adquirir una serie de herramientas que nos permitan analizar las funciones, estudiarlas, representarlas con bastante detalle

Sin embargo, antes de entrar en el estudio de estas herramientas, nos detendremos en la presentación de algunas funciones particulares que por su sencillez, por su relevancia en matemáticas (son básicas para el estudio de otras funciones) y por su aplicabilidad en otras ciencias, resultan de extraordinaria importancia. Estas funciones son las llamadas funciones polinómicas. Las funciones lineales y las cuadráticas son, entre las funciones polinómicas, las más sencillas, y a la vez las más importantes en las aplicaciones. Es por ello que las estudiamos con más detalle.

FUNCIONES LINEALES

o o o **Gráfico de una función lineal**

Llamaremos funciones lineales a las que se representan gráficamente mediante rectas. Su expresión analítica es de la forma

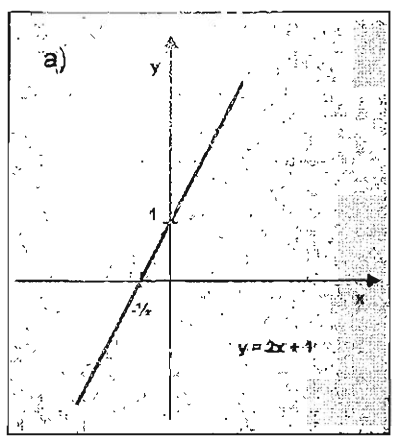
$$f(x) = m \cdot x + b$$

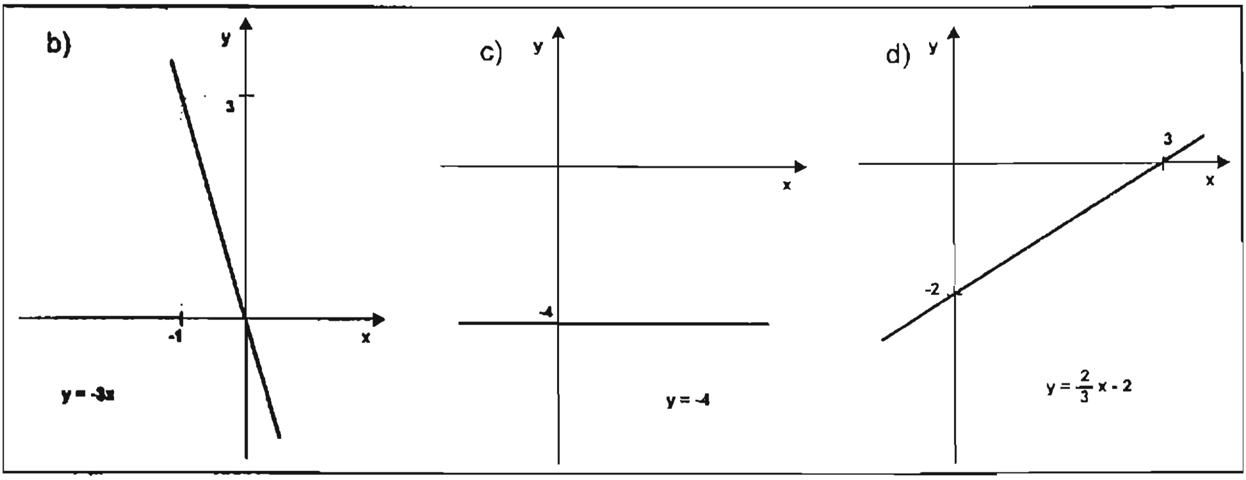
donde m y b son números reales fijos.

Ejemplos

a) $f(x) = 2x + 1$
b) $f(x) = -3x$
c) $f(x) = -4$
d) $f(x) = \frac{2}{3}x - 2$

Son ejemplos de funciones lineales. Sus gráficos son rectas →





Función lineal dados dos puntos

Si recordamos del colegio que "por dos puntos pasa una única recta" estaremos dispuestos a aceptar que, para conocer la expresión de una función lineal (ecuación de la recta) es suficiente conocer el valor de la función en dos puntos distintos.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1

Sabiendo que una función lineal f satisface $f(3) = 0$ y $f(-1) = -\frac{8}{3}$ hallar $f(x)$, para todo $x \in \mathbf{R}$.

Solución

Como f es una función lineal sabemos que es de la forma

$$f(x) = m \cdot x + b$$

tenemos que determinar, con los datos que nos dan, el valor de m y el valor de b. Procedamos pues:

$f(3) = 0$	$f(-1) = -\frac{8}{3}$
nos dice que al reemplazar	nos dice que al reemplazar
x por 3 obtenemos 0	x por -1 obtenemos $-\frac{8}{3}$
$0 = f(3) = m \cdot 3 + b$	$-\frac{8}{3} = f(-1) = m \cdot (-1) + b$

Las dos ecuaciones que obtuvimos alcanzan para hallar nuestras dos incógnitas m y b. Las escribimos mejor para poder resolver el sistema

$$\begin{cases} 3m + b = 0 \\ -m + b = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

las incógnitas son m y b

Una forma sencilla de resolver éste sistema es restar la segunda ecuación de la primera para despejar m, a saber:

$$\begin{array}{rcl} 3m + b & = & 0 \\ -m + b & = & -\frac{8}{3} \\ \hline 4m & = & \frac{8}{3} \Rightarrow m = \frac{2}{3} \end{array}$$

Para obtener b reemplazamos el valor de m en, por ejemplo, la primera ecuación:

$$3m + b = 0 \Rightarrow 3 \, . \, \frac{2}{3} + b = 0 \Rightarrow 2 + b = 0 \Rightarrow b = -2$$

Encontrados $m = \frac{2}{3}$ y $b = -2$ hemos hallado $f(x)$:

$$f(x) = \frac{2}{3}x - 2$$

Podemos comprobar el resultado:

$$f(3) = \frac{2}{3}3 - 2 = 0$$

$$f(-1) = \frac{2}{3}(-1) - 2 = -\frac{8}{3}$$

Ejemplo 2

Hallar la ecuación de la recta que pasa por

$$P = (x_1 \, , y_1) \quad y \quad Q = (x_2 \, , y_2) \qquad x_1 \neq x_2$$

Solución

Es similar al ejemplo anterior. La ecuación de la recta (gráfico de una función lineal) es de la forma

$$y = m.x + b$$

y nuestro objetivo es hallar m y b.

Que pase por $P = (x_1 \, , y_1)$ nos dice que $y_1 = m.x_1 + b$

Que pase por $Q = (x_2 \, , y_2)$ nos dice que $y_2 = m.x_2 + b$

(x_1 , x_2 , y_1 , y_2 son datos !!)

Debemos resolver el sistema (las incógnitas son m y b)

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + b \\ y_2 = mx_2 + b \end{cases}$$

Como antes, restamos la segunda de la primera y despejamos m:

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & m.x_1 + b \\ y_2 & = & m.x_2 + b \\ \hline y_1 - y_2 & = & m \, . \, (x_1 - x_2) \end{array}$$

Como $x_1 \neq x_2$, podemos pasar dividiendo ($x_1 - x_2$) y despejar m

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

El valor de b se puede despejar de la primera ecuación:

$$b = y_1 - mx_1 \iff b = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1$$

La ecuación de la recta es, por lo tanto:

$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x + y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1$$

o, como aparece son frecuencia,

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_1)$$

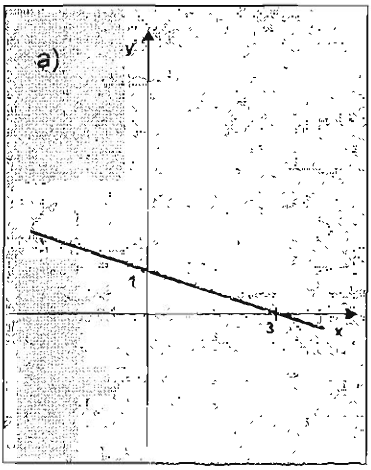
Observación

La condición $x_1 \neq x_2$ nos pemitió despejar m. Si $x_1 = x_2$ la recta buscada tiene ecuación $x = x_1$. Esta recta es vertical y no corresponde al gráfico de una función ¿Por que?

Función lineal a partir del gráfico

Ejemplo 3

A partir de los siguientes gráficos, escribir la función lineal correspondiente a cada recta.



Solución

a) Como siempre, buscamos una función lineal $f(x) = m.x + b$
Debemos encontrar, por medio de los datos que aporta el gráfico, los valores de m y b
Se observa que la recta pasa por el punto (1 , 1) y por el punto (3 , 0) (este último es el punto donde la recta corta al eje x)
Ya que tenemos dos puntos por donde pasa el gáfico de f procedemos como en los ejemplos anteriores:

que pase por el (1 , 1) significa que $f(1) = 1 \Rightarrow m.1 + b = 1$
que pase por el (3 , 0) significa que $f(3) = 0 \Rightarrow m.3 + b = 0$
restando la segunda ecuación de la primera $m.(-2) = 1$

$$\Downarrow$$

$$m = -\frac{1}{2}$$

De la primera ecuación despejamos b:

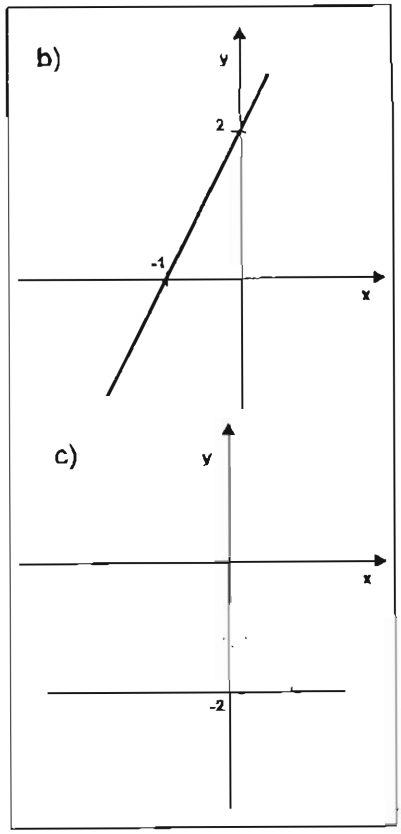
$$-\frac{1}{2} + b = 1 \Rightarrow b = 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

En consecuencia la función lineal correspondiente a la recta del gráfico es

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Podemos comprobar que el (1 , 1) y el (3 , 0) pertenecen a la recta:

$$f(1) = (-\frac{1}{2}).1 + \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad y \quad f(3) = (-\frac{1}{2}).3 + \frac{3}{2} = 0$$



b) En este caso observamos que la recta corta al eje x en -1, con lo cual el punto (-1 , 0) pertenece a la recta; al eje y en 2, con lo cual el punto (0 , 2) pertenece a la recta.

Procedamos como de costumbre:

Si pasa por (-1 , 0) $\Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow m.(-1) + b = 0$
Si pasa por (0 , 2) $\Rightarrow f(0) = 2 \Rightarrow m.0 + b = 2$
De la segunda se obtiene b = 2

Reemplazando en la primera, despejamos m

$$-m + 2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

Luego la función lineal en este caso es:

$$f(x) = 2x + 2$$

Haga usted la comprobación de que el resultado hallado es correcto.

c) Aquí observamos que la recta es horizontal. Más precisamente, los puntos de la recta tienen siempre segunda coordenada igual a (-2). Es decir, son todos de la forma (x , -2), con x cualquiera. En este caso no vale la pena hacer la cuenta ya que se advierte que la función lineal buscada es

$$f(x) = -2$$

○ ○ ○

Para qué sirve la función lineal

La función lineal corresponde a nuestra idea de proporcionalidad (recuerde el Ejemplo 3 del apartado anterior de la familia Dongo). Hay muchos fenómenos que responden a (o se pueden aproximar por) un modelo lineal.
He aqui algunos ejemplos:

- El alargamiento de un resorte es proporcional al peso que colgamos de él:

  $A(p) = k . p$ (A(p):alargamiento ; p:peso)
  (k : factor de alargamiento)

- Si se tiene en cuenta la longitud inicial L_0 del resorte, su longitud final será:

  $L(p) = L_0 + k . p$ (L(p):longitud final ; L_0: longitud inicial)

- El dinero que gana en concepto de intereses un inversor es proporcional al capital C que deposita:

  $I(C) = k . C$ (I(C) : interes ; k:capital)

  (el factor k de proporcionalidad, representa la tasa de interés que paga el banco).

- La dosis de un medicamento es proporcional al peso del enfermo. En este caso la relación lineal es aproximada.

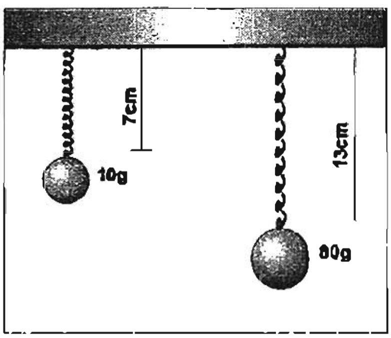
Veamos en un problema concreto cómo se aplica lo visto hasta aquí.

Ejemplo 4

Un resorte mide 7 cm cuando colgamos de él 10 gramos y mide 13 cm cuando colgamos 80 gramos.

a) Escriba la ecuación que liga la longitud L con el peso P.
b) ¿Cuál es la longitud del resorte cuando no colgamos ningún peso?
c) Teniendo en cuenta que el resorte empieza a deformarse y perder elasticidad cuando se alarga cinco veces su longitud inicial, ¿cuál es el dominio de definición de la función L(p)?
d) ¿Cuál es la variación de longitud por cada 10 gramos?¿y por cada 5 gramos?, ¿y por cada gramo?

Solución



a) Llamemos L(p) a la función lineal que liga la longitud con el peso. Entonces, como es lineal

$$L(p) = m.p + b$$

donde p se mide en gramos y L(p) en centímetros. (aquí la variable, en lugar de llamarse x, se llama p. No se deje confundir por este hecho, es sólo una cuestión de nombre).
Como siempre, nuestro objetivo es hallar el valor de m y el valor de b.
Veamos cómo traducimos la información que nos da el problema:

"mide 7 cm cuando colgamos de él 10 gramos"

quiere decir que, cuando p = 10, L(p) = 7. O sea

$$7 = L(10) = m.10 + b \qquad (1)$$

Por otra parte, nos dicen que

"mide 13 cm cuando colgamos 80 gramos"

Esto quiere decir que, cuando P = 80, L(p) = 13. O sea

$$13 = L(80) = m.80 + b \qquad (2)$$

Con las ecuaciones (1) y (2) formamos el sistema

$$\begin{cases} 10m + b = 7 \\ 80m + b = 13 \end{cases}$$

Restando la primera ecuación de la segunda, despejamos m:

$$\begin{array}{rrrrr} & 80m & + b & = & 13 \\ - & 10m & + b & = & 7 \\ \hline & 70m & & = & 6 \end{array} \Rightarrow m = \frac{6}{70} = \frac{3}{35} \Rightarrow m = \frac{3}{35}$$

Reemplazamos el valor de m y despejamos b de la primera ecuación:

$$10.\frac{3}{35} + b = 7 \Rightarrow \frac{6}{7} + b = 7 \Rightarrow b = 7 - \frac{6}{7} = \frac{43}{7} \Rightarrow b = \frac{43}{7}$$

En consecuencia, la ecuación que liga la longitud del resorte con el peso p es:

$$L(p) = \frac{3}{35}\,p + \frac{43}{7}$$

b) La longitud del resorte cuando no colgamos ningún peso se obtiene poniendo p = 0. Así :

$$L(0) = \frac{43}{7} \cong 6{,}1 \text{ cm}$$

c) Cuando el resorte empieza a deformarse y perder elasticidad el modelo lineal L(p) deja de ser válido. Esto quiere decir que no podemos colocar cualquier valor de p en L(p) ya que si p es muy grande L(p) dejará de darnos con precisión la longitud del resorte.
Nos dicen que tengamos en cuenta que

"el resorte empieza a deformarse cuando
se alarga cinco veces su longitud inicial"

En la parte b) obtuvimos que la longitud inicial era $\frac{43}{7}$ cm.

Entonces cinco veces la longitud inicial es $5.\frac{43}{7} = \frac{215}{7} \cong 30{,}7$ cm.

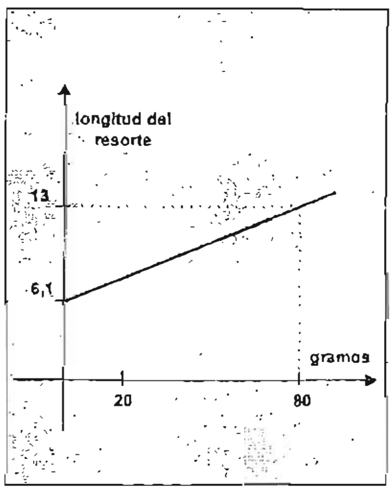
De acuerdo con esto, para que L(p) sea correcta el peso debe ser tal que L(p) no supere $\frac{215}{7}$ cm. En otras palabras

$$L(p) = \frac{3}{35}\,p + \frac{43}{7} \leq \frac{215}{7}$$

Resolvamos esta desigualdad

$$\frac{3}{35}\,p + \frac{43}{7} \leq \frac{215}{7} \Leftrightarrow \frac{3}{35}\,p \leq \frac{215}{7} - \frac{43}{7} = \frac{172}{7}$$

$$\Leftrightarrow \quad p \leq \frac{35}{3} \cdot \frac{172}{7} = \frac{860}{3} \cong 286{,}7 \text{ gramos}$$



Es decir que, para que el resorte no se deforme debe ser

$$p \leq \frac{860}{3}$$

Por otra parte, obviamente , p no puede ser negativo (no tiene sentido colgar del resorte pesos negativos!). O sea que $p < 0$
Luego el dominio de definición de L(p) en el presente problema es el intervalo $[0 , \frac{860}{3}]$. O sea

$$\text{dom}(L) = [0 , \frac{860}{3}]$$

d) Para responder a esta pregunta debemos saber qué se entiende por variación. La manera natural de medir la variación de una magnitud (L(p) en nuestro caso) que cambia al cambiar otra (el peso p) es al siguiente: "L(p) cambia (crece o decrece) tanto cuando p crece tanto". En nuestro problema nos preguntan sobre la variación de L(p) cuando p crece 10 gramos. La medida de esta variación viene dada por la diferencia

$$L(p + 10) - L(p) \qquad (3)$$

(mide cuánto varió L al poner 10 gramos más). Hagamos la cuenta, recordando que

$$L(p) = \frac{3}{35}p + \frac{43}{7}$$

$$\begin{array}{lcll} L(p+10) & = & \frac{3}{35}(p+10) & + \frac{43}{7} \\ L(p) & = & \frac{3}{35}p & + \frac{43}{7} \\ \hline L(p+10) - L(p) & = & \frac{3}{35}.10 & = \frac{6}{7} \end{array}$$

Luego la variación de L(p) cada 10 gramos es $\frac{6}{7}$ cm
Cada 5 gramos

$$L(p + 5) - L(p) = \frac{3}{35}(p + 5) + \frac{43}{7} - \frac{3}{35}p - \frac{43}{7} = \frac{3}{7}$$

La variación de L(p) cada 5 gramos es $\frac{3}{7}$

$$L(p=1) - L(p) = \frac{3}{35}(p+1) + \frac{43}{7} - \frac{3}{35}p - \frac{43}{7} =$$

Luego la variación de L(p) por cada gramo es $\frac{3}{35}$ cm

Variación de una función lineal

La observación o análisis de un fenómeno conduce al estudio de una función. La variación de la función que representa el fenómeno es el aspecto que probablemente interesa más desde el punto de vista práctico a fin de hacer previsiones y tomar los recaudos necesarios cuando la magnitud que estudiamos se acerca a valores que consideramos críticos. (Considere, por ejemplo, la variación del nivel de agua de un embalse que crece en tiempo lluvioso y decrece en épocas de sequía).

Observe en el problema anterior que, en principio, la diferencia (3) depende del peso p (la variable x en general). Sin embargo, cuando hicimos la cuenta el resultado nos dio un número independiente de p. Lo mismo ocurrió cuando calculamos la variación cada 5 gramos y por cada gramo. Si repasamos las cuentas que hicimos en cada caso observamos además que cada variación se obtiene multiplicando la cantidad de gramos por el coeficiente m ($\frac{3}{35}$ en este caso) de la función lineal.

Pendiente

Esta es una porpiedad general de las funciones lineales que se expresa diciendo que "la variación relativa de una función lineal es constante". Analíticamente se expresa de la siguiente manera:

Sea $f(x) = m.x + b$ una función lineal, entonces

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

es constante cualquiera sean x_1, x_2 $(x_1 \neq x_2)$

En efecto

$$f(x_1) - f(x_2) = mx_1 + b - mx_2 - b = m(x_1 - x_2)$$

Entonces

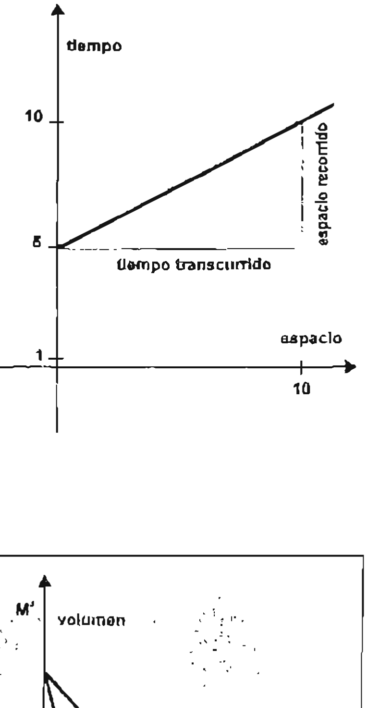
$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{m(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = m \qquad (4)$$

Al coeficiente m se lo llama pendiente de la recta y mide la variación relativa de f.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 5

La gráfica que se muestra corresponde al espacio recorrido por un móvil que se desplaza con movimiento uniforme. Calcule la variación relativa e interprete su significado.



Solución

Llamemos r(t) al espacio recorrido en t segundos por el móvil. En el gráfico vemos que cuando t aumenta 10 el espacio recorrido por el móvil es 5. Entonces

$$m = \frac{\text{espacio recorrido}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{r(10) - r(0)}{10 - 0} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

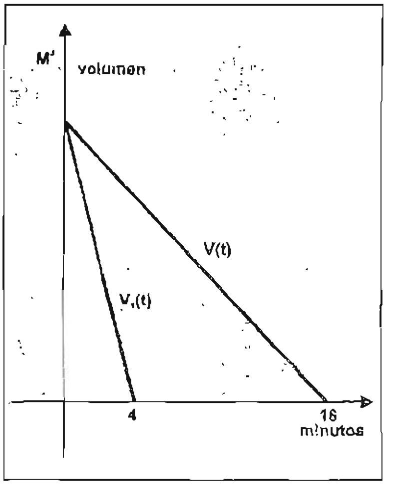
La pendiente $\frac{1}{2}$ nos da la velocidad del móvil. Es fácil calcular r(t): teniendo en cuenta que r(0) = 5 , resulta

$$r(t) = \frac{1}{2}t + 5$$

Ejemplo 6

Un depósito se vacía mediante una bomba de agua. El volumen de agua que queda (en m^3) en función del tiempo transcurrido (en segundos) viene dado por

$$V(t) = 8 - \frac{1}{2}t$$



¿Cuántos metros cúbicos de agua había al poner en funcionamiento la bomba? ¿Cuál será el volumen en función del tiempo si el depósito se vacía con una bomba cuatro veces más potente que la original?

Solución

La bomba se pone en funcionamiento en t = 0. En ese instante V(0) = 8 m^3 . La pendiente $-\frac{1}{2}$ de V(t) da la variación (decrecimiento) del volumen de agua por unidad de tiempo. Si ahora la bomba de agua es 4 veces más potente, la pendiente debe ser $4 . (-\frac{1}{2}) = -2$. Luego, si llamamos $V_1(t)$ a la nueva función, es

$$V_1(t) = 8 - 2t$$

Funciones lineales a trozos

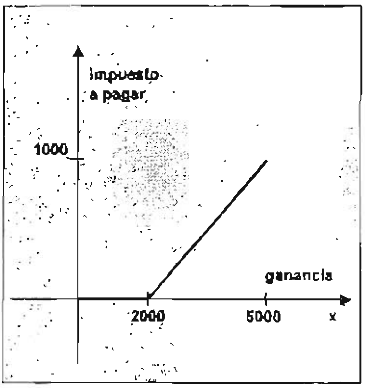
Ejemplo 7

Las personas que ganan menos de 5000 dólares deben pagar, en concepto de impuestos, una tercera parte de lo que ganan por encima de los 2000 dólares. Determinar la función de pagos.

Solución

Llamemos $f(x)$ a la función buscada. Mientras una persona gane menos de 2000 dólares no debe pagar impuestos. Es decir que

$$f(x) = 0 \text{ si } 0 \leq x \leq 2000$$



Cuando x supera los 2000 dólares hay que pagar $\frac{1}{3}$ de lo que se gana por encima de 2000. Lo que se gana por encima de 2000 es (x - 2000) dólares. Entonces

$$f(x) = \frac{1}{3}(x - 2000) \quad \text{si} \quad 2000 \leq x \leq 5000$$

En síntesis

$$\begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 2000 \\ \frac{1}{3}(x - 2000) & \text{si } 2000 \leq x \leq 5000 \end{cases}$$

La pendiente $\frac{1}{3}$ mide la rapidez con que aumenta lo que hay que pagar.
←

Signo de la pendiente

La pendiente m no sólo sirve para medir la variación relativa de f, sino que su signo nos da información directa sobre el crecimiento o decrecimiento de f. En efecto, observemos una vez más la fórmula (4)

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

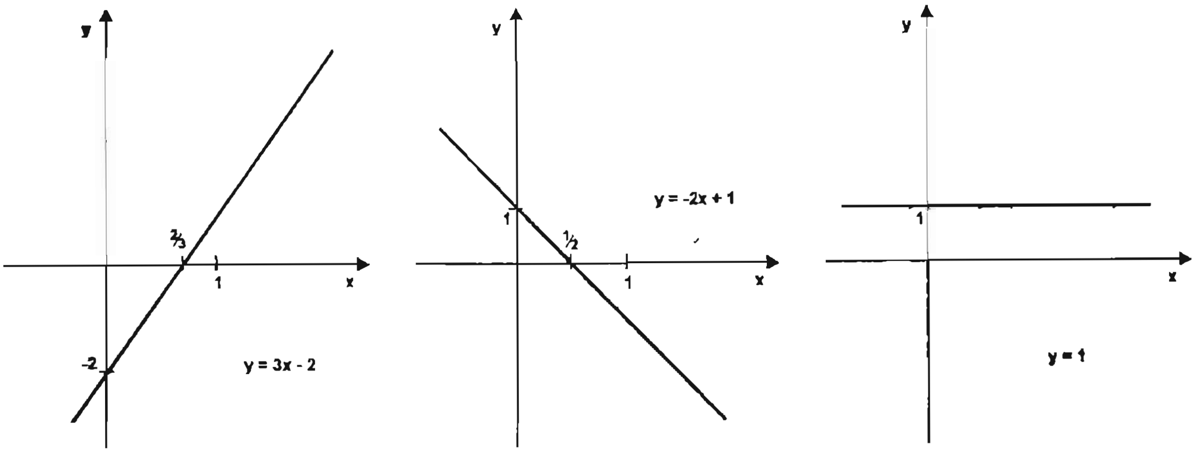
Tomemos $x_1 > x_2$, de modo que el denominador $x_1 - x_2 > 0$. Entonces el signo de m coincide con el signo de la variación $f(x_1) - f(x_2)$. De esta manera si

$m > 0 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f$ es creciente.

$m < 0 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f$ es decreciente.

$m = 0 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f$ es constante.

En síntesis



m > 0 ⇒ f es creciente | m < 0 ⇒ f es decreciente | m = 0 ⇒ f es constante

Así por ejemplo

$$f(x) = 3x - 2$$

es creciente pues la pendiente 3 es mayor que 0.

$$f(x) = -2x + 1$$

es decreciente pues la pendiente -2 es negativa.

$$f(x) = 1$$

es constante. Aquí m = 0.

Veamos, por último, un problema de aplicación de la función lineal.

Ejemplo 8

Un granjero quiere vender su producción de naranjas y considera dos alternativas:

A) Venderla a la cooperativa local que paga 0,5 dólares el kilo libre de impuestos y absorbe toda la producción. Los gastos fijos por flete son de 100 dólares.

B) Alquilar un puesto en el mercado central donde puede venderlas a 1 dólar el kilo. Se estima que el 10% de la producción no se vende. La tasa impositiva asciende al 20% sobre el total de ventas y el alquiler más los gastos fijos suman 400 dólares.

a) Describa las ganancias en función de los kilogramos producidos en cada una de las alternativas.

b) Decida cuándo le conviene elegir una u otra alternartiva.

Solución

a) Llamaremos A(p) y B(p) a la ganancias correspondientes a las alternativas A y B respectivamente. La variable p da la producción de naranjas en kilogramos.
Si la cooperativa, por cada kilogramo le paga 0.5 dólar, por p kilogramos le pagará 0,5p dólares. En consecuencia teniendo en cuenta los gastos fijos

$$A(p) = 0.5p - 100 \qquad (5)$$

Por otra parte, en el puesto del mercado central recauda 1 dólar por kilo. En esta alternativa vende el 90% de la producción. Entonces, si la producción es de p kilos vende 0,9p kilos, a dólar el kilo, recauda 0.9p dólares. De esta recaudación bruta hay que deducir los gastos para obtener B(p):

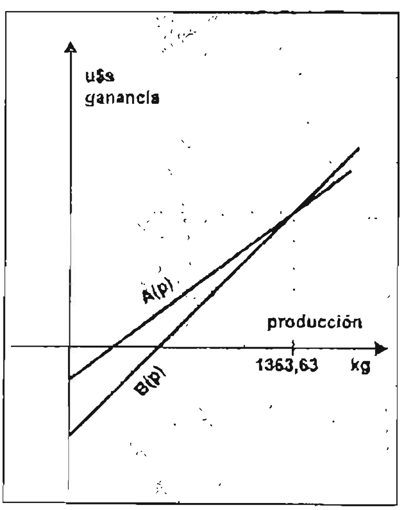
Impuestos (20% sobre las ventas) .... (0,2)(0,9)p = 0,18p u$s
Alquiler + gastos fijos .... 400,00 u$s

Total gastos .... (0,18p + 400) u$s

Entonces

$$B(p) = 0.9p - (0{,}18p + 400) = 0.72p - 400 \qquad (6)$$

Las ecuaciones (5) y (6) dan las ganancias en cada una de las dos alternativas presentadas. Así, por ejemplo, si la producción del granjero es de 1000 kilos la ganancia será de



A(1000) = 5,0 . 1000 - 100 = 400 u$s para la alternativa A
B(1000) = 0,72 . 1000 - 400 = 320 u$s para la alternativa B

Los valores de las pendientes (0,5 para A y 0,72 para B) determinan lo que en economía se llama ganancia marginal.

b) Debemos determinar cuándo le conviene al granjero adoptar la alternativa A y cuándo la alternativa B. Obviamente, cuando A(p) > B(p) la alternativa A será más atractiva que la B y a la inversa si pasa lo contrario.
Determinemos pues, para qué valores de p resulta A(p) > B(p)

$$A(p) > B(p) \Leftrightarrow 0{,}5p - 100 > 0{,}72p - 400 \Leftrightarrow 400 - 100 > (0{,}72 - 0{,}5)p$$

$$300 > 0{,}22p \Leftrightarrow \frac{300}{0{,}22} > p \Leftrightarrow p < \frac{15000}{11} \cong 1363{,}63 \text{ kilos}$$

En consecuencia

Si p < 1363,63 kilos conviene adoptar la alternativa A
Si p > 1363,63 kilos conviene adoptar la alternativa B

FUNCION CUADRATICA

○ ○ ○ Definición

Llamaremos funciones cuadráticas a las que pueden expresarse en la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\text{con } a, b, c \in R \quad a \neq 0$$

Las funciones cuadráticas siguen en sencillez a las funciones lineales que acabamos de estudiar, y también en importancia. Muchos fenómenos de interés pueden ser descriptos por medio de funciones cuadráticas.

- Cuando una piedra cae de un décimo piso, la distancia recorrida es proporcional al cuadrado del tiempo de caída.
- El área de un círculo es proporcional al cuadrado del radio

$$A(r) = \pi \cdot r^2$$

- Los faros de los autos y las antenas que reciben las señales de los satélites atificiales (antenas parabólicas) tienen sección parabólica y, por tanto, pueden ser descriptas por medio de funciones cuadráticas.

La última afirmación encuentra su justificación en el hecho de que los gráficos de las funciones cuadráticas son parábolas.

Las parábolas tienen caracteristicas comunes que nos permitirán graficar las funciones cuadráticas con poco esfuerzo.

Para descubrir estas caracteristicas estudiaremos con detalle las funciones cuadráticas más simples.

○ ○ ○ Características

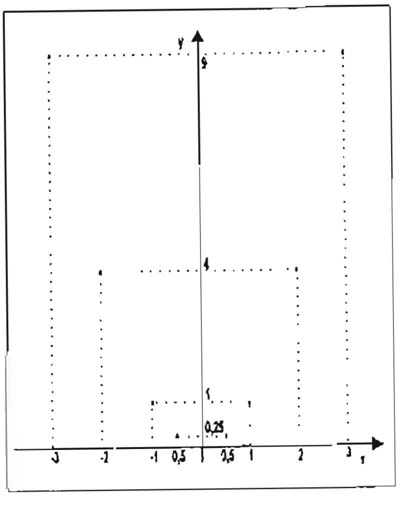
Ejemplo 1

La función $f(x) = x^2$

Para obtener su representación gráfica vamos a construir una tabla de valores y representar en el plano los puntos obtenidos

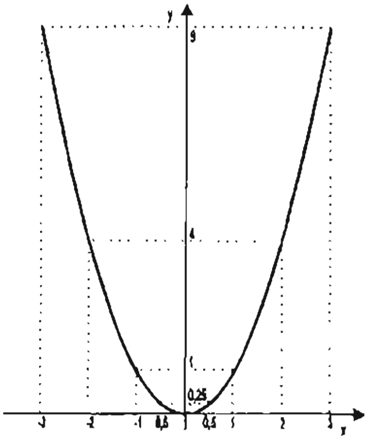
➔

x	$y = x^2$
-3	9
-2	4
-1	1
-0,5	0,25
0	0
0,5	0,25
1	1
2	4
3	9



- La gráfica es *simétrica* respecto del eje y (se llama eje de simetría de la parábola). Esto es asi porque

$$a^2 = (-a)^2$$

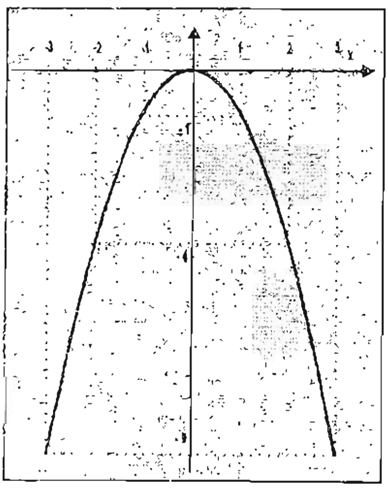


- La función es *creciente* a la derecha del eje de simetría (en el intervalo $(0, +\infty)$) y *decreciente* a la izquierda de dicho eje (en el intervalo $(-\infty, 0)$).

- La función tiene un mínimo en el punto (0 , 0). A este punto, que se encuentra en el eje de simetría se lo llama *vértice* de la parábola.

Teniendo en cuenta estas características y los puntos ya representados, dibujamos el gráfico de $y = x^2$.

←



Ejemplo 2

$f(x) = -x^2$. Hacemos un análisis similar al anterior.

x	$y = -x^2$
-3	-9
-2	-4
-1	-1
0	0
1	-1
2	-4
3	-9

En este caso

- El *eje de simetría* de la parábola también es el eje de las y.
- La función es *decreciente* a la derecha del eje de simetría (en el intervalo $(0, +\infty)$) y *creciente* a la izquierda de dicho eje (en el intervalo $(-\infty, 0)$).
- La curva tiene un máximo en el vértice.

←

Traslaciones de gráficos

En los dos ejemplos siguientes obtendremos el gráfico de funciones cuadráticas a partir del gráfico de $y = x^2$ obtenido en el ejemplo 1.

Ejemplo 3

Graficar las funciones $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = x^2 - 1$

Solución

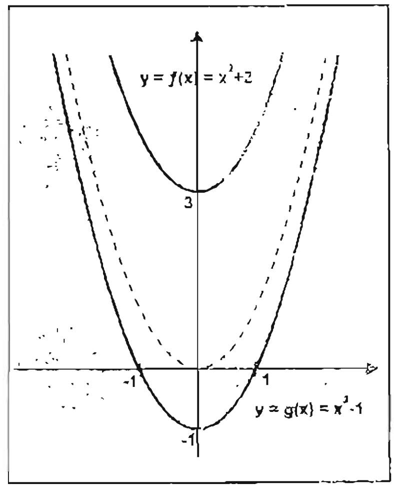
x	x^2	$x^2 + 3$	$x^2 - 1$
-3	9	12	8
-2	4	7	3
-1	1	4	0
-0,5	0,25	3,25	- 0,75
0	0	3	-1
0,5	0,25	3,25	- 0,75
1	1	4	0
2	4	7	3
3	9	12	8

Comparemos las tablas de valores de estas dos funciones con la tabla de valores que construimos para $y = x^2$.

←

Los valores de $x^2 + 3$, se obtienen sumando 3 a los de x^2. Por tanto, el gráfico de $y = x^2 + 3$ se obtiene *subiendo* tres unidades el gráfico de $y = x^2$. El vértice es el punto (0 , 3)

De la misma manera, el gráfico de $y = x^2 - 1$ se obtiene bajando una unidad el de $y = x^2$. El vértice es el punto (0 , -1) →



En general el gráfico de $y = x^2 + k$ se obtiene trasladando | k | unidades el gráfico de $y = x^2$. Si k es positivo la traslación es hacia arriba; si es negativo, hacia abajo. El eje de simetria no cambia y el vértice es el punto (0 , k).

Ejemplo 4

Graficar la función $f(x) = (x - 3)^2$

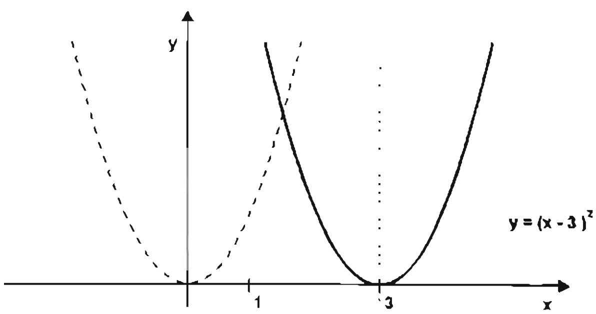
Solución

Como en el ejemplo anterior comparemos la tabla de valores de esta función con la tabla de valores de $y = x^2$

x	$y = x^2$
-3	9
-2	4
-1	1
-0,5	0,25
0	0
0,5	0,25
1	1
2	4
3	9

x	$(x - 3)^2$
0	9
1	4
2	1
2,5	0,25
3	0
3,5	0,25
4	1
5	4
6	9

La curva $y = (x - 3)^2$ se obtiene pues trasladando la curva $y = x^2$ hacia la derecha tres unidades. De esta manera el eje de simetria resulta ser la recta $x = 3$ y el vértice el punto (3 , 0).



En general, el gráfico de $y = (x - p)^2$ se obtiene trasladando | p | unidades el gráfico de $y = x^2$. Si p es positivo la traslación es hacia la *derecha*. Si es negativo es hacia la *izquierda*. El eje de simetría es la recta $x = p$ y el vértice el punto (p , 0).

Ejemplo 5

Graficar la función $f(x) = (x - 3)^2 + 1$

Solución

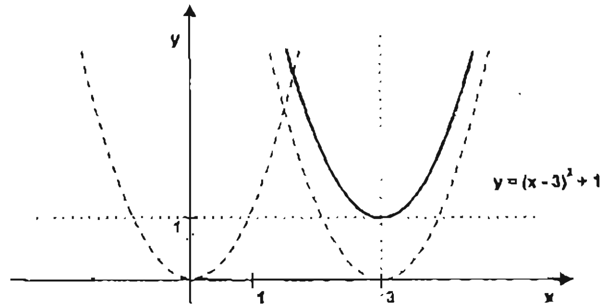
Podemos hacerlo por partes, teniendo en cuenta lo dicho precedentemente. Para obtener el gráfico de

$$y = (x - 3)^2$$

trasladamos 3 unidades hacia la derecha el gráfico de $y = x^2$ y para obtener el gráfico de la función

$$f(x) = (x - 3)^2 + 1$$

lo subimos una unidad. Así obtenemos



Eje de simetría

Vemos pues que el eje de simetría de la parábola es de gran utilidad para poder hacer el gráfico de la función cuadrática correspondiente.

En general, si tenemos la función cuadrática

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \qquad (\text{con } a \neq 0)$$

se puede comprobar que

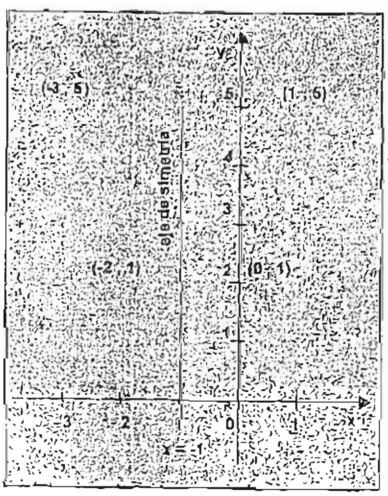
$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c = a.(x - \frac{-b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

con lo que el eje de simetría de la parábola asociada es la recta vertical de ecuación $x = \frac{-b}{2a}$.

Ejemplo 6

Hallar el eje de simetría de la parábola que es gráfico de la función cuadrática $f(x) = x^2 + 2x + 2$

Solución



Aplicamos la fórmula y obtenemos

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2.1} = -1$$

O sea la recta x = -1. Esto quiere decir que si un punto está en el gráfico de f, entonces su simétrico respecto de la recta x = -1 también está en el gráfico. Por ejemplo:

Dado que $f(1) = 1^2 + 2.1 + 2 = 5$, el punto (1 , 5) está en el gráfico de f. El simétrico de (1 , 5) respecto de x = -1, el punto (-3 , 5),también pertenece al fráfico de f. En efecto:

$$f(-3) = (-3)^2 + 2(-3) + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$$

Hemos comprobado que (-3 , 5) está en el gráfico de f.

De la misma forma, como $f(0) = 2$, el punto (0 , 2) está en el gráfico de f. Su simétrico respecto de x = -1 es (-2 , 2). Entonces (-2 , 2) debe pertenecer al gráfico de f, o sea que debe ser $f(-2) = 2$. Si desconfiamos una vez más:

$$f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) + 2 = 4 - 4 + 2 = 2$$

y nuevamente hemos confirmado la simetría del gráfico.

O O O Vértice

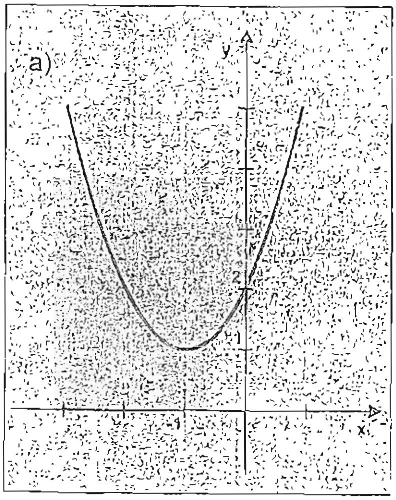
El punto donde se cortan la párabola y el eje de simetría se llama vértice.

Por estar sobre el eje de simetría conocemos su abscisa: $\frac{-b}{2a}$. Para averiguar su ordenada basta calcular $f(\frac{-b}{2a})$.

El vértice del gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ (con $a \neq o$) es el punto $(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}))$.

En el ejemplo 6, $f(x) = x^2 + 2x + 2$, habíamos hallado el eje de simetría, (x = -1) entonces el vértice de esta parábola es el punto
$(-1 , f(-1)) = (-1 , 1)$

Vemos entonces que para graficar una función cuadrática, conviene ubicar su eje de simetría, ya que entonces bastará con trazar una rama de la parábola, por ejemplo a la derecha del eje, y luego, sin hacer más cálculos, trazar la rama simétrica hacia la izquierda.



Ejemplo 7

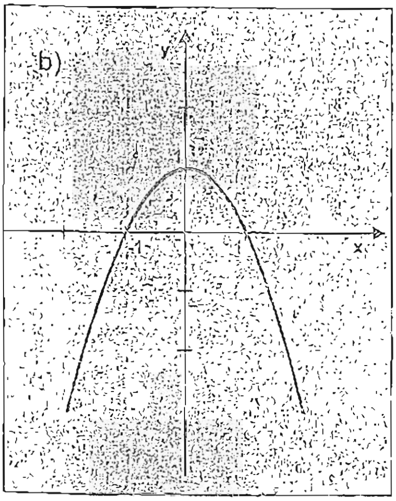
Hallar el eje de simetría, el vértice y graficar aproximadamente las siguientes funciones cuadráticas:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 2$
b) $g(x) = -x^2 + 1$
c) $h(x) = x^2 - 4x + 4$

Solución

a) Es la función del ejemplo 6.

Eje de simetría: x = -1   Vértice: (-1 , 1)

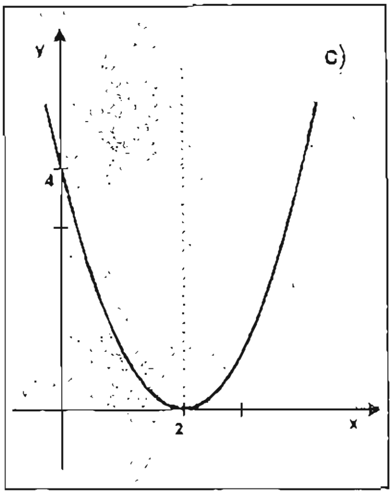


b) $g(x) = -x^2 + 1$

Eje de simetría: $x = \frac{0}{2(-1)}$ es decir x = 0

Vértice: $(0 , g(0)) = (0 , 1)$

Notar que el gráfico de g se obtiene "subiendo" la curva $y = -x^2$, que ya dibujamos al principio, una unidad:



c) $h(x) = x^2 - 4x + 4$

Eje de simetría: $x = \frac{-4}{2.1}$ es decir $x = 2$

Vértice: $(2\ ,\ h(2)) = (2\ ,\ 4 - 8 + 4) = (2\ ,\ 0)$

Observemos que para el gráfico de f el vértice corresponde a un mínimo de la función, o sea que la función no toma valores inferiores a 1. Lo mismo ocurre con h: el mínimo se alcanza en x = 2 y vale 0. En cambio, en la función g, el vértice corresponde a un máximo de la función: la función no toma valores superiores a 1.

Situaciones como éstas se presentan en todas las funciones cuadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$:

Si $a > 0$, el vértice corresponde a un mínimo de la función.
Si $a < 0$, el vértice corresponde a un máximo de la función.

Ejemplo 8

En un planeta lejano se lanza hacia arriba una piedra desde una altura de 25 metros con una velocidad inicial de 96 m/seg. La altura a la que se encuentra la piedra (medida en metros) desde el suelo, en función del tiempo (en seg) es:

$$s(t) = -16t^2 + 96t + 25 \qquad t \geq 0$$

Calcular en que instante la piedra alcanza la máxima altura y cuál es dicha altura.

Solución

Como el coeficiente que acompaña a t^2 es negativo (-16) la función cuadrática s(t) alcanzará su máximo en el vértice. Para resolver el problema, pues, basta con hallar este vértice:

$$x = \frac{96}{2.(-16)} = 3 \qquad s(3) = (-16).9 + 96.3 + 25 = 169$$

Esto quiere decir que a los 3 segundos la piedra alcanza una altura máxima de 169 metros.

Imagen

El vértice de la parábola también nos puede ayudar a encontrar la imagen de la función cuadrática correspondiente con facilidad. En efecto, si el vértice fuera un mínimo de la función (cuando el coeficiente a es positivo), la imagen será el intervalo que va desde ese valor mínimo hasta más infinito. Si, por el contrario, el vértice fuera un máximo (cuando el coeficiente a es negativo) la imagen de la función vendrá dada por el intervalo que viene desde menos infinito y llega hasta dicho valor máximo.

Ejemplo 9

Hallar la imagen de las siguientes funciones
a) $f(x) = x^2 + 2x + 2$
b) $g(x) = -x^2 + 1$
c) $h(x) = x^2 - 4x + 4$

Solución

A todas ellas las hemos graficado en el ejemplo 7
a) $f(x) = x^2 + 2x + 2$. Como en el vértice (-1 , 1) f alcanza un mínimo
$\text{Im}f = [1 , +\infty)$

b) $g(x) = -x^2 + 1$. En el vértice (0 , 1) alcanza un máximo. En tonces la
$\text{Im}f = (-\infty , 1]$

c) $h(x) = x^2 - 4x + 4$. En el vértice (2 , 0) alcanza un mínimo. Entonces la
$\text{Im}f = [0 , +\infty)$

O O O Crecimiento y decrecimiento

Otra característica que hemos observado en los dos primeros ejemplos es que las funciones cuadráticas crecen de un lado del eje de simetria y decrecen del otro lado. Con más precisión:

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$

- Si el vértice es un mínimo de la función (a positivo) f decrece a la izquierda del eje de simetría y es creciente a la derecha de dicho eje.

- Si el vértice es un máximo de la función (a negativo) f crece a la izquierda del eje de simetría y es decreciente a la derecha de dicho eje.

Usamos esta idea en los siguientes ejemplos

Ejemplo 10

En referencia a la piedra del ejemplo 8 conteste a las siguientes preguntas
¿En qué intervalo de tiempo la piedra va hacia arriba?
¿En qué instante comienza a caer?

Solución

La función cuadrática involucrada en este problema es

$$s(t) = -16t^2 + 96t + 25 \qquad t \geq 0$$

En el ejemplo 8 hemos obtenido que en el instante $t = 3$ la piedra alcanza su máxima altura de 169 metros. Entonces podemos asegurar que

s(t) es creciente en el intervalo (3 , 0)
s(t) es decreciente a partir de t = 3

Ejemplo 11

Hallar intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

Solución

El coeficiente que acompaña a x^2 es 2 (positivo). Entonces f alcanza un mínimo en el vértice. Por lo dicho recién f será decreciente a la izquierda del eje de simetria y creciente a la derecha de dicho eje. Calculemos pues el eje de simetria;

$$x = \frac{-3}{2.2} = -\frac{3}{4}$$

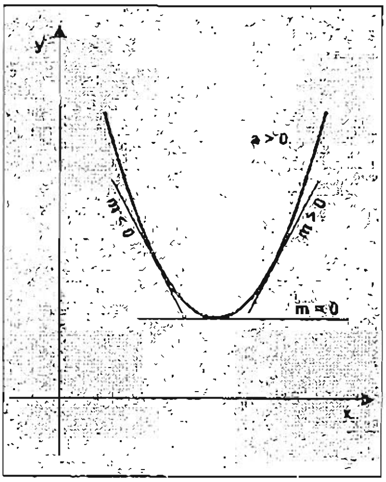
En consecuencia

f es decreciente en el intervalo $(-\infty , -\frac{3}{4})$

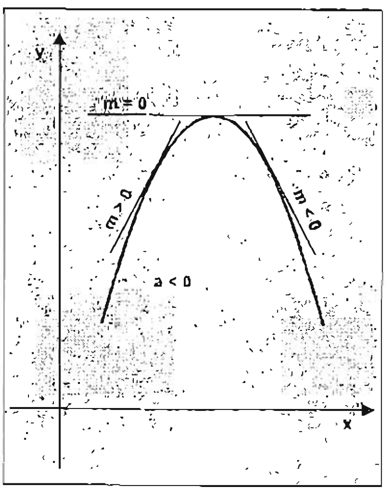
f es creciente en el intervalo $(-\frac{3}{4} , +\infty)$

Observación

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ una función cuadrática con $a > 0$.
Por lo visto hasta aquí sabemos que tendrá un mínimo en el vértice.
Dibujemos en el gráfico de f una recta tangente a la parábola con pendiente positiva, una recta tangente con pendiente negativa y otra con pendiente nula.
←



Si hacemos lo mismo para una función cuadrática con $a < 0$ obtendremos:
←



En ambos casos obtendremos que hay una correspondencia entre el signo de la pendiente de la recta tangente y el crecimiento, el decrecimiento y el máximo o el mínimo de la función.

De lo visto en los gráficos podemos inferir que:

- Los valores de x que corresponden a puntos de **máximo** y/o de **mínimo** de f tienen rectas tangentes con pendiente **nula**
- Los valores de x que pertenecen al intervalo de **crecimiento** de la función tienen rectas tangentes con pendiente **positiva**.
- Los valores de x que pertenecen al intervalo de decrecimiento de la función tienen rectas tangentes con pendiente negativa.

Ceros

Volvamos a considerar el problema 8 de la piedra cuya ecuación de movimiento recordamos

$$s(t) = -16t^2 + 96t + 25 \qquad t \geq 0$$

Si se nos pregunta ¿en qué instante la piedra llegará al suelo?, deberemos encontrar el instante $t > 0$ que resuelva la ecuación $s(t) = 0$

Esto implica resolver una ecuación de segundo grado. Recordemos el caso general de resolución de segundo grado:

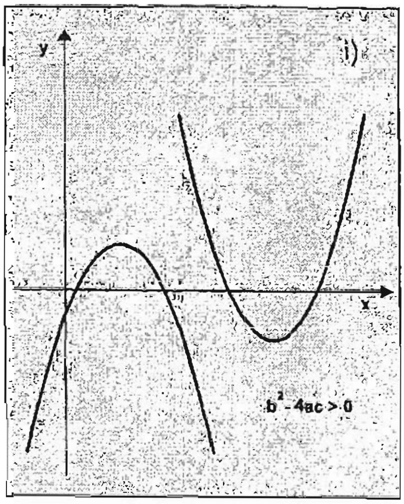
Si queremos hallar los x reales tales que $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ puede ocurrir que:

i) $b^2 - 4ac > 0$. En este caso las soluciones son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (*)$$

Visto en el gráfico esto significa que la parábola corta al eje x en dos puntos.

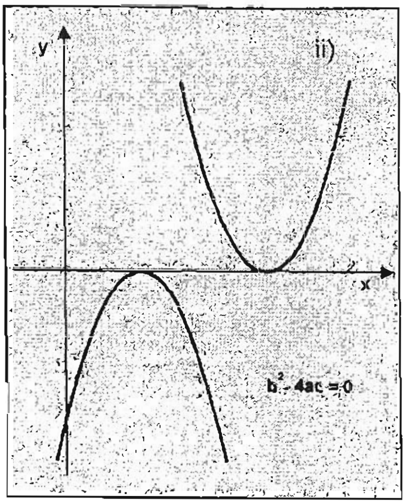
➔



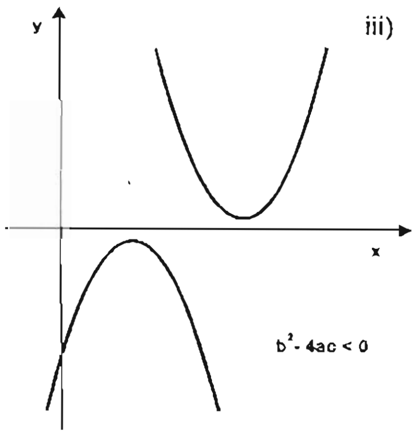
ii) $b^2 - 4ac = 0$. En este caso de (*) se ve que $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

Es decir que el gráfico de estas funciones es tangente al eje x.

➔



iii) $b^2 - 4ac < 0$. No hay solución real de la ecuación. De donde se concluye que el gráfico no corta al eje x.



Ejemplo 12

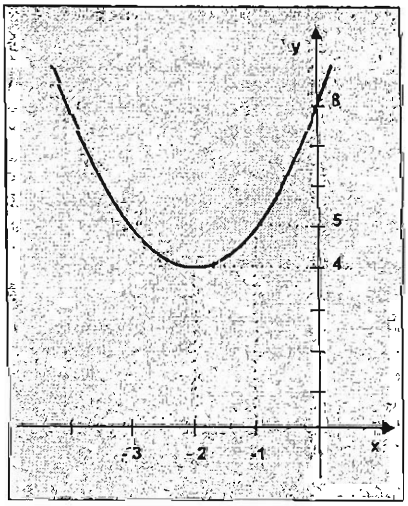
Dada $f(x) = x^2 + 4x + 8$ hallar los ceros, las coordenadas del vértice y graficar.

Solución

La función no tiene ceros pues $b^2 - 4ac = 16 - 32 = -16 < 0$.

La abscisa del vértice es $\frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$ por lo tanto las coordenadas del vértice son: $(-2, f(-2)) = (-2, 4)$. En este punto la función alcanza su mínimo $(a = 1 > 0)$. Es creciente en el intervalo $(-2, +\infty)$ y decreciente en el intervalo $(-\infty, -2)$.

Dado que el eje de simetría es la recta vertical que pasa por $x = -2$ tenemos que $f(-3) = f(-1) = 5$ y $f(-4) = f(0) = 8$. El gráfico es ➔

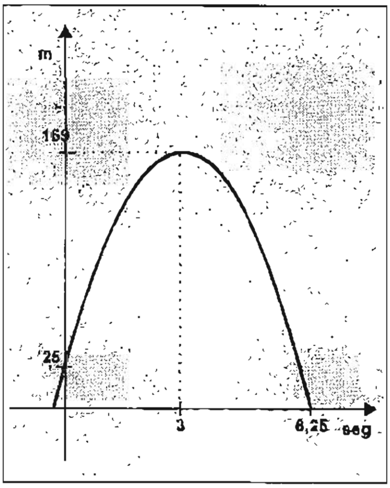


Ejemplo 13

Considere la piedra del ejemplo 8, ¿en qué instante la piedra llegará al suelo?

Solución

Como dijimos antes hay que resolver la ecuación



$$-16t^2 + 96t + 25 = 0$$

En este caso es $b^2 - 4ac = 96^2 + 4.16.25 = 10816 > 0$ y las soluciones son:

$$t = \frac{-96 \pm \sqrt{10816}}{-32} = \frac{-96 \pm 104}{-32}$$

$$t_1 = 6{,}25 \quad \text{y} \quad t_2 = -0{,}25$$

La solución $t_2 = -0{,}25$ seg no tiene sentido para el problema planteado, por lo tanto podemos afirmar que la piedra llegará al suelo 6,25 seg después de haber sido lanzada.

Si queremos graficar la parábola correspondiente, recordemos que el vértice es el punto (3 , s(3)) = (3 , 169), y el gráfico resulta aproximadamente:
←

Resumen

Con respecto a los gráficos de las funciones cuadráticas hasta ahora sabemos que si $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) entonces:

- es simétrico respecto de una recta vertical (eje de simetría).
- si el coeficiente $a > 0$ la parábola tiene sus ramas hacia arriba
- si el coeficiente $a < 0$ la parábola tiene sus ramas hacia abajo
- si $b^2 - 4ac > 0$ el gráfico corta al eje x en dos puntos.
- si $b^2 - 4ac = 0$ el gráfico es tangente al eje x.
- si $b^2 - 4ac < 0$ el gráfico no corta al eje x

Positividad y negatividad ○ ○ ○

Con lo visto hasta aquí es sencillo hallar los conjuntos de positividad y de negatividad de funciones cuadráticas. Consideremos los siguientes ejemplos

Ejemplo 14

En la manufactura y venta de x unidades de cierto artículo la función precio p y la función costo C (en dólares) están dadas por:

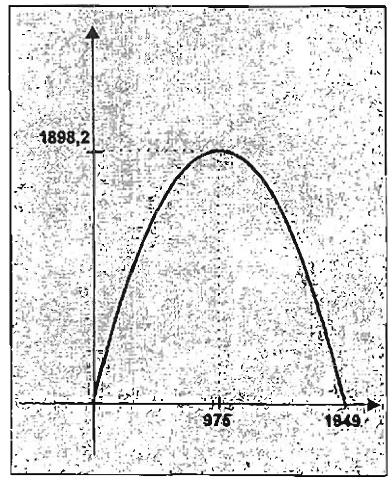
$$p(x) = 5 - 0{,}002x \qquad 0 \leq x \leq 2500$$

$$C(x) = 3 + 1{,}1x$$

Por lo tanto la función ingreso está dada por:

$$r(x) = x.p(x) = 5x - 0{,}002x^2$$

y la función que mide la utilidad es:



$$u(x) = r(x) - C(x) = -0{,}002x^2 + 3{,}9x - 3$$

Queremos encontrar los valores de x para los cuales la función utilidad es positiva (es decir, los valores de x para los cuales hay ganancia).

Solución

Los ceros de la función u(x) son $x_1 \approx 0{,}77$ y $x_2 \approx 1949$. Un gráfico esquemático de u(x) seria →

Vemos que u(x) es mayor que 0 para todo valor de $x \in (0{,}77\ ,\ 1949)$.
Es decir que habrá ganancia si se venden más de 1 y menos de 1949 artículos.

Ejemplo 15

Hallar $C_0(f)$, $C_+(f)$, $C_-(f)$ siendo

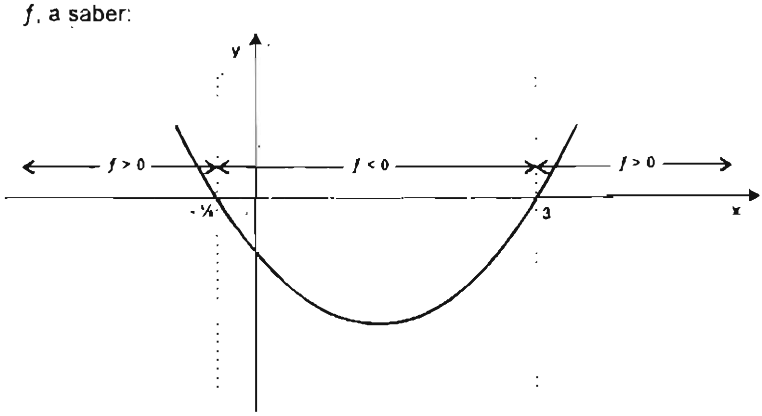
i) $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$
ii) $f(x) = 4 - (x + 3)^2$

Solución

i) Los ceros de f se encuentran mediante la fórmula (*)

$$C_0(f) = \{-\frac{1}{2}\ ,\ 3\}$$

Por lo tanto estamos en condiciones de hacer un gráfico esquemático de f, a saber:



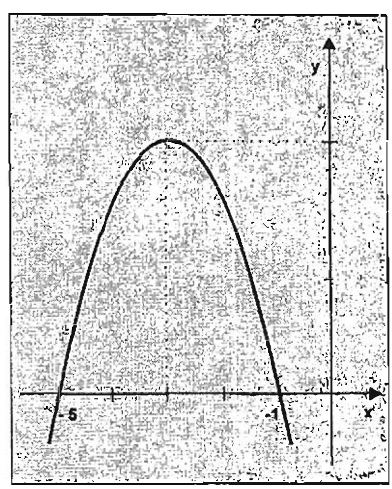
ya que a = 2 > 0. Por lo tanto:

$$C_+(f) = (-\infty\ ,\ -\frac{1}{2}) \cup (3\ ,\ +\infty) \quad C_-(f) = (-\frac{1}{2}\ ,\ 3)$$

ii) En este caso $C_0(f) = \{-1\ ,\ -5\}$

Por lo tanto estamos en condiciones de hacer un gráfico esquemático de f →

ya que a = -1 < 0. (*verifíquelo*)



Por lo tanto:

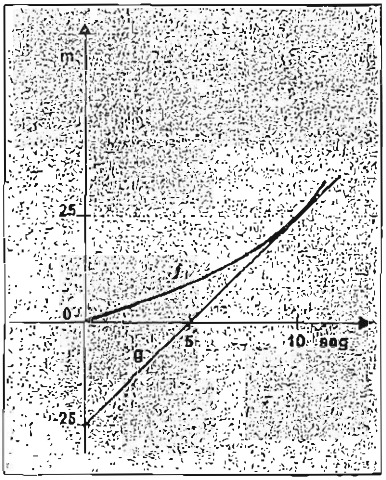
$C_+(f) = (-5\ ,\ -1)$ $\quad C_-(f) = (-\infty\ ,\ -5) \cup (-1\ ,\ +\infty)$

Problemas

Utilizaremos lo visto para resolver algunos problemas:

Ejemplo 16

Sea $f(t) = \frac{t^2}{4}$ el movimiento de un tren, medido en metros, desde el instante $t = 0$ segundos en que sale de la estación, y sea $g(t) = 5t - 25$ el movimiento de una persona que pierde el tren y corre para alcanzarlo. Queremos saber si dicha persona alcanza o no el tren.



Solución

Comencemos graficando las dos funciones en un mismo sistema
←

Vemos que los gráficos se cortan en t = 10 seg. En ese instante el pasajero alcanzó el tren.
Lo que resolvimos fue encontrar $t > 0$ tal que :

$$f(t) = g(t) \quad \text{o sea} \quad \frac{t^2}{4} = 5t - 25 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{t^2}{4} - 5t + 25 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado resulta que t = 10 seg es la única solución, tal como ya habíamos observado en el gráfico . Dado que $f(10) = g(10) = 25$ m.

A través del estudio del gráfico podemos responder a algunas preguntas como las siguientes:

a.- ¿A qué distancia del tren se encontraba el pasajero cuando comenzó a correr?

Rta: 25 metros

b.- ¿A que distancia del tren se encontraba el pasajero 5 seg después de comenzar a correr?

Rta: 5,25 metros

c.- ¿Cuántos metros debió correr el pasajero para alcanzar el tren?

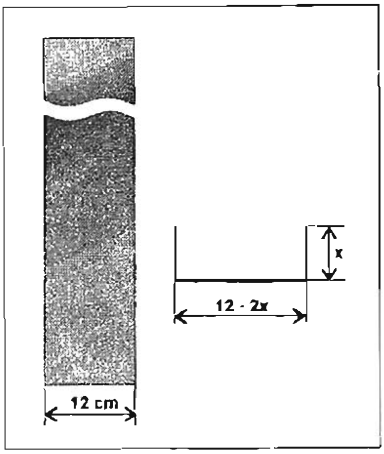
Rta: 50 metros

Ejemplo 17

A partir de una hoja rectangular de metal de 12 cm de ancho, se desea construir un canalón para desaguar la lluvia, y se doblan hacia arriba dos lados de manera que queden perpendiculares a la hoja. ¿Cuántos cm se deben doblar para que el canalón tenga capacidad máxima?

Solución

Si llamamos x a los cm a que deberemos doblar de cada lado, la base medirá 12 - 2x. La capacidad del canalón será máxima si el área del rectángulo de lados x y 12 -2x es máxima. ➔



Si llamamos $f(x)$ a dicha área, tendremos que:

$$f(x) = x.(12 - 2x) = -2x^2 + 12x \qquad \text{con } 0 \leq x \leq 12$$

Dado que los ceros de f son $x_1 = 0$ y $x_2 = 6$ resulta que la abscisa del vértice es $\alpha = 3$. Como $a = -2 < 0$ entonces la función tiene un máximo en $x = 3$, y dicho valor es $f(3) = 18$.
Así el canalón de mayor capacidad es el que se obtiene doblando 3 cm de cada lado y cuya base mide 6 cm.

Ejemplo 18

El dueño de una huerta de manzanas calcula que si se siembran 50 árboles por hectárea entonces cada árbol maduro dará unas 600 manzanas por año. Por cada árbol más que se siembre por hectárea el número de manzanas producidas por un árbol al año disminuirá en 6. ¿Cuántos árboles deben sembrarse por hectárea para obtener el mayor número de manzanas posible?

Solución

Llamaremos x a la cantidad de árboles que se agregan por hectárea. (aunque en este problema la variable es discreta, para la resolución puede pensarse como variable continua).
Si C(x) es la cantidad de manzanas que produce la huerta en un año entonces:

$$C(x) = (50 + x).(600 - 6x) = -6x^2 + 300x + 30000$$

$$(0 \leq x \leq 100)$$

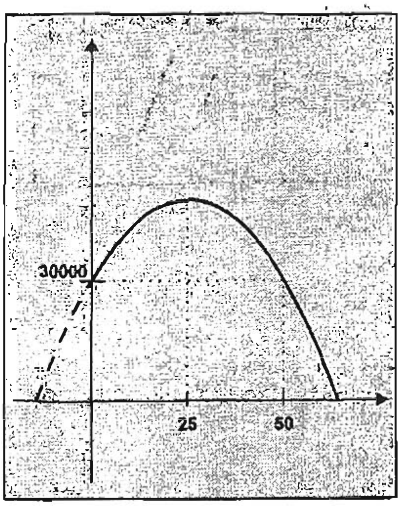
Dado que $a = -6 < 0$, la función C(x) tiene un máximo en :

$$x = \frac{-300}{-12} = 25$$

Es por lo tanto conveniente sembrar 50 + 25 = 75 manzanas por hectárea. En este caso la cantidad de manzanas que se producirán anualmente será:

$$C(25) = 75 \ . \ 450 = 33750$$

El problema ya ha sido resuelto. Utilicemos lo hecho para ver cómo es posible ria la simetría del gráfico sacar algunas conclusiones.
Si graficamos la función C(x) obtendremos: ➔



Vemos que C(0) = C(50) = 30000. Esto nos dice que cuando se siembran 50 árboles por hectárea se producen tantas manzanas como cuando se siembran 50 + 50 = 100 árboles por hectárea.

Ejemplo 19

Encontrar dos números reales cuya diferencia sea 40 y su producto sea mínimo.

Solución

Llamaremos x e y a los dos números buscados. Debe ocurrir que:

$$x - y = 40 \quad \Leftrightarrow \quad y = x - 40$$

Queremos encontrar x tal que:

$$p(x) = x(x - 40) \qquad \text{sea mínimo.}$$

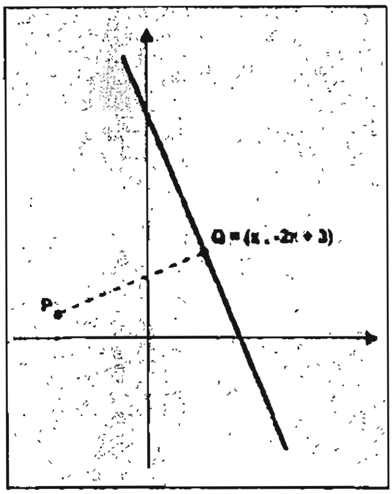
Pero como $p(x) = x^2 - 40x$ y $a = 1 > 0$ entonces p tiene un mínimo para

$$x = \frac{-(-40)}{2} = 20$$

Los dos números que hacen mínimo el producto son:

$$x = 20 \quad \text{e} \quad y = 20 - 40 = -20$$

Ejemplo 20



Encontrar el punto sobre la gráfica de $f(x) = -2x + 3$ más cercano al punto $P = (-3 , 1)$

Solución

El gráfico de la situación planteada sería
←

Si Q es un punto que pertenece a la recta entonces

$$Q = (x , -2x+3)$$

Se trata de hallar Q de modo que d(P,Q) sea mínima. En el gráfico vemos que dicho punto existe.
Es equivalente hallar el punto tal que $d^2(P,Q)$ sea mínima, calculemos entonces $d^2(P,Q)$ en función de la abscisa del punto Q

$$d(x) = (x - (-3))^2 + (-2x + 3 - 1)^2 = (x + 3)^2 + (-2x + 2)^2 = 5x^2 - 2x + 13$$

Como en la función cuadrática resultante el coeficiente $a = 5 > 0$, entonces alcanza el mínimo en:

$$x = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

El punto Q será entonces :

$$Q = (\frac{1}{5} , \frac{-2}{5} + 3) = (\frac{1}{5} , \frac{13}{5})$$

Ejemplo 21

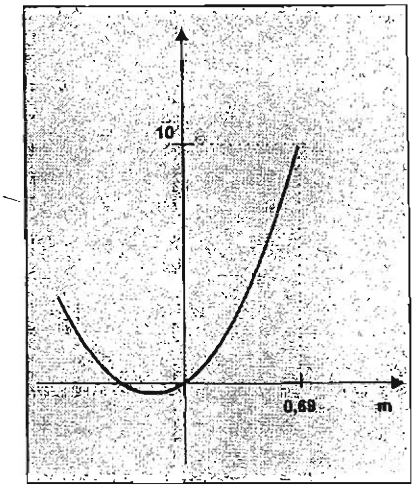
Una maestra jardinera desea forrar con tela un cubo de goma espuma. La tela le cuesta \$2 por m^2 de superficie forrada (considerando el desperdicio) y la cinta para los bordes \$0.5 el metro.
Hallar el costo de los materiales necesarios para forrar un cubo (en función del lado)
Si la maestra dispone de \$10, ¿Cuál es el tamaño del mayor cubo que puede forrar?

Solución

Costo = (Area lateral) . 2 + (longitud de los bordes) . 0,5
En función del lado x (en metros) del cubo el costo es:

$$C(x) = 6x^2 . 2 + 12x . 0,5 = 12x^2 + 6x \qquad (x \geq 0)$$

Grafiquemos la parábola correspondiente a esta función: ➔



Su eje de simetría es una recta vertical que pasa por $x = \frac{1}{4}$, por lo tanto

C(x) es decreciente hasta $x = -\frac{1}{4}$ y creciente desde $x = -\frac{1}{4}$ en adelante.

Es evidente que a medida que el tamaño del cubo aumenta resulta más caro forrarlo. Por lo tanto, el máximo cubo corresponde a:

$$12x^2 + 6x = 10$$

o sea

$$12x^2 + 6x - 10 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son:

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{516}}{24}$$

Es decir $x_1 \cong -1,19 x_2 \cong 0,6965$
Como $x_1 < 0$, la longitud del lado del mayor cubo que podrá forrar es igual a 69,65 cm.

Ejemplo 22

Hallar la superficie de vidrio (en función del lado del cuadrado) que es necesaria para una ventana que tiene forma de un cuadrado coronado por un semicirculo.
¿Cuál es el precio del vidrio necesario, en función del lado del cuadrado, si el precio del metro cuadrado de vidrio es de 4 pesos?
¿Cuáles son las dimensiones de la ventana si se gastaron 22,28 pesos en el vidrio?

Solución

Si el lado del cuadrado mide x (metros), entonces la superficie de la ventana en función del lado será:

$$S(x) = x^2 + \frac{\pi}{2} (\frac{x}{2})^2 = x^2.(1 + \frac{\pi}{8}) \qquad x \geq 0$$

Observar que, de acuerdo con la definición, S es una función cuadrática con

$a = 1 + \frac{\pi}{8}$, $b = c = 0$.

El precio del vidrio en función del lado será:

$$P(x) = S(x).4 = x^2\,(\frac{8+\pi}{8}).\,4$$

Si pagamos 22,88 resulta que:

$$P(x) = x^2\,(8 + \pi).\,0,5 = 22,28$$

es decir:

$$x^2 = \frac{22,28}{0,5(8 + \pi)} \cong 4 \qquad \text{(considerando } \pi \cong 3,14)$$

Luego la ventana mide 2 m de lado y el semicírculo superior tiene 1 m de radio.

Capítulo IV

Funciones Polinómicas

○ ○ ○ Continuidad

Hemos visto ya en varios ejemplos del capítulo anterior que uno de los problemas a resolver en las aplicaciones consiste en encontrar los ceros de una determinada función que representa, de alguna manera, el fenómeno que se está estudiando. En el caso de las funciones lineales y las funciones cuadráticas este problema era de solución sencilla.

En general, el problema de encontrar los ceros de una función no es de fácil solución. En ecuaciones como

$$2x^5 - 3x^2 - 2 = 0$$

no se cuenta con una fórmula que nos permita "despejar" x. Es por ello que los matemáticos dividieron el problema en dos cuestiones:

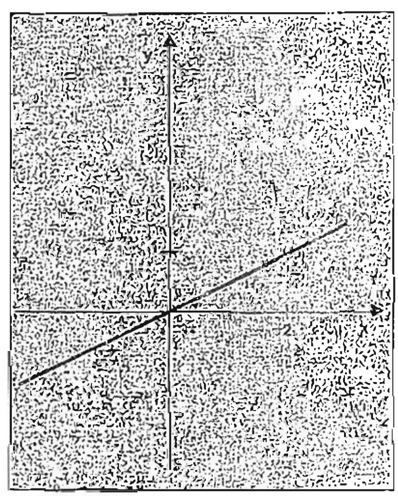
• ¿Existe alguna solución?

• Si la respuesta es afirmativa, ¿cómo hallarla?

En los capítulos venideros este problema se presentará en forma reiterada. Intentaremos pues, en este capítulo, esbozar una respuesta a estas dos cuestiones. Para ello será necesario introducir, en forma intuitiva, la noción de continuidad de una función.

Daremos una idea general del concepto de continuidad, cuyo tratamiento formal no abordaremos en este curso.

Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{2}x$, y analicemos los valores de f "alrededor" del punto de abscisa x = 2. ➔



I - f(2) = 1

II - Si observamos la tabla

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
f (x)	0.95	0.995	0.9995	1.0005	1.005	1.05

Vemos que cuanto más se acerca el valor de x a 2, más se acerca el valor de f(x) a 1.

Esta idea de que los valores de f(x) "se acercan" a f(2) cuando x toma valores "alrededor" de 2 es lo que entendemos por continuidad de f en el punto 2.

Analizando los valores de $f(x) = \frac{1}{2}$ x "alrededor" de otros puntos -el lector puede hacerlo para x = -1 , x = 0 , x = 5 , confeccionando tablas similares a la del ejemplo- encontramos que la situación es análoga al caso visto arriba. Si además observamos el gráfico de f , vemos que no hay puntos donde el comportamiento de f pueda ser diferente. Por esto

diremos que la función $f(x) = \frac{1}{2}$ 7x es continua. En general, diremos que

Una función es **continua** , cuando es continua en cada punto de su dominio.

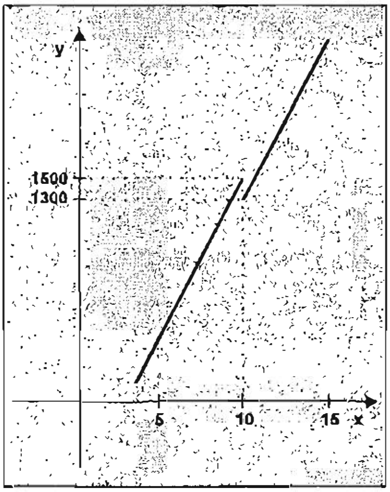
Funciones no continuas

Ejemplo 1

Supongamos que la función f mide los beneficios diarios de una compañia en función de su producción en toneladas. Se sabe que la ganancia es de \$ 200 por tonelada, y que para producir entre 3 y 10 toneladas alcanza con hacer funcionar los talleres durante el día, a un costo de \$ 500, pero si se quiere tener una producción entre 10 y 17 toneladas, se debe agregar un turno de trabajo nocturno aumentándose el costo fijo a \$ 700.

La expresión de la ganancia en función de las toneladas producidas está dada por:

$$g(x) = \begin{cases} 200x - 500 & 3 \leq x \leq 10 \\ 200x - 700 & 10 < x \leq 17 \end{cases}$$



Veamos que pasa "alrededor" de 10

x	9,9	9,99	9,999	10	10,001	10,01	10.1
$f(x)$	1480	1498	1499.8	1500	1300.2	1302	1320

←

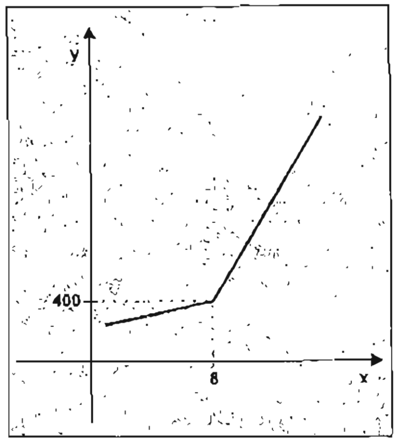
Notamos que el comportamiento de los valores de t varía según nos acercamos a 10 por la izquierda (valores de x inferiores a 10) o por la derecha (valores de x superiores a 10).

La función **no es continua en x = 10**; en este caso tiene un "salto" en x = 10.

Funciones continuas

Ejemplo 2

Supongamos que la función g mide las ganancias diarias de otra compañía, en función de las toneladas producidas. Se sabe que la ganancia es de $50 por cada tonelada producida entre las 2 y las 8 toneladas diarias, pero que la ganancia es de $200 por cada tonelada producida que supere las 8 toneladas.



Por lo tanto la expresión de la ganancia en función de las toneladas producidas esta dada por:

$$g(x) = \begin{cases} 50x & 2 \le x \le 8 \\ 400 + 200(x - 8) & 8 < x \end{cases}$$

➔

Observando el gráfico vemos que el punto donde puede haber "problemas" es x = 8 . Veamos que sucede alrededor de ese punto.

I) g(8) = 400
II) Si observamos la tabla

x	7,9	7,99	7,999	8	8,001	8,01	8,1
g(x)	395	399,5	399,95	400	400,2	402	420

tenemos que los valores de g(x) se acercan al valor de g(8) tanto por la derecha como por la izquierda, y por lo tanto g es continua en x = 8. Para los restantes puntos del dominio, el análisis es similar al del primer ejemplo. Concluimos que esta función es continua.

Observación

Observando los ejemplos anteriores, podemos decir en términos muy generales, que una función es continua cuando su gráfico no presenta rupturas. También en base a los ejemplos considerados es razonable enunciar el siguiente resultado:

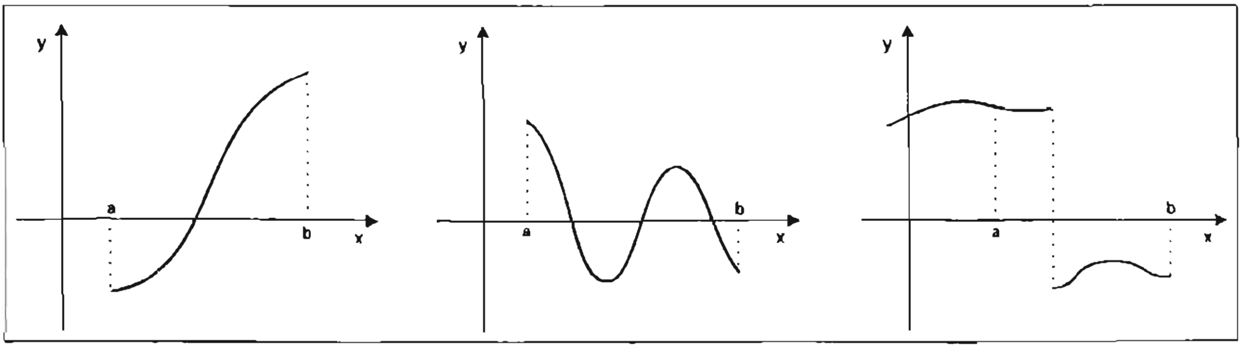
Las funciones lineales y las funciones cuadráticas son continuas.

Teorema de Bolzano

Para las funciones continuas vale un resultado que responde a la primera de las cuestiones planteadas a comienzo.

Teorema de Bolzano

Si f es una función continua en el intervalo [a,b] y $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ (o $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$), entonces existe un valor $\alpha \in (a,b)$ tal que $f(\alpha) = 0$.



Dicho de otra manera: si una función continua cambia de signo en un intervalo, entonces necesariamente se anula en algún punto de dicho intervalo.

De este teorema se deduce que si f es una función continua y $f(x)$ no tiene ningún cero en un cierto intervalo de R, entonces $f(x) > 0$ en todo el intervalo, o $f(x) < 0$ en todo el intervalo.

En efecto, si existieran dos puntos c y d en dicho intervalo, tales que $f(c) < 0$ y $f(d) > 0$ (o $f(c) > 0$ y $f(d) < 0$), por ser f continua, existiría $\alpha \in (c, d)$ tal que $f(\alpha) = 0$ y entonces a sería un cero de f en el intervalo considerado, lo cual contradice nuestra hipótesis.

Consecuencias del torema de Bolzano

O O O

I) Si f es una función continua y $f(x)$ no tiene ningún cero en el intervalo (a, b), entonces bastará conocer el valor de f en un punto cualquiera del intervalo para saber si el intervalo dado es de positividad o de negatividad de f.

II) Si f es una función continua, y α_1 y α_2 son dos ceros consecutivos de f, entonces (α_1, α_2) es un intervalo de positividad de f, o (α_1, α_2) es un intervalo de negatividad de f.

Ejemplo 3

Sea f: R $\rightarrow$ R una función **continua** cuyos únicos ceros son -2, $\frac{1}{2}$ y 3, y de la cual se conoce la siguiente tabla de valores:

x	-10	$-\frac{5}{2}$	-1	$\frac{2}{3}$	1	5	7
$f(x)$	-5	-3	1	$-\frac{1}{2}$	-2	-3	-8

Determinar los intervalos de positividad y los de negatividad de f.

Solución

Con la información dada sabemos que la función no se anula en los intervalos siguientes:

$$(-\infty, -2) \ ; \ (-2, \frac{1}{2}) \ ; \ (\frac{1}{2}, 3) \ ; \ (3, +\infty)$$

ya que si lo hiciera tendría algún cero más que los mencionados en el enunciado. Apliquemos la consecuencia 1 del teorema de Bolzano a cada uno de estos intervalos:

$(-\infty, -2)$: Se tiene que $-10 \in (-\infty, -2)$. Como $f(-10) = -5 < 0$ concluimos que:

$(-\infty, -2)$ es un intervalo de negatividad de f

Repitiendo el mismo razonamiento en los restantes intervalos tenemos:

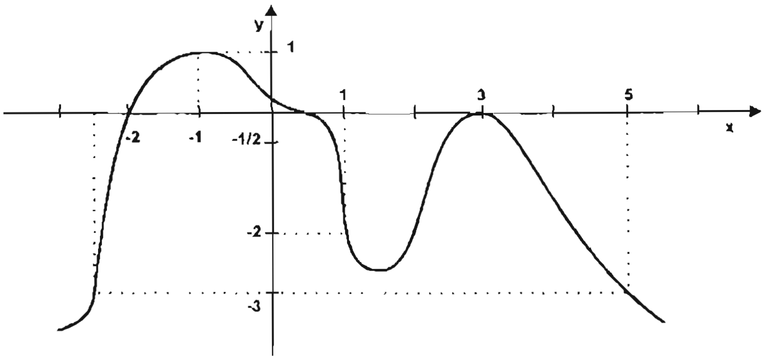
$-1 \in (-2, \frac{1}{2})$ y $f(-1) = 1 > 0 \Rightarrow (-2, \frac{1}{2})$ es intervalo de positividad

$1 \in (\frac{1}{2}, 3)$ y $f(1) = -2 < 0 \Rightarrow (\frac{1}{2}, 3)$ es intervalo de negatividad

$5 \in (3\ ,\ +\infty)$ y $f(5) = -3 < 0 \Rightarrow (3\ ,\ +\infty)$ es intervalo de negatividad

Nótese que no necesariamente cambia la situación en cada cero de la función: por ejemplo, los intervalos $(\frac{1}{2}\ ,\ 3)$ y $(3\ .\ +\infty)$ son ambos de negatividad de f.

Podemos ahora esbozar un gráfico esquemático de f:



FUNCIONES POLINOMICAS

Ejemplo 4

Se quiere construir un tanque cúbico con capacidad para 15000 litros de agua. ¿Cuánto debe medir cada lado del tanque? (Dar la respuesta con error menor que 1 centimetro).

Solución (1era parte)

Si la longitud del lado del tanque es x (en metros), la capacidad (o volumen) del mismo estará dado por la función $V(x) = x^3$ (en metros cúbicos).

Antes de intentar la resolución de este problema, introduciremos algunos conceptos generales.

La función $f(x) = x^3$, pertenece a una clase de funciones que no hemos presentado aún, las funciones polinómicas.
Una función polinómica es una función f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cuya expresión es

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde n es un número natural y los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números reales.
Si $a_n \neq 0$, diremos que el grado de f es n.

Ejemplos

$f(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x + 1$	(grado 4)
$g(x) = x^3 - 15$	(grado 3)
$h(x) = 3x + 4$	(grado 1)
$t(x) = 5$	(grado 0)

Observación

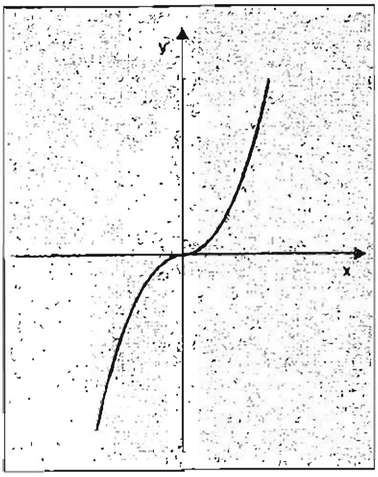
Las funciones lineales ($f(x) = ax + b$ con $a \neq 0$) son funciones polinómicas de grado 1, y las funciones cuadráticas son funciones polinómicas de grado 2.

Las funciones polinómicas son continuas

Esta propiedad y el hecho de ser fácilmente evaluables para cualquier valor de x, además de otras razones que veremos más adelante, hacen que las funciones polinómicas sean de uso frecuente en diversas aplicaciones.

Gráficos

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$	8



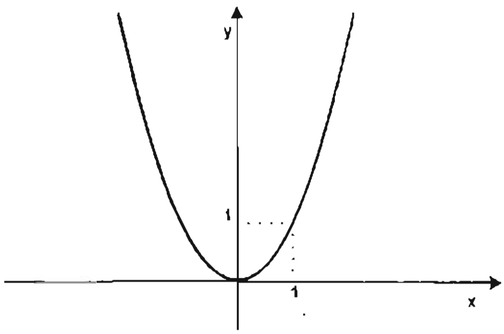
Ejemplo 5

Grafiquemos algunas funciones polinómicas

I) $f(x) = x^3$
Antes de construir una tabla de valores de f, notemos que $f(-x) = (-x)^3 = -(x^3) = -f(x)$ es válido para cualquier $x \in \mathbf{R}$; será suficiente entonces tomar valores de x mayores que 0, y luego reflejar el gráfico respecto del eje "y" y respecto del eje "x"

←

II) $f(x) = x^4$
Notemos que $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$ para cualquier valor de x; será suficiente entonces tomar valores de x mayores que 0, y luego reflejar el gráfico en el eje "y".



x	$f(x)$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{81}{16}$
2	16

Aproximación de raíces

Ejemplo 4 (2da parte)

Volvamos ahora al ejemplo con que iniciamos este apartado. Queremos que la capacidad del tanque sea de 15000 litros; como 15000 litros equivalen a 15 m^3, debemos encontrar x tal que:

$$V(x) = x^3 = 15$$

Podríamos decir que la solución es $x = \sqrt[3]{15}$, lo cual es correcto matemáticamente, pero no resuelve nuestro problema práctico, pues necesitamos conocer la expresión decimal de ese número. Es más, si queremos tener la respuesta con error menor que 1cm, deberemos averiguar dos cifras decimales de x.

Notemos que $x^3 = 15$ si y sólo si $x^3 - 15 = 0$. Por lo tanto, nuestro problema consiste en hallar un cero de la función polinómica: $f(x) = x^3 - 15$

Sabemos que f es una función continua, y vamos a aplicar el teorema de Bolzano.
Analicemos la tabla de valores de f.

←

x	$f(x)$	
0	-15	<0
1	-14	<0
2	-7	<0
3	12	>0

$f(2) < 0$ y $f(3) > 0$, entonces f tiene algún cero en $(2,3)$; si llamamos r a este cero, ya conocemos la cifra entera de r: es 2. Dividimos el intervalo (2 , 3) en 10 subintervalos iguales y buscamos en cuál se produce un cambio de signo para f.

x	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
f(x)	-5.74	-4.35	-2.83	-1.17	0.625
	<0	<0	<0	<0	>0

$f(2.4) < 0$ y $f(2.5) > 0$, entonces $r \in (2.4 , 2.5)$. Su primera cifra decimal es 4. Para averiguar la segunda cifra decimal, dividimos el intervalo (2.4 , 2.5) en 10 y buscamos un cambio de signo

x	2.41	2.42	2.43	2.44	2.45	2.46	2.47
f(x)	-1.0	-0.82	-0.65	-0.47	-0.29	-0.11	0.06
	<0	<0	<0	<0	<0	<0	>0

$f(2.46) < 0$ y $f(2.47) > 0$, entonces $r \in (2.46 , 2.47)$, y ya conocemos su segunda cifra decimal.

La respuesta a nuestro problema es:
"El lado del tanque debe medir 2.46 metros y el error que cometemos es menor que 1cm".

Si tuviéramos que garantizar que la capacidad sea de 15000 litros, deberíamos tomar como valor aproximado para r, el valor:

$$r = 2.47 \text{ metros.}$$

Como decíamos al comienzo, el problema de hallar ceros de una función se presenta con frecuencia. En particular, cuando la función es polinómica el problema adquiere gran relevancia y ha sido motivo de estudio por siglos en la historia de la ciencia.

Para las funciones lineales y para las funciones cuadráticas, contamos con fórmulas que resuelven este problema en forma general. No sucede así cuando se trata de funciones polinómicas de grado superior. Se apela en estos casos a la continuidad de estas funciones, y utilizando el teorema de Bolzano, se buscan soluciones aproximadas. Vemos así, que las dos cuestiones planteadas al comienzo de este Capítulo pueden ser resueltas de alguna forma, en el caso de las funciones continuas por lo menos, usando el Teorema de Bolzano. En este hecho radica la importancia de este teorema, que a primera vista puede parecer una verdad de "perogrullo".

Ejemplo 6

Hallar un cero de $f(x) = 2x^5 - 3x^2 - 2$

Solución

Llamemos r al cero buscado. Analicemos la tabla de valores →

x	f(x)	
0	-2	<0
1	-3	<0
2	50	>0

x	$f(x)$	
1.1	-2.7	<0
1.2	-1.34	<0
1.3	0.35	>0

$f(1) < 0$ y $f(2) > 0$, entonces f tiene un cero en (1 , 2).
←

$f(1.2) < 0$ y $f(1.3) > 0$, entonces f tiene un cero en (1.2 , 1.3).

$$r \cong 1.2$$

Procediendo de esta manera podemos seguir hallando más cifras decimales de r.

Polinomios

Anteriormente mencionamos las funciones polinómicas, así llamadas porque su fórmula está dada por un **polinomio**.

El estudio de algunas propiedades de los polinomios, nos dará más herramientas para la búsqueda de ceros de funciones polinómicas. Recordaremos brevemente las operaciones con polinomios y sus principales propiedades.

Los polinomios son expresiones de la forma:

$$P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde n es un número natural y los coeficientes

$$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \text{ son números reales.}$$

Si $a_n \neq 0$, el grado del polinomio es n. Escribimos $gr(P) = n$

Operaciones

Son conocidas las operaciones de suma y producto de polinomios.

Ejemplos

$A = 5x^4 - 2x^2 + 7$ y $B = 3x^2 + x - 1$

$A + B = 5x^4 + (-2+3)x^2 + x + (7-1) = 5x^4 + x^2 + x + 6$

$A \,.\, B = (5x^4 - 2x^2 + 7).(3x^2 + x - 1) =$

$= 15x^6 + 5x^5 - 5x^4 - 6x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 21x^2 + 7x - 7 =$

$= 15x^6 + 5x^5 - 11x^4 - 2x^3 + 23x^2 + 7x - 7$

Propiedades

- El grado de la suma no supera al grado de cada uno de los sumandos.
- El grado del producto es igual la suma de los grados de los factores.

Algoritmo de división para polinomios

Para dividir un polinomio f por otro polinomio g se apela al algoritmo de división:

Dados f y g polinomios, con $gr(g) > 0$, existen polinomios q y r tales que

$$f(x) = g(x).q(x) + r(x) \quad \text{con } r = O \text{ o } gr(r) < gr(g).$$

Estas condiciones determinan en forma única a los polinomios q y r.

Diremos que el polinomio g divide al polinomio f, o que g es un factor de f, o que f es divisible por g, si existe un polinomio q tal que f(x) = g(x).q(x)

Teorema del resto

Si a es un número real, el resto de dividir un polinomio f(x) por el polinomio (x--a) coincide con f(a).

En efecto, por el algoritmo tenemos

$$f = (x-a).q + r \text{ con } r = 0 \text{ o } gr(r) < 1 \quad (\text{porque } gr(x-a) = 1)$$

Por lo tanto r es un número real, y tomando el valor de la función polinómica f en x = a , tenemos:

$$f(a) = (a - a).q(a) + r, \text{ de donde } r = f(a).$$

Consecuencias del teorema del resto

Algunas consecuencias importantes del teorema del resto son las siguientes:

I) Un polinomio f es divisible por (x - a) si y sólo si f(a) = 0, o sea si y sólo si a es un cero (o raiz) de f.

II) Si f es un polinomio y $x_1, x_2, \ldots, x_k$ son raices distintas de f, entonces:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_k).h(x) \text{ con } h(x) \text{ un polinomio.}$$

III) Un polinomio de grado n tiene a lo sumo n ceros o raices.

Ejemplo 7

Dada $f(x) = 3x^4 + x^3 - 8x^2 + 4x$, encontrar todos los puntos donde el gráfico de f corta al eje x, sabiendo que $f(-2) = 0$.

Solución

El dato $f(-2) = 0$ nos dice que f es divisible por (x + 2), ya que "un polinomio es divisible por (x - a) $\Leftrightarrow$ $f(a) = 0$".
Por lo tanto,

$$f(x) = Q(x)(x + 2) \qquad (*)$$

Sabemos que Q(x) tiene grado 3 pues $gr(f) = 4$ y $gr(x+2) = 1$. Calculamos Q(x) efectuando el cociente de $f(x)$ por x + 2. Podemos aplicar Ruffini, pues estamos dividiendo por un polinomio de la forma x - a:

-2 es raiz de $f(x)$
↓

	3	1	-8	4	0	← coeficientes de $f(x)$
-2		-6	10	-4	0	
	3	-5	2	0	0	← resto

↑
coef. de Q(x)

$$Q(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x$$

Si sacamos x factor común, $Q(x) = x(3x^2 - 5x + 2)$. Como las raíces de $3x^2 - 5x + 2$ son 1 y $\frac{2}{3}$,

$$3x^2 - 5x + 2 = 3(x - 1)(x - \frac{2}{3})$$

Por lo tanto $Q(x) = 3x(x - 1)(x - \frac{2}{3})$

Las raíces de Q(x) son 0, 1 y $\frac{2}{3}$.

Reemplazando en (*) obtenemos:

$$f(x) = 3x(x - 1)(x - \frac{2}{3})(x + 2)$$

Las raíces de $f(x)$ son entonces 0, 1, $\frac{2}{3}$ y -2, o dicho de otra manera, el gráfico de f corta al eje x en los puntos (0 , 0), (1 , 0), ($\frac{2}{3}$, 0) y (-2 , 0).

Ejemplo 8

i) Hallar una función polinómica f, de grado 3, que corte al eje x en los puntos (2 , 0), (-1 , 0) y ($\frac{1}{2}$, 0).

ii) Calcular $f(4)$

iii) Hallar una función polinómica g, de grado 3, que corte al eje x en los mismos puntos que f y que además verifique g(4) = 5.

Solución

i) Sabemos que si 2 es raíz del polinomio, este debe ser divisible por x - 2; es decir que x - 2 debe ser un factor de f. Con las demás raíces sucede lo mismo.
Así resulta que un polinomio que seguramente verifica esas condiciones es el que resulta de multiplicar los factores:

$$(x - 2),\ (x - (-1)) \ \text{ y } \ (x - \frac{1}{2})$$

Entonces puede ser

$$f(x) = (x - 2).(x + 1).(x - \frac{1}{2}) \quad \text{y además es } gr(f) = 3$$

ii) Para calcular $f(4)$ reemplazamos x por este valor y obtenemos

$$f(4) = (4 - 2).(4 + 1).(4 - \frac{1}{2}) = 35$$

iii) Observemos que cualquier función polinómica cuya expresión sea

$$g(x) = kf(x) = k(x - 2).(x + 1).(x - \frac{1}{2})$$

con k un número real, verifica $g(2) = g(-1) = g(\frac{1}{2}) = 0$ y además gr(g) = 3.

Por lo tanto sólo nos resta encontrar el valor de k para el cual es g(4) = 5.

Pero $g(4) = kf(4) = k.35$, y esto es igual a 5 si y sólo si $k = \frac{1}{7}$.
La función g(x) buscada es:

$$g(x) = \frac{1}{7}(x - 2).(x + 1).(x - \frac{1}{2})$$

Capítulo V

Introducción al estudio de Funciones

COMPOSICION DE FUNCIONES

o o o **Definición**

Dadas dos funciones f y g, la composición $g \circ f$ es la función que le asigna a cada x el resultado de aplicar g a $f(x)$.

Para que esta secuencia pueda realizarse, se necesita que f esté definida en x y que g esté definida en $f(x)$. Estas dos restricciones determinan naturalmente el dominio de $g \circ f$.

Ejemplo 1

Sea A el conjunto de personas, vivas o muertas, y sean: f la función que a cada persona le asigna su padre y g la función que a cada persona le asigna su madre. Determinar las funciones $g \circ f$ y $f \circ g$.

Solución

$g \circ f$ es la función que a cada persona le asigna la madre del padre, esto es, $g \circ f$ le asigna a cada persona su abuela paterna.

$x \rightarrow f(x) \rightarrow g(f(x))$ $\qquad$ $f(x)$ = padre de x

$g(f(x))$ = madre de $f(x)$ = abuela paterna de x

$f \circ g$ es la función que a cada persona le asigna el padre de la madre, esto es, $f \circ g$ le asigna a cada persona su abuelo materno.

$x \rightarrow g(x) \rightarrow f(g(x))$ $\qquad$ $g(x)$ = madre de x

$f(g(x))$ = padre de $g(x)$ = abuelo materno de x

De manera similar se procede con las funciones numéricas, que son las que nos interesan.

Ejemplo 2

Obtener $g \circ f(x)$ y $f \circ g(x)$ siendo $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x + 1$

Solución

Dado que, tanto el dominio de f como el dominio de g son todos los reales, ambas composiciones tendrán como dominio a todos los reales. Ahora bien:

$$g \circ f(x) = g\,(f(x)) = g\,(x^2 + 1) = (x^2 + 1) + 1 = x^2 + 2$$

y

$$f \circ g\,(x) = f(g\,(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 2$$

Estos ejemplos nos indican que no hay que confundir $f \circ g$ con $g \circ f$.

Veamos ahora como proceder cuando hay restricciones en los dominios de f y/o g.

Ejemplo 3

Obtener $g \circ f(x)$ siendo $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g\,(x) = \frac{1}{x - 1}$

Solución

Es $(g \circ f)(x) = g\,(f(x)) = (A)$

Para poder realizar el cálculo indicado en (A), necesitamos:

i) que f pueda calcularse en x, es decir, x distinto de cero.

ii) que g pueda calcularse en $f(x)$, es decir, $f(x)$ distinto de 1. Ahora bien:

$f(x) = 1$ si y sólo si $\frac{1}{x} = 1$ si y sólo si $x = 1$.

Juntando lo obtenido en i) e ii): si x no vale ni 0 ni 1 resulta:

$$(A) = \frac{1}{f(x) - 1} = \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{1}{1 - x} = \frac{x}{1 - x}$$

Cambio de escala

Sabemos que casi todas las actividades humanas encuentran en las funciones una herramienta para modelar y describir la evolución y el comportamiento de distintos aspectos de fenómenos que les son propios.

Es oportuno insistir en que sólo cuando se fijan unidades de medida y puntos de referencia para cada una de las magnitudes involucradas en el proceso que se modela, aparecen las funciones numéricas. Más aún, los cambios en las escalas hacen que un mismo proceso quede descrito por diferentes funciones.

Si, por ejemplo, estudiamos a qué distancia de la tierra se encuentra el sol a lo largo de un cierto período, diremos que la distancia es función del tiempo. Si la distancia se mide en kilómetros; el tiempo, en minutos y fijamos como tiempo cero el mediodía de cierto día, obtendremos una función. Si, en cambio, medimos la distancia en años luz; el tiempo, en horas y convenimos en que el tiempo cero corresponde a las 14 hs. del día antes señalado, la función que expresa la relación entre las mismas mediciones será distinta. Lo mismo ocurre si estudiamos la evolución del costo de vida a lo largo de cierto período: si medimos el tiempo en meses no obtendremos la misma función que si lo medimos en, por ejemplo, trimestres.

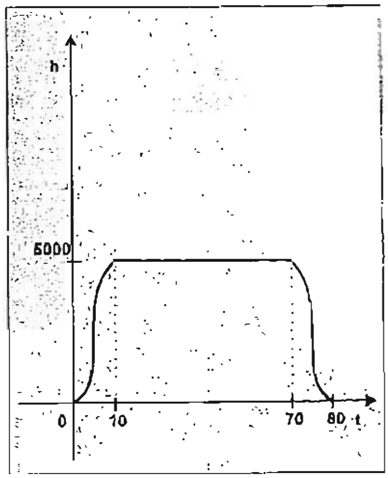
En este capítulo estudiaremos cómo obtener el gráfico de una función determinada a partir del de otra, cuando entre ambas funciones existe un vínculo lineal (tal cual ocurre toda vez que se introduce un cambio de escala o de origen en las unidades medidas).

Este vínculo lineal se puede interpretar como la composición de la función dada con una función lineal.

Es oportuno señalar que, en el Capítulo anterior, estuvimos haciendo esto (sin hablar de composición de funciones) para obtener gráficos de funciones cuadráticas a partir del gráfico de $y = x^2$ o de $y = -x^2$.

Aquí, ilustraremos el problema planteado estudiando la siguiente situación:

Un avión despega en el instante $t = 0$. Desde el instante inicial, el altímetro del avión muestra en cada instante t, la altura h(t), medida en metros, a la que se encuentra el avión por sobre el nivel del mar. El avión realiza un vuelo de prueba en el que recorre cierta trayectoria prefijada en 80 minutos, al cabo de los cuales regresa al punto de partida. Terminado éste, la computadora del avión muestra el siguiente gráfico de la función altura: ➔



Supongamos ahora que, bajo las mismas condiciones de vuelo, nos encontramos con situaciones diferentes, a saber:

1.- El avión sale 30 minutos más tarde.
2.- El avión vuela al doble de velocidad.
3.- El avión despega desde una plataforma que se encuentra a 100 m por sobre el nivel del mar.
4.- La altura se mide en pies.

Nos preguntamos: ¿Cómo será, en cada caso, el gráfico de la función altura?¿Se puede obtener el mismo a partir del gráfico de la función original?

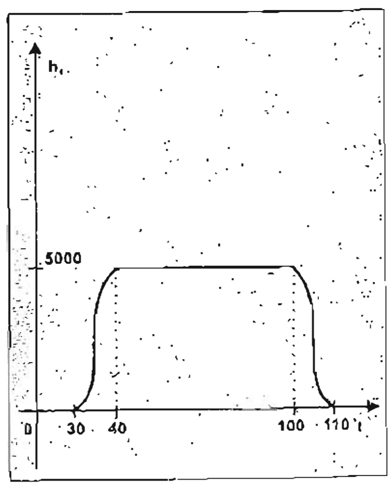
Veamos como proceder en cada caso:

1.- Si el avión sale 30 minutos después a realizar el "mismo" vuelo, su altura en el instante t, $h_1(t)$, será igual a la que tenía el avión original 30 minutos antes. Esto es:

$$h_1(t) = h(t - 30) \qquad (1)$$

Así, por ejemplo, $h_1(30) = h(0) = 0$ (cuando despega)
$h_1(110) = h(80) = 0$ (cuando aterriza)

Por esto, el gráfico de h_1 se obtiene trasladando el de h 30 unidades hacia la derecha: ➔



Estamos suponiendo, y así se refleja en este gráfico, que el altímetro estuvo funcionando los primeros 30 minutos mientras el avión no despegó.

Para pensar:

¿Cuál es la función altura para un avión que realizó el mismo vuelo 30 minutos antes que el primero?
(Sugerencia: relacionarla con h y obtener su gráfico a partir de esa relación).

2.- Que el avión vaya dos veces más rápido hace que para llegar a cada posición de la trayectoria, necesite la mitad del tiempo empleado en el vuelo original. Su altura en el instante t, por lo tanto cumple la relación:

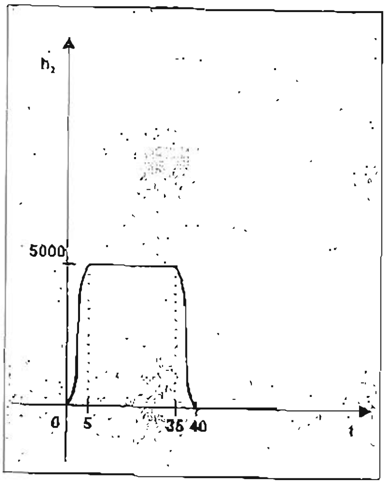
$$h_2(t) = h(2t) \qquad (2)$$

Así, por ejemplo, su altura al cabo de 5 minutos es de 5000 metros, ya que $h_2(5) = h(10) = 5000$ (ver el gráfico de h) y a los 40 minutos,

$h_2(40) = h(80) = 0$ (a los 40 minutos este avión completa el vuelo).

La expresión (2) hace que el gráfico de $h_2(t)$ se obtenga "comprimiendo" horizontalmente, hasta que la distancia de cada punto al eje y quede reducida a la mitad:

←



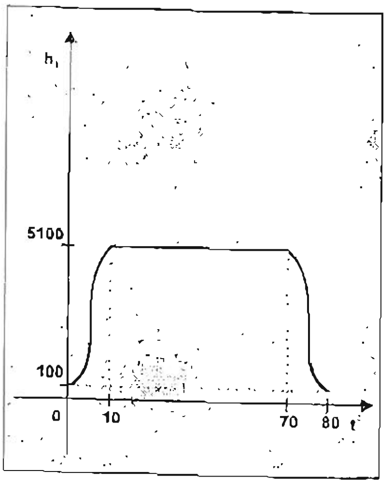
Si, en cambio, consideráramos que el avión va a la mitad de velocidad (sería $h_2(t) = h(\frac{1}{2}\, t)$), el gráfico de su altura a lo largo del tiempo podría obtenerse dilatando el gráfico de h(t) al doble.

3.- El avión despega desde un lugar que se encuentra a 100 m de altura. Como las condiciones del vuelo son las mismas, en cada instante, la altura $h_3(t)$ será igual a la altura del avión original más 100. Es decir:

$$h_3(t) = h(t) + 100 \qquad (3)$$

Así, por ejemplo, $h_3(0) = h(0) + 100 = 100$ (despega a 100 m de altura), y $h_3(80) = h(80) + 100 = 100$ (aterriza en el mismo lugar).

←



4.- Supongamos ahora que el altímetro del avión da la altura en pies (Usaremos el valor aproximado: 1 metro = 3 pies).

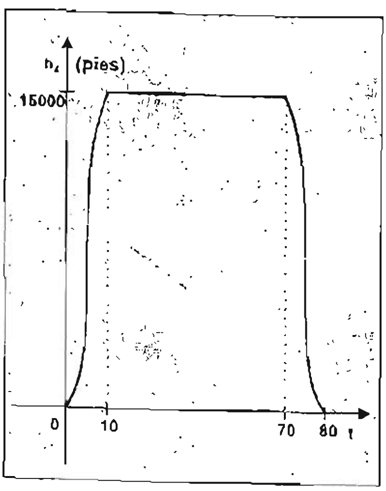
En el gráfico $h_4(t)$ será, en cada punto, el triple del valor original de h(t); esto es:

$$h_4(t) = 3h(t)$$

Así por ejemplo: $h_4(10) = 15000$ (tres veces más alto que el gráfico original).

El gráfico de $h_4(t)$ se obtiene "estirando" verticalmente el gráfico de h(t), hasta que la distancia de cada punto al eje x se triplique :

←



Piense cómo se transformaria el gráfico en el caso que se expresara la altrura en kilómetros.

Vemos entonces que a partir del gráfico de h(t), fue relativamente sencillo obtener el gráfico de:

1) $h_1(t) = h(t - 30)$
2) $h_2(t) = h(2t)$
3) $h_3(t) = h(t) + 100$
4) $h_4(t) = 3h(t)$

A esta altura, el lector atento se habrá dado cuenta de que las ideas usadas en el problema precedente, son de índole general. Más precisamente, si se tiene $h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cuyo gráfico conocemos, podemos construir el gráfico de:

1) $h_1(x) = h(x + a)$ **trasladando** el gráfico de h(x):
a la derecha, si $a < 0$
a la izquierda, si $a > 0$

2) $h_2(x) = h(ax)$ **contrayendo** el gráfico de h(x) horizontalmente si $a > 1$
dilatando el gráfico de h(x) horizontalmente si $0 < a < 1$

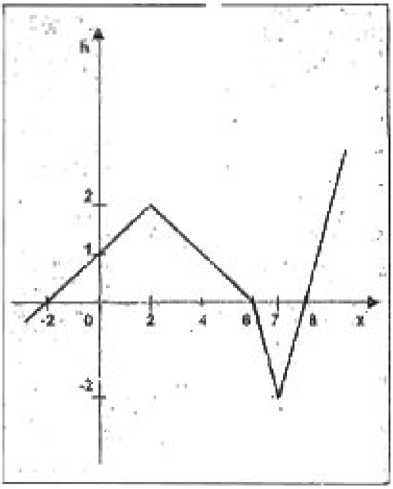
3) $h_3(x) = h(x) + a$ **trasladando** el gráfico de h(x) hacia:
arriba si $a > 0$
abajo si $a < 0$

4) $h_4(x) = ah(x)$ **contrayendo** el gráfico de h(x) verticalmente si $0 < a < 1$
dilatando el gráfico de h(x) verticalmente si $a > 0$

Otro problema que puede resolverse en forma similar es el siguiente: conociendo el gráfico de h(x) ¿Cómo se construyen los gráficos de $h_5(x)$ y $h_6(x)$?

5) $h_5(x) = h(-x)$ 6) $h_6(x) = -h(x)$

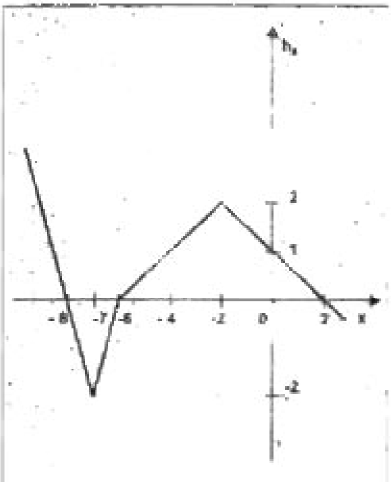
Sea h(x), por ejemplo, la función cuyo gráfico es →



5) $h_5(x) = h(-x)$

Cada valor de $h_5(x)$ es igual al valor de h en -x. Así, por ejemplo, $h_5(2) = h(-2) = 0$ y $h_5(-2) = h(2) = 2$. Como -x es el simétrico de x respecto del eje y, el gráfico de h_5 es el simétrico del gráfico de h respecto del eje y.

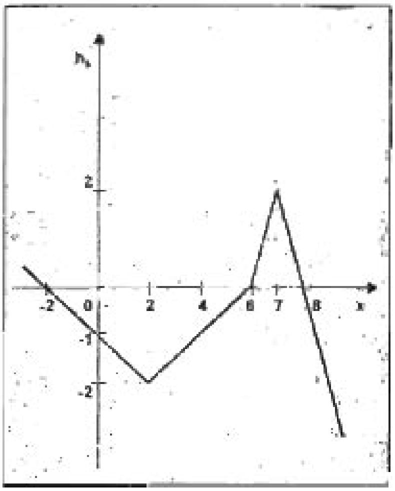
→



6) $h_6(x) = -h(x)$

El valor de $h_6(x)$ para cada x se obtiene cambiando el signo a h(x). Por ejemplo, $h_6(0) = -h(0) = -1$. El gráfico de $h_6(x)$ es simétrico, respecto del eje x, del gráfico de h(x).

→

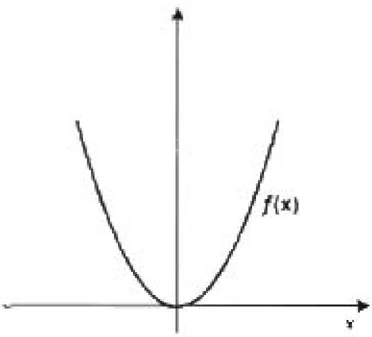


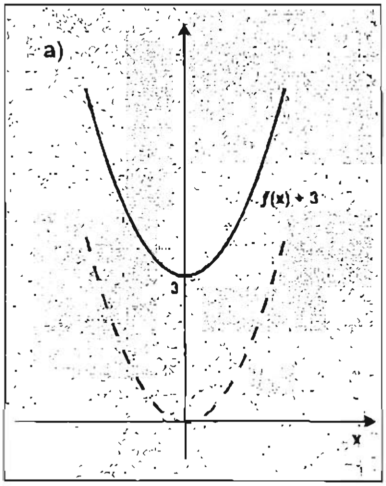
Ejemplo 4

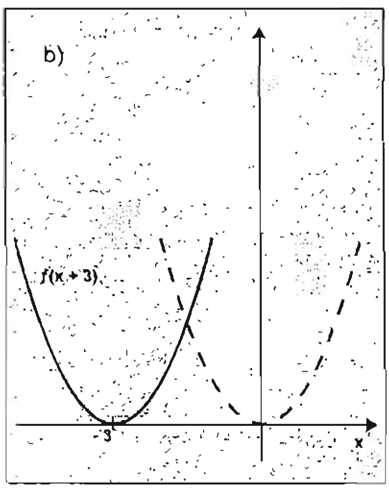
Si f es la función del gráfico y $g(x) = x + 3$ →

Construir el gráfico de

a) $g \circ f$
b) $f \circ g$







Aclaración

$f(x)$ está definida sólo para $-2 \leq x \leq 1$, luego $f(2x)$ lo estará para todo x tal que $-2 \leq 2x \leq 1$ es decir, $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$, de aquí, $\mathrm{dom}\,(f \circ g) = [-1\ ,\ \frac{1}{2}]$.

Solución

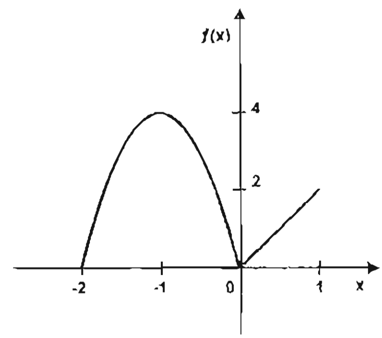
a) $(g \circ f)\,(x) = g\,(f(x)) = f(x) + 3$.
Esto dice que $g \circ f$ vale en cada punto 3 unidades más de lo que f vale en este punto. Por lo tanto, su gráfico se obtiene desplazando el de f 3 unidades hacia arriba.

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 3)$.
Es decir: $f \circ g$ vale en cada x lo que f vale 3 unidades más adelante (en x + 3). Así, el gráfico de $f \circ g$ se obtiene desplazando el de f 3 unidades hacia la izquierda.

Ejemplo 5

f es la función del gráfico ➔
($\mathrm{dom}(f) = [-2\ ,\ 1]$).

a) si $g(x) = 2x$ graficar $f \circ g$.
b) si $h(x) = -x$ graficar $f \circ h$.
c) si $h(x) = -x$ graficar $h \circ f$.



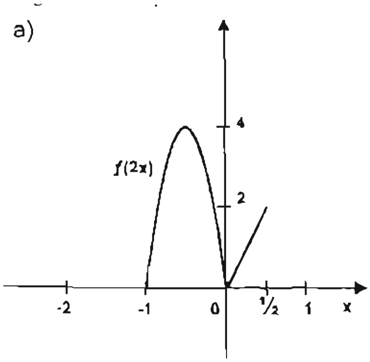
Solución

a) $(f \circ g)\,(x) = f(2x)$ está definida en el $[-1\ ,\frac{1}{2}]$ y en cada valor de x vale lo que f en (2x). Así su gráfico se obtiene comprimiendo horizontalmente el de f (hasta que quede reducido a la mitad).

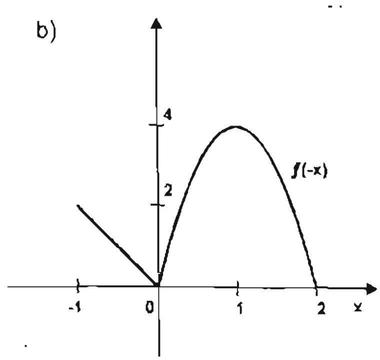
b) $(f \circ h)\,(x) = f(h(x)) = f(-x)$ está definida en el $[-1\ ,\ 2]$ y vale, en cada x, lo que f vale en -x. Por esto, el gráfico de $f \circ h$ se obtiene reflejando el gráfico de f respecto del eje de las y.

c) $(h \circ f)(x) = h(f(x))$. El valor de $h \circ f$ en cada x es el opuesto del valor de f en x. Por lo tanto, el gráfico de $h \circ f$ se obtiene reflejando el de f respecto del eje de las x.

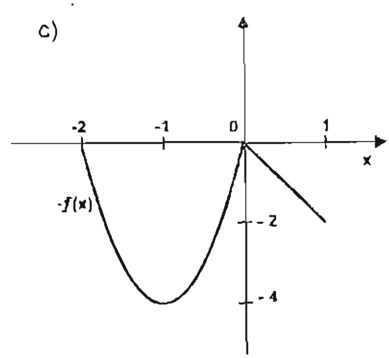
a)



b)



c)



FUNCION INVERSA

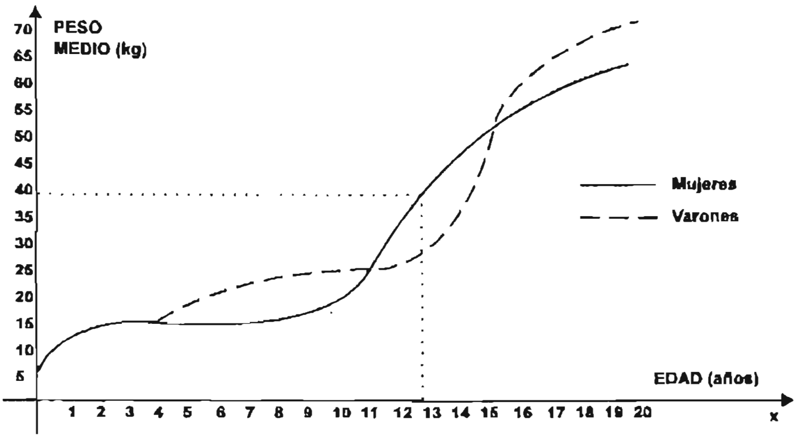
Uno de los problemas más frecuentes que aparecen cuando estudiamos un fenómeno representado por medio de una función f, es el de resolver la ecuación

$$f(x) = b$$

donde b es dato y la incógnita es x.

Esta situación se presentó en varios problemas del capítulo 2. Recordemos algunos:

- El peso p de las chicas desde que nacen hasta los 20 años viene dado por el siguiente gráfico:



Es decir que si llamamos f al peso y a a la edad tendremos que p = f(*a*). Si se nos pregunta: ¿a qué edad las chicas tienen un peso medio de 40 kg? deberemos resolver la ecuación

$$f(a) = 40$$

El problema se resuelve gráficamente, viendo para qué valor de *a* la recta y = 40 corta al gráfico de f. Obtuvimos que, entre los 12 y 13 años las chicas tienen un peso medio de 40 kg.

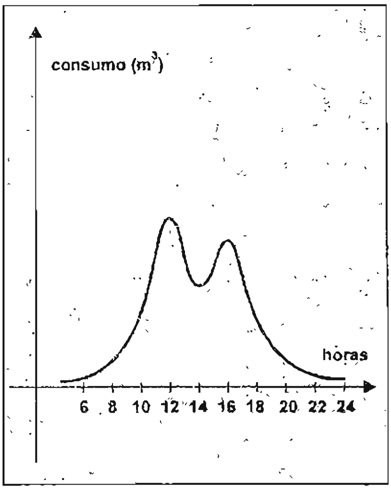
- Las empresas de electricidad facturan los consumos eléctricos domiciliarios, según la siguiente tarifa:

cargo fijo sobre derecho a consumo \$2,38
los primeros 126 kwh .... \$0,0634 c/u
los restantes kwh .... \$0,094 c/u

Sobre el total se incrementa un 17,20% en concepto de Fondos e Impuestos. ¿Cuál fue el consumo de una familia que pagó \$9,17?

Para resolverlo, si f representa el importe A (en pesos) en función del consumo c (en kwh) de energía eléctrica, es decir,

$$A = f(c)$$



se plantea la ecuación

$$f(c) = 9,17$$

El consumo de agua en un colegio viene dado por el gráfico

←

Durante qué horas es nulo el consumo de agua, presupone resolver

$$f(t) = 0$$

donde t es el tiempo medido en horas y f representa el consumo de agua en metros cúbicos.

En los siguientes ejemplos se plantean las distintas situaciones que pueden presentarse al intentar resolver la ecuación $f(x) = b$

Ejemplo 6

Resolver en cada caso, si es posible, la ecuación $f(x) = b$

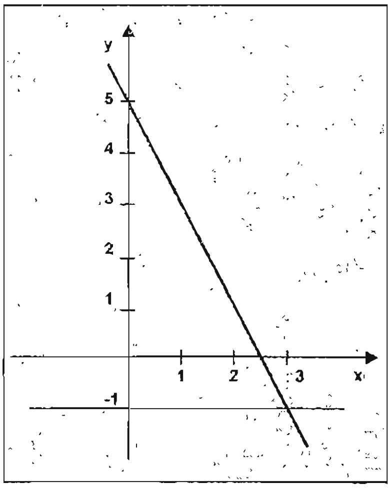
i) $f(x) = -2x + 5$ $\quad b = -1$

ii) $f(x) = x^2 + 4$ $\quad b = 8$

iii) $f(x) = \dfrac{x - 1}{3x + 1}$ $\quad b = \dfrac{1}{3}$

iv) $f(x) = \begin{cases} 2 & x \le 0 \\ x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}$ $\quad b = 2$

Solución



←

i) Debemos resolver la ecuación $f(x) = -1$ o sea:

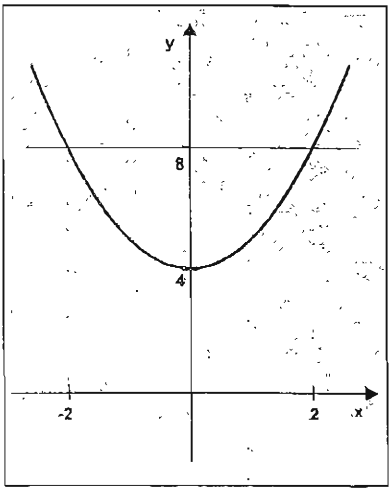
$$-2x + 5 = -1$$

Operando convenientemente "despejamos" la incógnita x:

$$-2x + 5 = -1 \Leftrightarrow -2x = -1 - 5 = -6 \Leftrightarrow -2x = -6 \Leftrightarrow x = \frac{-6}{-2} = 3$$

La doble implicación en cada uno de los pasos nos permite concluir que existe una única solución

$$x = 3$$



ii) En este caso la ecuación a resolver es

$$x^2 + 4 = 8$$

Nuevamente, "despejamos" x y obtenemos:

$$x^2 + 4 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 8 - 4 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ó } x = -2$$

Entonces, existen dos soluciones de la ecuación

←

iii) Aquí debemos resolver

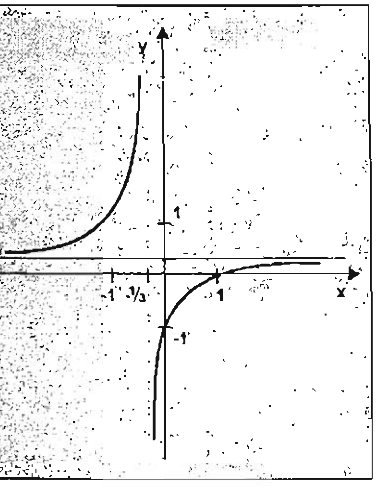
$$\frac{x-1}{3x+1} = \frac{1}{3}$$

Para $x \in \text{dom}\, f$ $(x \neq -\frac{1}{3})$, al intentar "despejar" x, obtenemos:

$$\frac{x-1}{3x+1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(x-1) = 3x+1 \Leftrightarrow 3x-3 = 3x+1 \Leftrightarrow -3 = 1$$

Esta última igualdad es absurda. Concluimos que no existe x tal que se cumpla la ecuación original.

→



iv) En este caso, para resolver

$$f(x) = 2$$

debemos considerar, dada la definición de f, dos casos:

Si $x \leq 0$, la ecuación es

$$f(x) = 2 \Rightarrow 2 = 2$$

que obviamente se satisface para todo x en consideración ($x \leq 0$).

Si $x > 0$ la ecuación es

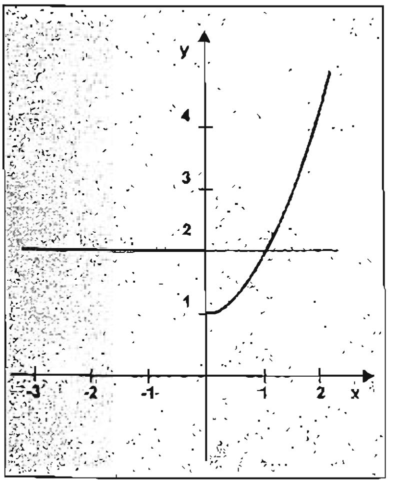
$$f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 + 1 = 2$$

o, equivalentemente:

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ó } x = -1$$

Como estamos considerando el caso $x > 0$ la solución que sirve es $x = 1$. Vemos en este caso que existen infinitas soluciones.

→



O O O Imagen de f

Los ejemplos anteriores nos llevan a la siguiente conclusión

Si $f: A \to B$ y $b \in B$, la ecuación $f(x) = b$ puede tener soluciones (una o más de una) o no tenerlas.

El conjunto de los $b \in B$ para los cuales la ecuación tiene solución es la imagen de f:

$$\text{Im} f = \{b \in B \,/\, f(x) = b \text{ para algún } x \in A\}$$

Recordemos que cuando $B \subseteq \mathbb{R}$, gráficamente, Imf está caracterizada como los b tales que la recta horizontal y = b corta al gráfico de f; hay tantos cortes como soluciones tenga la ecuación.

Observación

Resolver $f(x) = b$ puede ser complicado algebraicamente (y aún imposible) en casos aparentemente sencillos. Por ejemplo, si

$$f(x) = x^5 + 3x + 1 \text{ , } b = 2$$

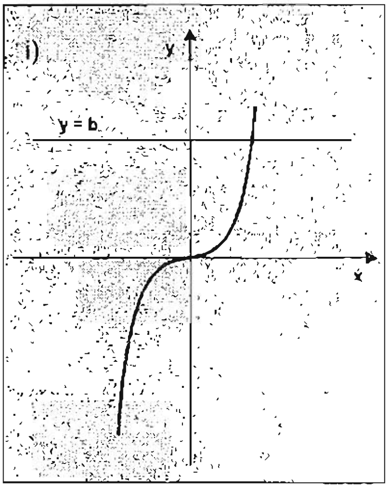
$$f(x) = b \Leftrightarrow x^5 + 3x + 1 = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^5 + 3x - 1 = 0$$

Los ceros del polinomio

$$p(x) = x^5 + 3x - 1$$

aunque existen, sólo pueden localizarse aproximadamente por medio de métodos numéricos tales como los que vimos al estudiar los polinomios.

Función suryectiva



En los casos en que Imf = B diremos que la función es suryectiva.

Definición: f es suryectiva si y sólo si Imf = B

Ejemplo 7

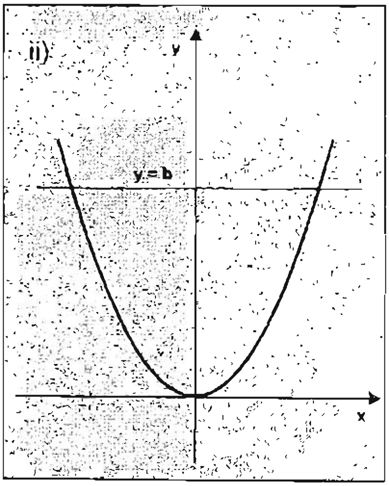
A partir de los gráficos de funciones i) ; ii) ; iii) ; iv)

a) Determinar la Imf
b) Para cada $b \in$ Imf decidir si la solución de la ecuación $f(x) = b$ es única.

Solución

i) En este caso vemos que toda recta horizontal y = b corta exactamente en un punto al gráfico de f. Por lo tanto:

a) Imf = **R**
b) f(x) = b tiene solución única para todo b $\in$ Imf.

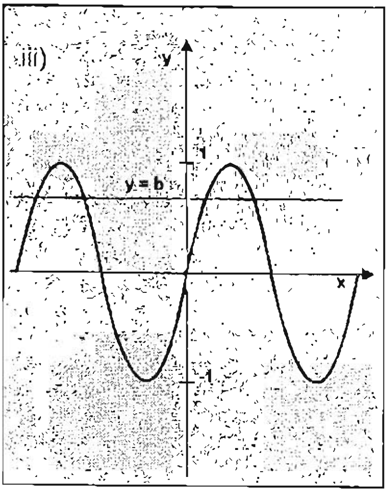


ii) Aquí podemos distinguir tres situaciones:

- las rectas y = b cortan al gráfico de f en dos puntos si b > 0.
- lo cortan en un solo punto si b = 0.
- no lo cortan cuando b < 0.

En síntesis, tenemos:

a) Imf = [0 , +∞)
b) f(x) = b tiene más de una solución cuando b > 0.

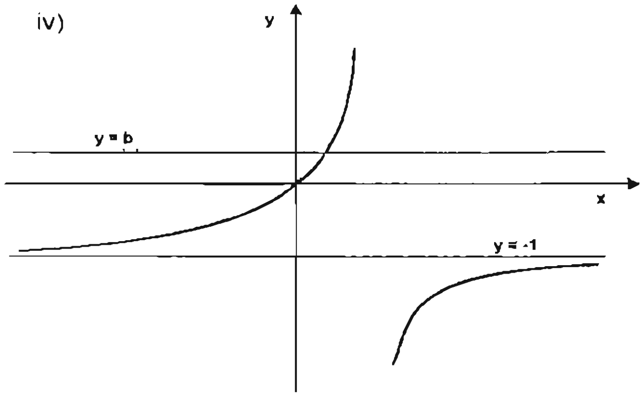


iii) En este caso podemos observar que las rectas y = b sólo cortan al gráfico de f cuando $-1 \leq b \leq 1$ y en estos casos lo cortan en infinitos puntos. Fuera de este rango de valores de b la ecuación no tiene solución. Por lo tanto:

a) Imf = [-1 , 1].
b) f(x) = b tiene infinitas soluciones para todo b $\in$ Imf.

iv) Aquí todas las rectas y = b cortan al gráfico en un único punto, salvo la recta y = -1 que no lo corta. En consecuencia:

a) Imf = **R** - {-1}
b) f(x) = b tiene solución única para todo b $\in$ Imf.



O O O Función inyectiva

Cuando para cada $b \in \mathrm{Im} f$ la ecuación $f(x) = b$ tenga solución única diremos que la función es inyectiva. Esto significa que f no repite sus valores:

$$\text{Si } x_1 \neq x_2 \text{, entonces } f(x_1) \neq f(x_2)$$

Definición: f es inyectiva si y sólo si $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$.

En el ejemplo 7 son inyectivas i) y iv).

Sintetizando: Si $f: A \to B$ $\quad f(x) = b$

- existe solución $\Leftrightarrow$ $b \in \mathrm{Im} f$
- si f es suryectiva $\Rightarrow$ existe solución $\forall\, b \in B$
- si f es inyectiva $\Rightarrow$ la solución es única $\forall\, b \in \mathrm{Im} f$

Definición: Diremos que f es *biyectiva* si es inyectiva y suryectiva.

O O O Función inversa

La importancia de la unicidad de la solución radica en que a cada $y \in \mathrm{Im}(f)$ le podemos asignar el único x que resuelve $f(x) = y$. Esta asignación resulta ser una función . Antes de precisar estas ideas analicemos un ejemplo en el que se aprecia el sentido práctico de estudiar esta correspondencia.

Ejemplo 8

Supongamos que un móvil que se halla en el instante inicial (t =0) a 2 metros de distancia del observador,se aleja desplazándose con movimiento rectilíneo a velocidad constante 3 metros por segundo.
Su posición en el instante t viene dada entonces por

$$X(t) = 3t + 2 \qquad \text{(t en segundos)}$$

a) ¿Cuánto tiempo pasó cuando la distancia del móvil al observador es de 17 metros?
b) Existe algún instante en el cual el móvil se encuentra a 1 metro del observador?¿Por qué?
c) ¿Cuánto tiempo pasó cuando la distancia del móvil al observador es de x metros?¿Qué valores puede tomar x dadas las caracteristicas del problema?

Solución

a) La ecuación a resolver es

$$3t + 2 = 17$$

Haciendo la cuenta obtenemos $t = \dfrac{17 - 2}{3} = 5$ segundos

b) En este caso debemos resolver

$$3t + 2 = 1$$

Al despejar t obtenemos

$$3t + 2 = 1 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}$$

¡Nos da un tiempo negativo! Si suponemos que el móvil comenzó a moverse en el instante $t = 0$ no tiene sentido considerar tiempos negativos, con lo cual el problema no tiene solución. Esto es fácil de aceptar si pensamos que, siendo la velocidad positiva, el móvil se aleja constantemente del observador y, dado que al "arrancar" estaba a 2 metros de distancia, nunca estará a menos de 2 metros.

c) Si la distancia es de x metros, la ecuación a resolver es

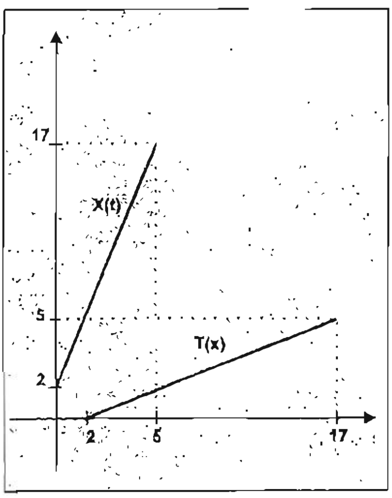
$$3t + 2 = x$$

Despejamos t "en función" de x y obtenemos

$$t = T(x) = \frac{x - 2}{3}$$

Como dijimos en la parte b) consideramos sólo tiempos positivos (o sea, el móvil comienza a moverse en $t = 0$), entonces debe ser

$$\frac{x - 2}{3} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 2$$



Analicemos un momento lo que hemos hecho en la resolución de este problema:

- Estudiamos la función $X(t) = 3t + 2$ tomando como dominio el intervalo $[0, +\infty)$ (tiempos no negativos)
- La ecuación $X(t) = x$ con $x > 0$ tuvo solución (y única!) para todo $x \in [2, +\infty)$.

En términos de los conceptos que hemos introducido, podemos decir que la función

$X: [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ es inyectiva y que $\operatorname{Im}X = [2, +\infty)$

Como consecuencia de esto obtuvimos una nueva función T(x) cuyo dominio es el intervalo $[2, +\infty)$ (la imagen de X) y cuya imagen es el intervalo $[0, +\infty)$ (el dominio de X). Hemos representado en un mismo sistema de coordenadas ambas funciones.

La función T(x) es la función *inversa* de X(t) ya que si para un t obtengo x aplicando X, con ese x obtengo t aplicando T

$$[0, +\infty) \xrightarrow{X} [2, +\infty) \xrightarrow{T} [0, +\infty)$$
$$t \longrightarrow x \longrightarrow t$$

Por ejemplo, en a) : $X(5) = 17$ por lo cual $T(17) = 5$

Damos entonces la definición formal

Definición Si $f: A \to B$ es una función biyectiva llamaremos función inversa de f a la función $g: B \to A$ definida por

$$g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

A la función g la notaremos f^{-1}

En el ejemplo anterior $X:[0, +\infty) \to [2, +\infty)$ definida como $X(t) = 3t + 2$ es biyectiva y su inversa es

$$X^{-1}:[2, +\infty) \to [0, +\infty) \quad , \quad X^{-1}(x) = T(x) = \frac{x - 2}{3}$$

Notar, que en términos de X y de X^{-1}, esta situación se traduce en:

$$(X^{-1} \circ X)(t) = t \quad y \quad (X \circ X^{-1})(x) = x$$

En efecto:

$$(X^{-1} \circ X)(t) = X^{-1}(X(t)) = X^{-1}(3t + 2) = \frac{(3t + 2) - 2}{3} = t$$

Le dejamos el otro cálculo para que se entretenga.

ADVERTENCIA

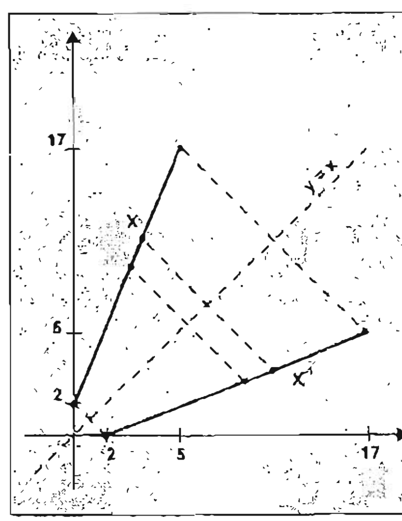
f^{-1} es la notación para designar a la función inversa y no tiene nada (pero nada de nada) que ver con la función $\frac{1}{f}$. Hecha esta advertencia queda bajo su absoluta responsabilidad el uso debido de f^{-1}

○ ○ ○

Gráfico de la función inversa

Si observamos con atención los gráficos de X y de X^{-1} representados en la página anterior y aquí reproducidos, podremos advertir la simetría que hay entre ambos respecto de la bisectriz del primer cuadrante: la recta x = y.

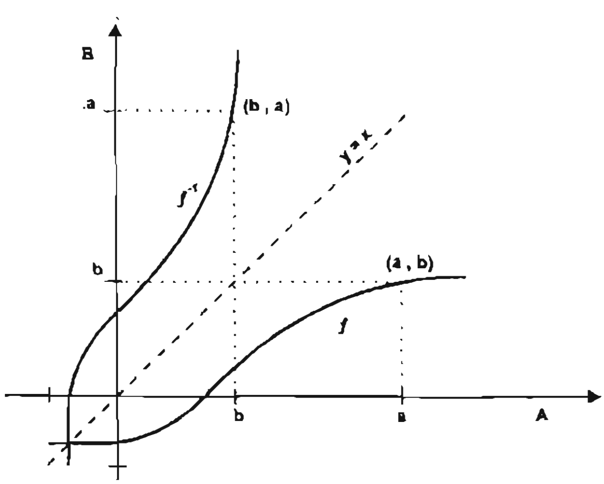
➔

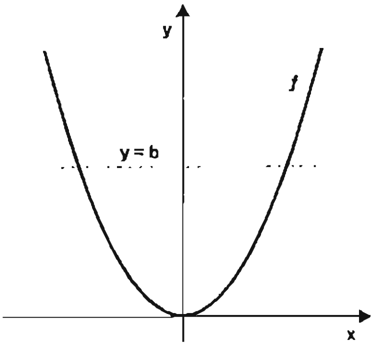


Esta simetría no es casual y nos permitirá construir el gráfico de f^{-1} a partir del gráfico de f.

En efecto: sea $f: A \to B$ una función biyectiva y $f^{-1}: B \to A$ su inversa: un punto (a , b) está en el gráfico de f si $b = f(a)$ y esto es equivalente a que $f^{-1}(b) = a$ y significa que (b ,a) está en el gráfico de f^{-1}. En síntesis:

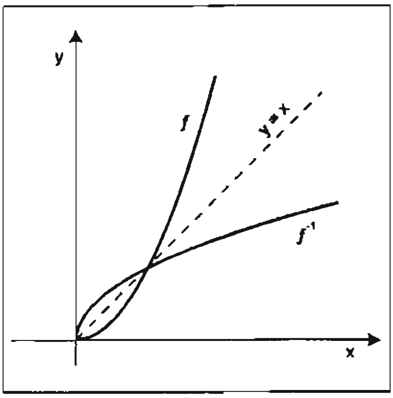
(a , b) está en el gráfico de f $\Leftrightarrow$ (b , a) está en el gráfico de f^{-1}





Esto muestra que los gráficos de f y f^{-1}, si se toman las mismas escalas en ambos ejes, son simétricos respecto a la recta x = y.

En ocasiones, a partir de una función que no es inyectiva, se puede obtener una que sí lo es, recortando convenientemente el dominio. Veamos un ejemplo:



Ejemplo 9

🡐 Dado el gráfico de una función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

- Calcular B = Imf
- Encontrar $A \subseteq \mathbf{R}$ tal que $1 \in A$ y $f:\ A \to B$ sea biyectiva
- Graficar $f^{-1}: B \to A$

Solución

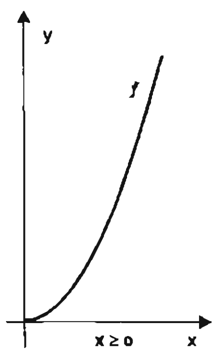
Claramente, es B = Imf = $[0\ ,+\infty)$. Además, para cada b > 0, la recta y = b corta al gráfico en dos puntos, uno a la izquierda y otro a la derecha del eje y. Eliminando la rama que está a la izquierda del eje y, conseguiríamos unicidad. Concretamente, si A = $[0\ ,+\infty)$, $1 \in A$ y $f: A \to B$ es biyectiva.
Obtenemos el gráfico de $f^{-1}: [0\ ,+\infty) \to [0\ ,+\infty)$ reflejando el de f respecto de la recta de ecuación y = x.

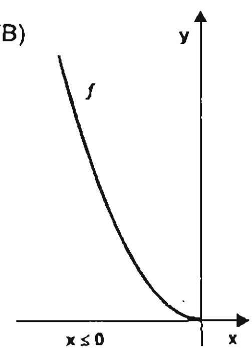
🡐

La función raíz cuadrada ○ ○ ○

Consideraciones análogas a las que (gráficamente) realizamos en el ejemplo anterior, nos permiten introducir la función raíz cuadrada. La función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ es una vieja conocida nuestra. Su imagen es $\mathbf{R}_{\geq 0}$ y f no es inyectiva: $f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbf{R}$. Restringiendo el dominio, aparecen dos "ramas" naturales que corresponden a funciones biyectivas:

(A) $f: [0\ ,+\infty) \to [0\ ,+\infty)$
(B) $f: (-\infty\ ,0] \to [0\ ,+\infty)$

(A) 

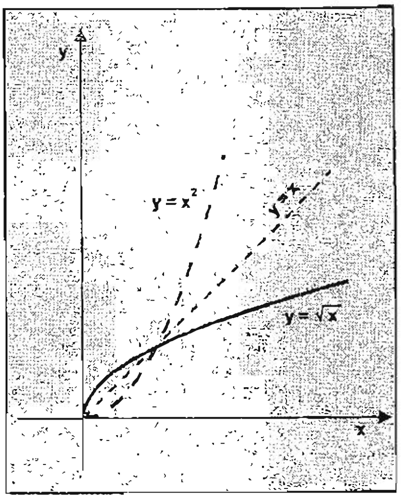
(B) 

La inversa correspondiente a la "rama" elegida en (A), se conoce como la "raíz cuadrada".

$\sqrt{\ }\ : [0\ ,+\infty) \to [0\ ,+\infty)$ es la función que a cada número real positivo x, le asigna el número real positivo y tal que $y^2 = x$.

$$\text{Si } y \geq 0 \quad \sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2$$

Obtenemos el gráfico de $\sqrt{\ }$: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$ reflejando, respecto de la recta $y = x$, la porción de parábola que corresponde. ➔



En el siguiente ejemplo ilustraremos cómo calcular inversas de funciones biyectivas.

Ejemplo 10

Para cada función

- Calcular $B = \operatorname{Im} f$.
- Encontrar $A \subseteq \mathbf{R}$ tal que $a \in A$ y $f: A \to B$ sea biyectiva.
- Calcular $f^{-1} : B \to A$.

a) $f(x) = 4x^2 - 1$ $\qquad a = -1$

b) $f(x) = \dfrac{5x + 1}{2x - 1}$ $\qquad a = 2$

Solución

Para resolver este tipo de problemas despejamos x de la ecuación $f(x) = y$ para cada $y \in \mathbf{R}$ y tomamos nota de las restricciones que vamos imponiendo al efectuar la cuenta. Las restricciones que impongamos sobre y para que exista solución, irán conformando la $\operatorname{Im} f$. Las restricciones que impongamos a x para obtener una única solución (inyectiva) irán conformando el conjunto A.

a) $$f(x) = y \Leftrightarrow 4x^2 - 1 = y \Leftrightarrow 4x^2 = y + 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{y+1}{4}$$

La siguiente cuenta será aplicar raíz cuadrada a cada miembro de la última igualdad. Para ello deben ser ambos no negativos. Como

$$\frac{y+1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -1$$

y en ese caso

$$x^2 = \frac{y+1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{y+1}{4}}$$

$f(x) = y$ tiene solución si y sólo si $y \geq -1$, de donde es

$$B = \operatorname{Im} f = [-1, +\infty)$$

Ahora bien, para cada $y \geq -1$ las dos soluciones de $f(x) = y$

$$x_1 = \sqrt{\frac{y+1}{4}} \quad \text{y} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{y+1}{4}}$$

son una positiva y otra negativa. Como nos piden que -1 esté en A tomamos las soluciones negativas. Es decir

$$A = (-\infty , 0]$$

En síntesis f: $(-\infty , 0] \rightarrow [-1 , +\infty)$ es biyectiva y f^{-1}: $[-1 , +\infty) \rightarrow (-\infty , 0]$ viene dada por $f^{-1}(y) = -\sqrt{\dfrac{y+1}{4}}$

b) Procedemos igual que antes, despejando x de la ecuación $f(x) = y$. Antes de empezar observamos que:

$$2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$$

Despejamos x:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{5x+1}{2x-1} = y \Leftrightarrow 5x + 1 = y(2x - 1) \Leftrightarrow 5x + 1 = 2yx - y \Leftrightarrow$$

$$5x - 2yx = -1 - y \Leftrightarrow (5 - 2y)x = -1 - y \Leftrightarrow x = \frac{-1-y}{5-2y} = \frac{1+y}{2y-5}$$

Esta última cuenta vale siempre que

$$5 - 2y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq \frac{5}{2}$$

Hemos encontrado pues, para cada $y \neq \frac{5}{2}$ un único valor de x ($x \neq \frac{1}{2}$) tal que $f(x) = y$. Tomamos

$$B = \mathrm{Im} f = \mathbf{R} - \{\tfrac{5}{2}\} \qquad A = \mathbf{R} - \{\tfrac{1}{2}\}$$

En consecuencia

f: $\mathbf{R} - \{\frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbf{R} - \{\frac{5}{2}\}$ es biyectiva y f^{-1}: $\mathbf{R} - \{\frac{5}{2}\} \rightarrow \mathbf{R} - \{\frac{1}{2}\}$ viene dada por $f^{-1}(y) = \dfrac{1+y}{2y-5}$

FUNCIONES MONOTONAS

Una de las cualidades que interesa en el estudio de un fenómeno, es el crecimiento o decrecimiento de las magnitudes involucradas.

En el Capítulo 2 de *Funciones* vimos el concepto de crecimiento y decrecimiento en intervalos conjuntamente con su significado geométrico. Estudiamos en detalle el caso de funciones lineales y mostramos la relación que existe entre el signo de la pendiente y el crecimiento o decrecimiento.

Precisamente, el caso del móvil del ejemplo 8 que se aleja cada vez más del observador, se explica bien en este contexto: la función P(t) que describe su movimiento es lineal y su pendiente es positiva, por lo tanto, crece a medida que avanza el tiempo.

○ ○ ○ Funciones crecientes y decrecientes

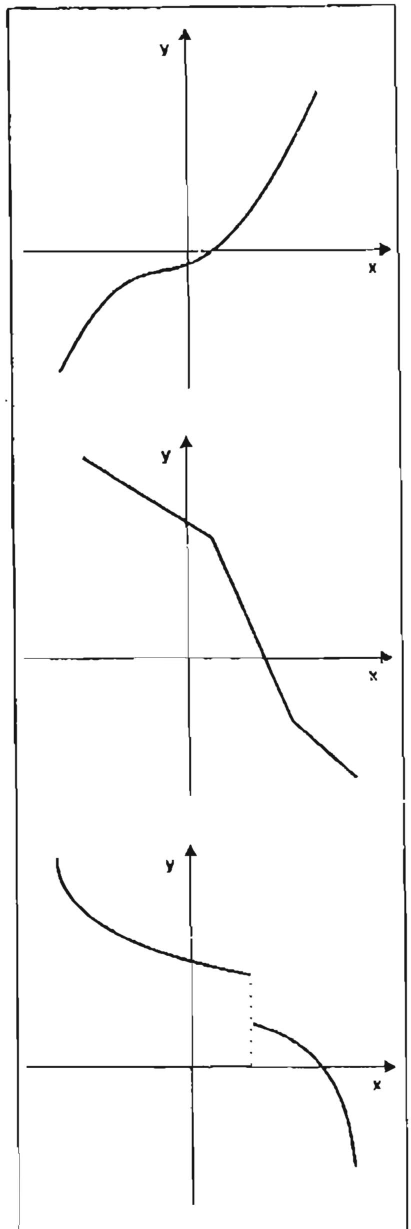
Recordemos que una función f: A $\rightarrow$ B (con A y B subconjuntos de **R**) es **creciente** cuando:

cada vez que $x_1 < x_2$ resulta $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(x_1, x_2 \in A)$, o
equivalentemente, si $x_2 - x_1 > 0$ resulta $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ $(x_1, x_2 \in A)$

En cambio se dice que es **decreciente** cuando:

cada vez que $x_1 < x_2$ resulta $f(x_1) \geq f(x_2)$ $(x_1, x_2 \in A)$ o
equivalentemente, si $x_2 - x_1 > 0$ resulta $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$ $(x_1, x_2 \in A)$

Cuando la desigualdad es estricta se suele decir que f es **estrictamente creciente** o **estrictamente decreciente** según sea el caso.
Una función que es creciente o decreciente se llama **monótona**.
Los siguientes son gráficos de funciones monótonas ➔



La particularidad más importante de las funciones crecientes es que conservan el orden, mientras que las decrecientes lo invierten. Este hecho lo usamos, sin reparar en ello, cuando operamos con desigualdades ("elevo al cuadrado ambos miembros", "saco raíz cuadrada a ambos miembros", "tomo logaritmo en ambos miembros de la desigualdad", "multiplico por -1 a la desigualdad", etc)
Veamos como se demuestra que una función es monótona estudiando el signo de $f(x_2) - f(x_1)$, con $x_1, x_2 \in A$

Ejemplo 11

Las siguientes funciones son monótonas en A. Determinar cuáles son crecientes y cuáles decrecientes:

i) $f(x) = 3x + 2$ $\qquad A = \mathbf{R}$
ii) $f(x) = -x + 5$ $\qquad A = \mathbf{R}$
iii) $f(x) = \dfrac{5x+1}{2x-1}$ $\qquad A = (\frac{1}{2}, +\infty)$
iv) $f(x) = 4x^2 - 1$ $\qquad A = (-\infty, 0)$

Solución

i) En este caso f es lineal. Podemos apelar entonces a lo visto en el capítulo de *Funciones lineales*. Dado que la pendiente 3 es positiva f es estrictamente creciente. De todas formas si aplicamos la definición, la cuenta no es complicada:

Determinemos el signo de $f(x_2) - f(x_1)$ para x_1, x_2 en A tales que $x_2 - x_1 > 0$:

$$f(x_2) - f(x_1) = (3x_2 + 2) - (3x_1 + 2) = 3x_2 - 3x_1 = 3(x_2 - x_1)$$

que resulta ser mayor que cero.

Luego, efectivamente f es estrictamente creciente.

ii) Aquí también f es lineal y de pendiente negativa (-1).
Por lo tanto f es estrictamente decreciente. Verificar que:

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \text{ para } x_1 , x_2 \in A \text{ tales que } (x_2 - x_1) > 0$$

iii) En este caso afirmamos que f es decreciente. En efecto:
Sean $x_1 < x_2$ (con $x_1 , x_2 \in (\frac{1}{2}, +\infty)$). Debemos probar que

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{5x_2 + 1}{2x_2 - 1} - \frac{5x_1 + 1}{2x_1 - 1} = \frac{(5x_2 + 1).(2x_1 - 1) - (5x_1 + 1).(2x_2 - 1)}{(2x_2 - 1).(2x_1 - 1)} =$$

$$= \frac{(10x_1.x_2 - 5x_2 + 2x_1 - 1) - (10x_1.x_2 - 5x_1 + 2x_2 - 1)}{(2x_2 - 1).(2x_1 - 1)} =$$

$$= \frac{-7x_2 + 7x_1}{(2x_2 - 1).(2x_1 - 1)} = \frac{-7(x_2 - x_1)}{(2x_2 - 1).(2x_1 - 1)}$$

Recordemos que tanto x_1 como x_2 son mayores que $\frac{1}{2}$, de modo que ambos denominadores son positivos; como estamos suponiendo también $(x_2 - x_1) > 0$, la fracción resulta negativa y f es estrictamente decreciente en $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

iv) Analizaremos nuevamente el signo de $f(x_2) - f(x_1) > 0$ cuando $(x_2 - x_1) > 0$

$$f(x_2) - f(x_1) = (4x_2^2 - 1) - (4x_1^2 - 1) = 4(x_2^2 - x_1^2) = 4(x_2 - x_1).(x_2 + x_1)$$

como $x_1 , x_2 \in (-\infty , 0]$, $(x_2 + x_1) < 0$ así la diferencia que estamos analizando, es también negativa.
Luego f es estrictamente decreciente en $(-\infty , 0]$ (comparar con el ejemplo 10).

Relación entre la monotonía y la biyectividad

Más adelante dispondremos de una herramienta que nos permitirá en muchos casos determinar la monotonía de una función con mayor facilidad: la derivada.

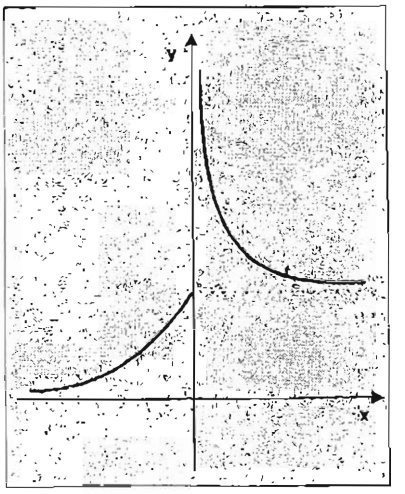
Las funciones estrictamente monótonas guardan una estrecha relación con las funciones biyectivas. Es fácil demostrar que

> Si f es estrictamente monótona (creciente o decreciente) entonces f es inyectiva.

En otras palabras, una función estrictamente monótona no vuelve a tomar valores que ya tomó, con lo cual, si $f(x_1) = f(x_2)$ necesariamente debe ser $x_1 = x_2$.

Hay funciones inyectivas que no son monótonas. Por ejemplo el siguiente gráfico representa una función inyectiva que no es creciente ni decreciente en **R**.

➔



Observemos que en este caso, la función no es continua.

En particular si la función $f:(a, b) \to (c, d)$ es inyectiva y continua, entonces es estrictamente monótona.

Una consecuencia inmediata es que su función inversa también es monótona.

Ejemplo 12

Dadas las siguientes funciones biyectivas determinar f^{-1} y decidir si crecen o decrecen

i) $f: R \to R$ $\quad f(x) = 3x + 2$

ii) $f:(-\infty, 0] \to [-1, +\infty)$ $\quad f(x) = 4x^2 - 1$

Solución

i) La función f es la del ejemplo 11. Como es lineal podemos determinar que es creciente estrictamente ya que su pendiente 3 es positiva. Calculamos su función inversa en el ejemplo 8 y obtuvimos

$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3} = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

La función inversa también es lineal y de pendiente positiva ($\frac{1}{3}$). Por lo tanto también es creciente .

ii) En el ejemplo 11 vimos que la función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0]$ En el ejemplo 10 calculamos su inversa y obtuvimos

$$f^{-1}(x) = -\frac{\sqrt{x+1}}{2}$$

Esta función es decreciente. En efecto: si $x_2 > x_1$ debemos probar que $f^{-1}(x_1) > f^{-1}(x_2)$. Veamos pues:

$$f^{-1}(x_1) > f^{-1}(x_2) \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{x_1+1}}{2} > -\frac{\sqrt{x_2+1}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x_1+1} < \sqrt{x_2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

Luego f es decreciente.

En general vale que la inversa de una función creciente es creciente y que la inversa de una función decreciente es decreciente. Es decir si $f: A \to B$ es biyectiva vale lo siguiente:

$$f \text{ es creciente} \Rightarrow f^{-1} \text{ es creciente}$$
$$f \text{ es decreciente} \Rightarrow f^{-1} \text{ es decreciente}$$

ASINTOTAS

Uno de los objetivos del curso es el de adquirir un bagaje mínimo de herramientas que nos permitan "dibujar" el gráfico de una función con bastante precisión. En el Capítulo de *Derivadas* desplegaremos una serie de recursos que nos permitirán lograr esto con éxito. Sin embargo, sin más herramientas que las que ya tenemos, podemos hacer algunos avances al respecto.

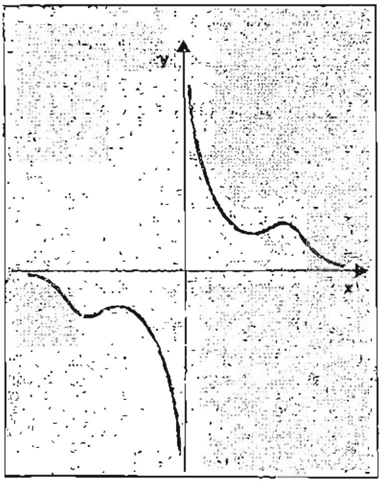
Ejemplo 13

Representar el gráfico de una función que cumpla las siguientes condiciones

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$f(x) > 0$ si $x > 0$ $\qquad f(x) < 0$ si $x < 0$



Solución

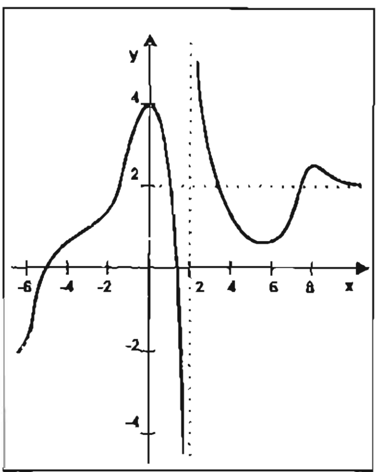
La expresión $x \to 0^-$ significa que x se acerca a 0 por la izquierda y la expresión $x \to 0^+$ significa que x se acerca a 0 por la derecha. Así, la expresión

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

se lee: "f tiende a más infinito cuando x tiende a 0 por la derecha" y significa que cuando x toma valores cercanos a 0 por la derecha, la función toma valores positivos muy grandes. En forma similar, la expresión

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

se lee "f tiende a 0 cuando x tiende a más infinito" y significa que cuando x toma valores positivos muy grandes, $f(x)$ toma valores cercanos a 0.
Hay muchas funciones que cumplen todos estos requisitos. Una de ellas es ←



Ejemplo 14

Representar el gráfico de una función que cumpla las siguientes condiciones

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

$f(0) = 4$ $\qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$f(-5) = f(\frac{3}{2}) = 0$ $\qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

Solución

Es similar al anterior. Hay que traducir la información gráficamente ←

Ejemplo 15

Estudiar el comportamiento cerca del origen de la función $f(x) = \frac{1}{x}$.

Solución

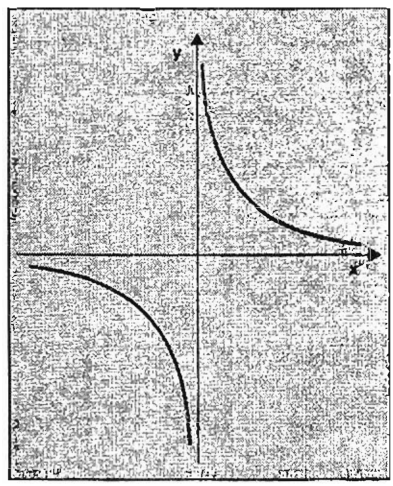
Hagamos una tabla de valores de f con valores de x "cercanos" a 0, tanto positivos (por derecha), como negativos (por la izquierda). El cero no pertenece al dominio de la función. ➔

x	$\frac{1}{x}$
-1	-1
-0.1	-10
-0.01	-100
-0.001	-1000
-0.0001	-10000
0.0001	10000
0.001	1000
0.01	100
0.1	10
1	1

Observemos que a la izquierda del 0, cerca de él, $\frac{1}{x}$ toma valores negativos, muy grandes en valor absoluto; y, a la derecha del 0, cerca de él, $\frac{1}{x}$ toma valores muy grandes y positivos. En términos de límite decimos que

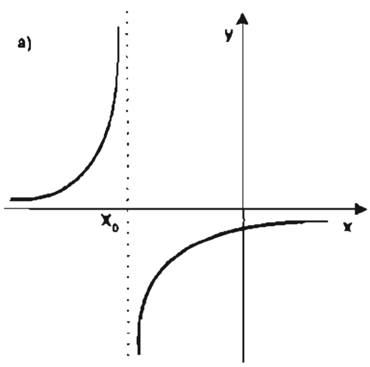
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

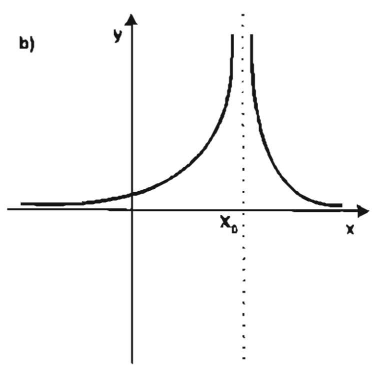
El gráfico de la función tiene el siguiente aspecto ➔



Ejemplo 16

Analizar el comportamiento cerca del punto x_0 de las funciones cuyo gráfico se da a continuación.





Solución

a) Cuando x se acerca a x_0 por la izquierda, $f(x)$ toma valores positivos cada vez más grandes en valor absoluto. Es decir

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$$

Cuando x se acerca a x_0 por la derecha, $f(x)$ toma valores negativos cada vez más grandes en valor absoluto. Es decir

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

b) En este caso

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Asíntotas verticales

En general si f es una función tal que

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

se dan ambas circunstancias simultáneamente, se dice que la recta de ecuación $x = x_0$ es una **asíntota vertical** para f.

Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{1}{x}$ (Ejemplo 15) tiene en $x = 0$ una asíntota vertical. De la misma manera, las funciones del Ejemplo 16 tienen en $x = x_0$ una asíntota vertical (con el x_0 que corresponden en cada caso).

Las asíntotas verticales pueden presentarse cuando la función f es de la forma $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ con g y h continuas en y tales que $g(x_0) \neq 0$ y $h(x_0) = 0$.
Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 17

Analizar la existencia de asíntotas verticales de

a) $f(x) = \dfrac{5x + 1}{2x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(x + 1)^2}$

c) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \geq -2 \\ \dfrac{x}{x + 2} & \text{si } x < -2 \end{cases}$

Solución

a) $f(x) = \dfrac{5x + 1}{2x - 1}$

f está definida en R - $(\frac{1}{2})$. Analicemos su comportamiento al acercarnos a $\frac{1}{2}$: el numerador, $5x + 1$, tendrá valores cercanos a $5.(\frac{1}{2}) + 1 = 3.5$ y el denominador, $2x - 1 = 2.(x - \frac{1}{2})$, tomará valores cercanos a cero. En efecto: Cuando x se acerca a $\frac{1}{2}$ por la izquierda ($x \to (\frac{1}{2})^-$), $2(x - \frac{1}{2})$ se hace negativo y muy pequeño. Por lo tanto, $f(x) = \dfrac{5x + 1}{2x - 1}$ tomará valores negativos y muy grandes en valor absoluto (tanto como se quiera, con acercarnos suficientemente).

$$\lim_{x \to (\frac{1}{2})^-} \frac{5x + 1}{2x - 1} = -\infty$$

Cuando x se acerca a $\frac{1}{2}$ por la derecha ($x \to (\frac{1}{2})^+$), $2(x - \frac{1}{2})$ es positivo y muy pequeño. Por lo tanto, $f(x) = \dfrac{5x+1}{2x-1}$ tomará valores positivos y muy grandes (tanto como se quiera, con acercarnos suficientemente). Es decir:

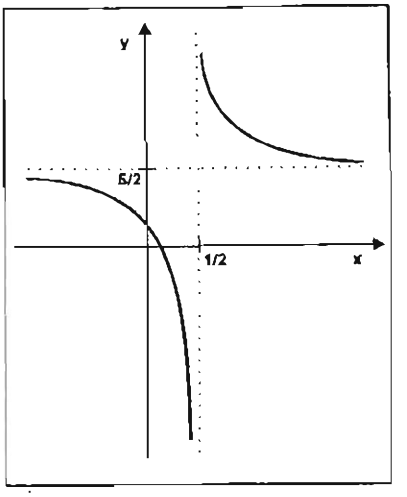
$$\lim_{x \to (\frac{1}{2})^+} \frac{5x+1}{2x-1} = +\infty$$

Luego la recta de ecuación $x = \dfrac{1}{2}$ es una asíntota vertical para f.

El gráfico de f se obtiene teniendo en cuenta que

$$f(x) = \frac{5x+1}{2x-1} = \frac{\frac{5}{2}(2x-1) + 1 + \frac{5}{2}}{2x-1} = \frac{5}{2} + \frac{\frac{7}{2}}{2(x-\frac{1}{2})} = \frac{5}{2} + \frac{\frac{7}{4}}{x-\frac{1}{2}}$$

➔



b) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ dom $f = \mathbf{R} - \{-1\}$

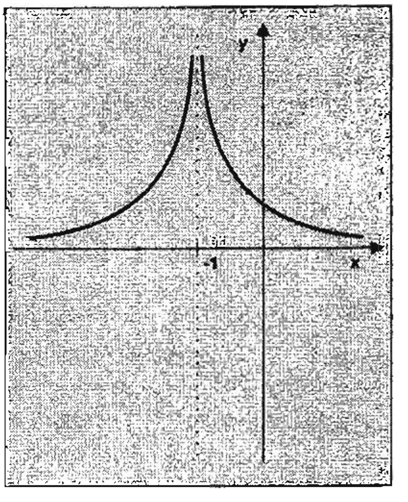
Estudiaremos qué ocurre con f al acercarnos a -1:

$(x+1)^2$ toma valores positivos cercanos a 0

Por lo tanto

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty = \lim_{x \to -1^+} f(x)$$

y la recta de ecuación $x = -1$ es asíntota vertical para f. ➔



c) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \geq -2 \\ \dfrac{x}{x+2} & \text{si } x < -2 \end{cases}$

Aunque f está definida en todo **R**, tiene la particularidad de que, a la izquierda de -2, los valores de f se calculan por una fórmula que tiene problemas en -2.

Por la derecha de -2, no hay inconvenientes:

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (x+3) = 1 = f(-2)$$

Por la izquierda de -2, f toma valores positivos, tan grandes como se quiera con acercarnos suficientemente a -2, porque allí, el numerador de

$$\frac{x}{x+2}$$

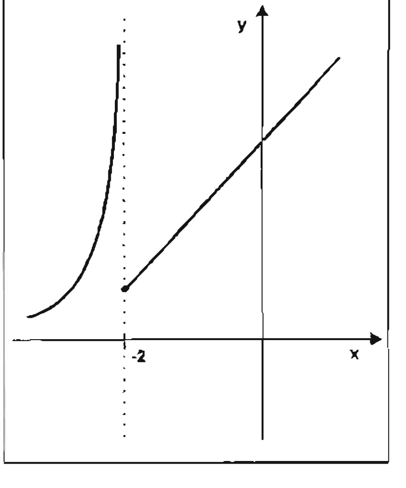
es negativo y parecido a -2, y su denominador es negativo y tan pequeño como se desee. Resulta que

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$$

y concluimos que la recta $x = -2$ es asíntota vertical para f.

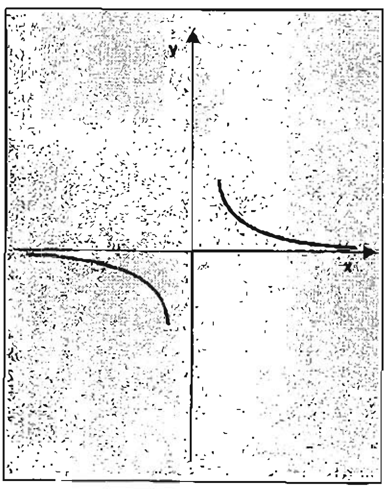
Esquemáticamente

➔



Asíntotas horizontales

x	$\frac{1}{x}$
10^2	0.01
10^4	0.0001
10^6	0.000001
10^9	0.0 1
-10^2	-0.01
-10^4	-0.0001
-10^6	-0.000001
-10^9	-0.0 1



Ejemplo 18

Estudiar el comportamiento en el infinito de la función $f(x) = \frac{1}{x}$

Solución

Debemos estudiar el comportamiento de $f(x)$ para valores de x muy grandes en valor absoluto. Hacemos una tabla de valores

←

Observemos que para valores positivos de x, suficientemente grandes, los valores de $\frac{1}{x}$ son positivos y tan cercanos a 0 como se desee. Decimos que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

De la misma manera, para valores negativos de x, suficientemente grandes en valor absoluto, los valores de $\frac{1}{x}$ son negativos y tan cercanos a 0 como se desee. Decimos que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

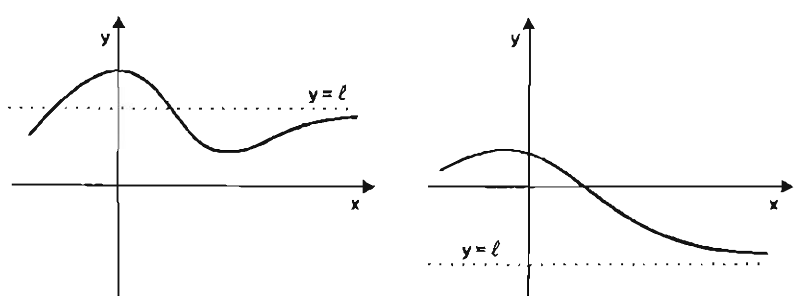
←

En general, si al tomar valores positivos suficientemente grandes de x los valores de $f(x)$ se aproximan tanto como se desee a cierto número ℓ, escribimos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

(y leemos *el límite cuando x tiende a más infinito de f de x es ℓ*).

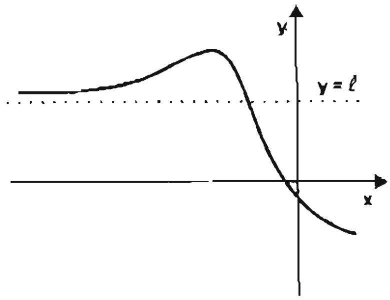
Cuando esto ocurre, a medida que nos alejamos hacia la derecha, el gráfico de f se aproxima cada vez más a la recta horizontal de ecuación $y = \ell$

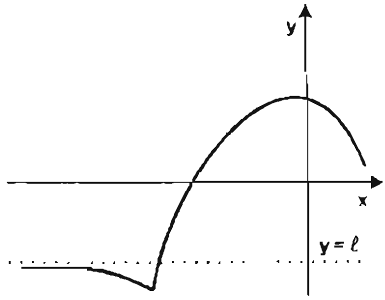


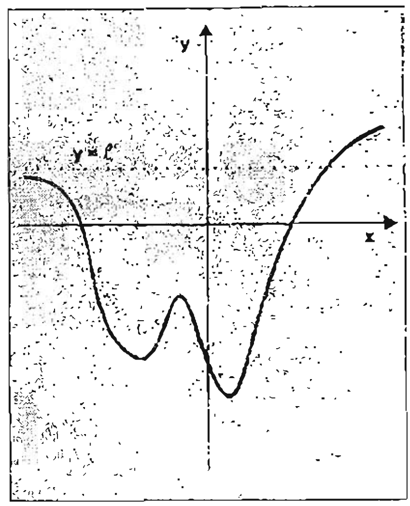
Se dice que la recta $y = \ell$ es asíntota horizontal por la derecha para f si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

Si el signo de $\ell - f(x)$ se mantiene para x grande, puede decidirse si el gráfico se "pega" por abajo o por arriba a la asíntota.







Análogamente, si los valores de f se acercan tanto como se desee a un valor fijo ℓ con tomar valores de x negativos, suficientemente grandes en valor absoluto, pondremos que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

(*el límite cuando x tiende a menos infinito de f de x es ℓ*) y diremos que la recta de ecuación $y = \ell$ es asíntota horizontal por la izquierda para f. ➔

Una función puede no tener asíntotas horizontales, tenerlas sólo a la izquierda o sólo a la derecha, o tenerlas a ambos lados. En este último caso, si las asíntotas horizontales por la izquierda y por la derecha coinciden, diremos que tal recta es asíntota horizontal (a secas) para f.

Ejemplo 19

Para las siguientes funciones, analizar la existencia de asíntotas horizontales. Obtener esquemáticamente el gráfico de f para x grande en valor absoluto.

a) $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{3 + 2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Solución

a) Cuando $x \to +\infty$, hay que estudiar los valores de $(2 - \dfrac{1}{x})$:
Cuando x es grande y positivo, $\dfrac{1}{x}$ es pequeño y positivo y por esto, $(2 - \dfrac{1}{x})$ será mayor que 2 y se acercará tanto como se quiera a él, al tomar x apropiadamente grande. Es decir:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2 - \frac{1}{x}) = 2$$

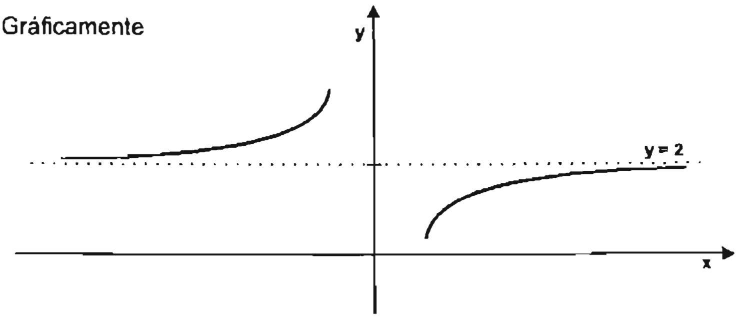
La recta de ecuación $y = 2$ es asíntota horizontal por la derecha para f.
En forma análoga se concluye que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2 - \frac{1}{x}) = 2$$

Además, se observa que $(2 - \frac{1}{x})$ es mayor que 2.

La recta de ecuación y = 2 es asíntota horizontal por la izquierda para f.

Gráficamente



b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{3 + 2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Cuando $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Por lo tanto, la recta y = 0 es asíntota horizontal por la izquierda para f.

Cuando $x \to +\infty$ los valores de $f(x)$ son los de $\frac{x}{3 + 2x}$

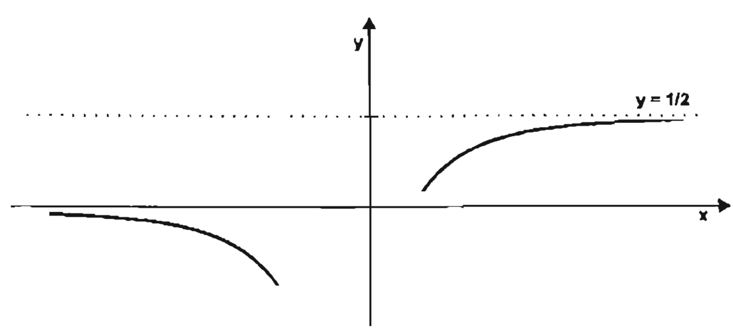
Sacando x como factor del numerador y del denominador, obtenemos:

$$\frac{x}{3 + 2x} = \frac{x}{x(\frac{3}{x} + 2)} \underset{x \neq 0}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{\frac{3}{x} + 2}$$

Cuando x crece, $\frac{3}{x} + 2$ se parece a 2 (es siempre mayor que él) y por esto, su inverso $\frac{1}{\frac{3}{x} + 2}$ será parecido a $\frac{1}{2}$ (y menor que él: para convencerse, dé valores grandes a x). Por lo tanto:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{3}{x} + 2} = \frac{1}{2}$$

y la recta $y = \frac{1}{2}$ es asíntota por la derecha para f.



Capítulo VI

Funciones Trigonométricas

Introducción

El origen de la trigonometría data de hace más de 2000 años, cuando los griegos necesitaron métodos precisos para medir ángulos y lados de triángulos. En la actualidad el interés de las funciones trigonométricas radica en la posibilidad de modelar cualquier "fenómeno periódico" a través de ellas. Ejemplos de estos fenómenos son: el día y la noche, las olas del mar, los latidos del corazón, el movimiento de una cuerda de la guitarra, la luz, la corriente alterna, los rayos x, las ondas electromagnéticas, etc.

La rama de la matemática que se ocupa de estos temas es el análisis armónico. En la práctica se utiliza de múltiples formas en la radio, la televisión, el radar, el microscopio electrónico, los más modernos instrumentos de exploración del cuerpo humano, del espacio y del átomo.

En estas notas definimos las funciones trigonométricas para los números reales, basándonos en la circunferencia unitaria. Prescindiremos en nuestra presentación de los ángulos y sólo después analizaremos cómo vincularlos.

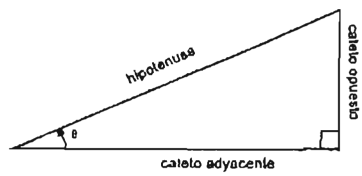
El considerar las funciones trigonométricas con dominio en conjuntos numéricos (y no en conjuntos de ángulos) nos habilita a usar las herramientas del cálculo para tratarlas.

Es conocida la definición de las funciones trigonométricas a partir de los ángulos de triángulos. En la figura recordamos estas definiciones. No las olvide.

Si θ es un ángulo agudo, es:

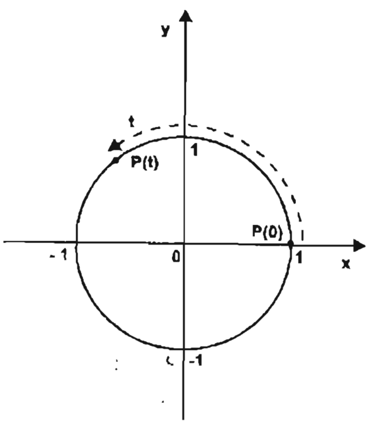
$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

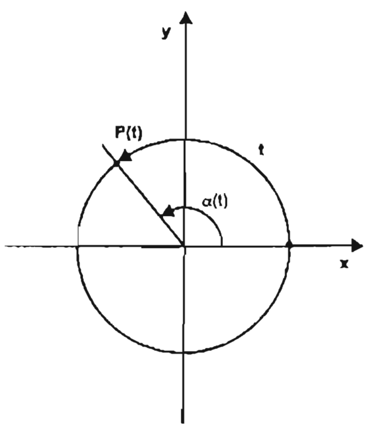
$$\cos \theta = \frac{\text{cat. adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$



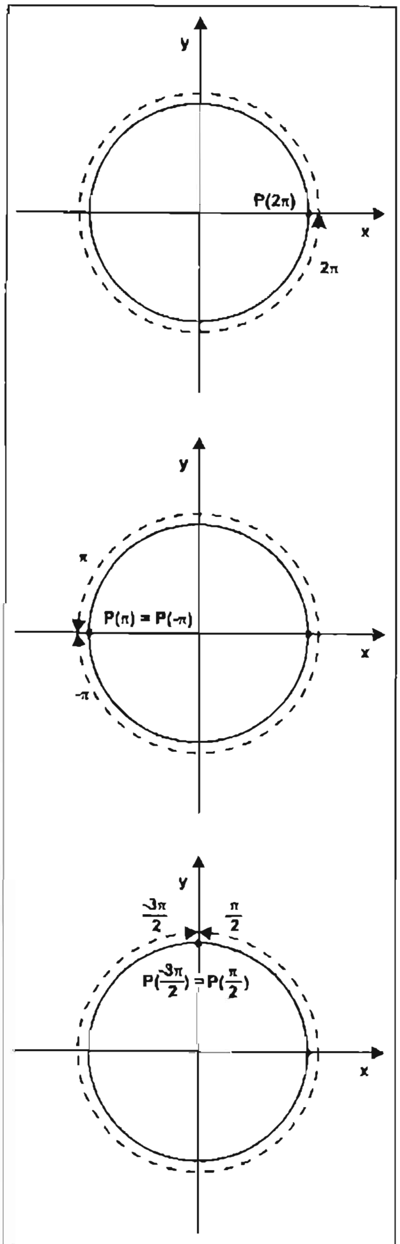
Consideremos la circunferencia S de centro (0 , 0) y radio r = 1, y llamemos P(t), para cualquier número t, al punto al que se llega recorriendo sobre S, a partir del punto (1 , 0), una longitud de arco igual a | t |,

en sentido positivo (antihorario) si $t \geq 0$
en sentido negativo (horario) si $t < 0$





Notemos que queda determinado un ángulo centrado en el origen que tiene por lados al semieje positivo de las x y a la semirrecta que empieza en el origen y pasa por P(t).



Ubiquemos P(t) para algunos valores de t, para familiarizarnos con su definición. Recordemos, al efecto, que como el radio de la circunferencia S es 1, su longitud total es 2π.

i) Para $t = 0$, nos quedamos en el punto (1 , 0). Es, por tanto, P(0) = (1 , 0).

ii) Si $t = \frac{\pi}{2}$, recorremos un cuarto de circunferencia, en sentido positivo. Es, por tanto, $P(\frac{\pi}{2}) = (0 , 1)$.

iii) Si $t = -\frac{\pi}{2}$, recorremos también un cuarto de circunferencia, pero en sentido negativo. Es $P(-\frac{\pi}{2}) = (0 , -1)$.

iv) Si $t = \pi$, tenemos que recorrer media circunferencia, en sentido positivo. Así es que llegamos al (-1 , 0). Cuando $t = -\pi$, también hay que recorrer media circunferencia, pero en el otro sentido. Nuevamente quedamos ubicados en el (-1 , 0). Por esto, es $P(\pi) = P(-\pi) = (-1 , 0)$.

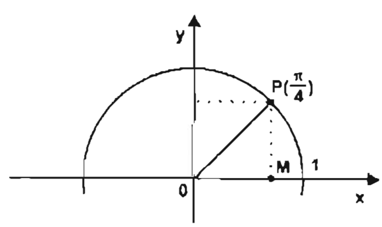
v) Si $t = 2\pi$, debemos dar una vuelta completa a la circunferencia, y volvemos al punto de partida; $P(2\pi) = P(0) = (1 , 0)$.

vi) Si $t = \frac{5\pi}{2}$, como $\frac{5\pi}{2} > 2\pi$, concretamente $\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$, hay que dar, en sentido antihorario, una vuelta completa a S, y un cuarto más. Resulta $P(\frac{5\pi}{2}) = (0 , 1)$.

←

vii) Con un poco más de trabajo, podemos caracterizar $P(\frac{\pi}{4})$: $\frac{\pi}{4}$ es un octavo de 2π, por lo que $P(\frac{\pi}{4})$ se encuentra en la mitad del primer cuarto de S.
Del análisis de la figura queda claro que el triángulo OMP es rectángulo en M e isósceles; por lo tanto, es $x = y$.
Como además el punto $P(\frac{\pi}{4}) = (x , y)$ está en S, se tiene que

$$x^2 + y^2 = 1 \iff x^2 + x^2 = 1 \iff x^2 = \frac{1}{2}$$



Como $x > 0$, $x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, así es que:

$$P(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2})$$

Observemos que para cada valor de t en el intervalo $[0 , 2\pi]$, existe uno y sólo un punto P en S tal que $P = P(t)$, pero en general, diferentes valores de t pueden definir el mismo punto P(t) en S: ya hemos visto que $P(2\pi) = P(0)$, que $P(\pi) = P(-\pi)$ y que $P(\frac{5\pi}{2}) = P(\frac{\pi}{2})$.

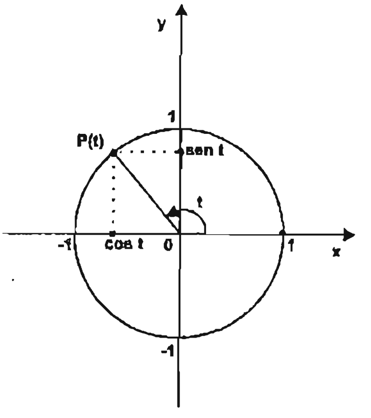
Observación I
Con mayor precisión, puede decirse que siempre que dos números reales t y t' difieran en un múltiplo de 2π ($t' = t + k2\pi$, $k \in Z$), sus correspondientes P(t) y P(t') coincidirán (para llegar hasta P(t'), hay que llegar hasta P(t) y dar | k | vueltas alrededor de S). Vale la recíproca.

$$P(t) = P(t') \Leftrightarrow t' = t + k2\pi \text{ , para algún } k \in Z$$

O O O Definición de seno y coseno

Estamos ya en condiciones de presentar las funciones reales seno y coseno

$$\cos: R \to R \quad y \quad \text{sen}: R \to R$$



Dado $t \in R$, si $P(t) = (x , y)$, es: $\cos t = x$
$\text{sen } t = y$

Es decir, para cada t, coseno de t y seno de t son, respectivamente, abscisa y ordenada del punto P(t):

$$P(t) = (\cos t , \text{sen } t)$$ →

Como $P(t) = (\cos t , \text{sen } t)$ pertenece a S, sus coordenadas cumplen la ecuación de S, de donde se sigue la llamada relación Pitagórica

$$\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$$

Si $t \in R$ es tal que las coordenadas de P(t) pueden calcularse, los valores del coseno y del seno de t se obtienen inspeccionando su abscisa y su ordenada, respectivamente. Retomando los valores de t para los que anteriormente ubicamos P(t), calculamos su seno y su coseno:

i) Como $P(0) = (1 , 0)$ es $\text{sen } 0 = 0$; $\cos 0 = 1$

ii) Como $P(\frac{\pi}{2}) = (0 , 1)$, es $\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$; $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

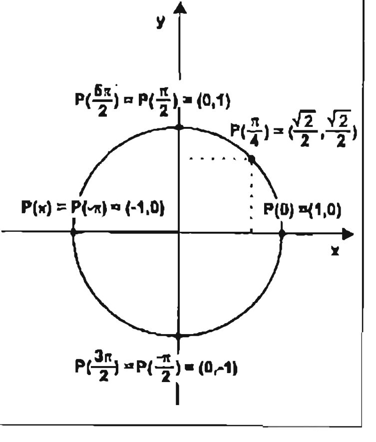
iii) Como $P(-\frac{\pi}{2}) = (0 , -1)$, es $\text{sen } (-\frac{\pi}{2}) = -1$; $\cos (-\frac{\pi}{2}) = 0$

iv) Por ser $P(\pi) = P(-\pi) = (-1 , 0)$, resulta que $\cos \pi = \cos (-\pi) = -1$
$\text{sen } \pi = \text{sen } (-\pi) = 0$

v) Es $P(2\pi) = P(0) = (1 , 0)$, por lo que $\cos 2\pi = \cos 0 = 1$
$\text{sen } 2\pi = \text{sen } 0 = 0$

vi) Como $P(\frac{5\pi}{2}) = P(\frac{\pi}{2}) = (0 , 1)$,es $\cos (\frac{5\pi}{2}) = \cos (\frac{\pi}{2}) = 0$
$\text{sen } (\frac{5\pi}{2}) = \text{sen } (\frac{\pi}{2}) = 1$

vii) Como $P(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2})$, es $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



→

Observación II

Notemos, en general, que si dos números reales t y t' son tales que P(t) = P(t'), debe ser sen t = sen t' y cos t = cos t'. Juntando este hecho con el contenido de la **observación I**, queda claro que:

Si dos números reales t y t' difieren en un múltiplo entero de 2π ($t' = t + k2\pi$, $k \in Z$), entonces

$$\text{sen } t = \text{sen } t' \quad \text{y} \quad \cos t = \cos t'$$

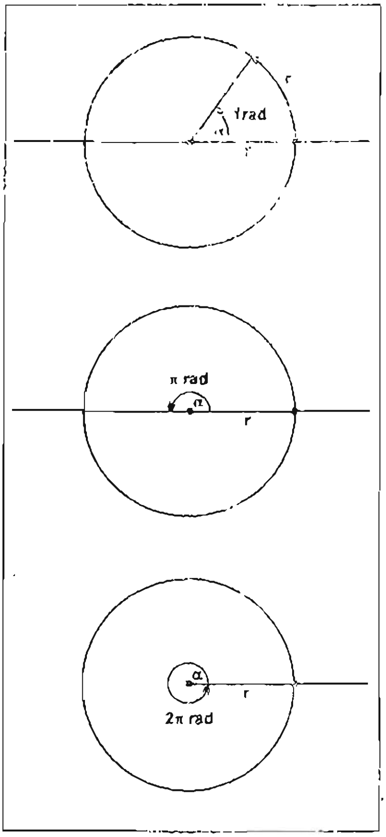
Por ello se dice que seno y coseno son funciones periódicas, de perlodo 2π. Más adelante volveremos sobre este hecho.

Recíprocamente, si coinciden los valores del seno y del coseno de los números reales t y t', existe $k \in \mathbf{Z}$ tal que $t' = t + k2\pi$.

¿Y los ángulos?

Si antes de leer estas notas el lector ha tenido algún contacto con la trigonometría, es posible que recuerde expresiones como sen 30° = $\frac{1}{2}$, o cos 0° = 1, y que tenga, en cada caso, la sensación de estar refiriéndose al valor del seno del ángulo que mide 30°, o al valor del coseno del ángulo que mide 0°.

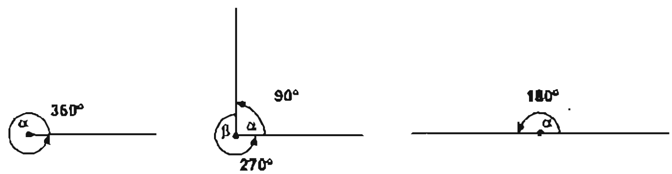
Pues bien; estas nociones pueden recuperarse naturalmente de las que hemos introducido en nuestra presentación de las funciones trigonométricas, y los comentarios que a continuación hacemos, pretenden echar luz sobre esta cuestión.



Aunque los ángulos son objetos geométricos, los números se conectan con ellos cuando medimos su abertura. La unidad de medida de ángulos más conocida es el grado sexagesimal, y le sigue en popularidad el radián. Recordemos sus definiciones:

Un ángulo mide un grado (1°) si es la noventa-ava ($\frac{1}{90}$) parte de un ángulo recto.

Así, un ángulo recto mide 90°, un ángulo llano mide 180°, y en general, la abertura de cualquier ángulo mide entre 0° y 360°.



El sistema de medida de ángulos cuya unidad es el radián, se inspira en la proporcionalidad que existe, en toda circunferencia, entre la abertura de un ángulo central y la longitud del arco que dicho ángulo subtiende sobre la circunferencia:

Mide un radián, aquel ángulo que, centrado en cualquier circunferencia, subtiende sobre ésta un arco cuya longitud coincide con la del radio de la circunferencia:

←

En general, la medida de un ángulo (central) en radianes, se obtiene como

$$\frac{\text{longitud del arco que el ángulo subtiende sobre C}}{\text{radio de C}}$$

Como la longitud de la circunferencia de radio r es $2\pi r$, ésta sería la mayor longitud posible para un arco, así es que un ángulo puede medir, a lo sumo, $\frac{2\pi r}{r}$ radianes, es decir, 2π radianes.

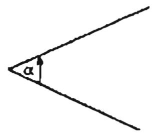
Notemos que un ángulo llano mide π radianes, y un ángulo recto $\frac{\pi}{2}$ radianes.

Para pasar de un sistema de medida de ángulos al otro, se usa que:

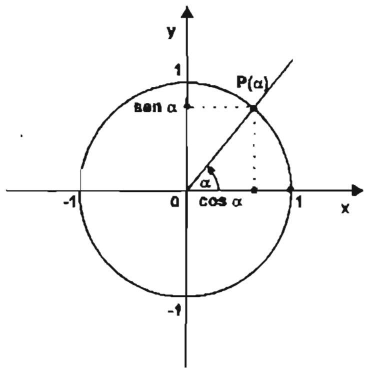
1 radián = $\frac{180}{\pi}$ grados y que 1 grado = $\frac{\pi}{180}$ radianes.

Así, un ángulo de x^{o} mide $\frac{\pi}{180}$ x radianes,

y un ángulo de x radianes mide $\frac{180}{\pi}$ x grados.



La clave para ligar nuestra presentación con la clásica, está en que, elegido un sistema de coordenadas cartesianas, cada ángulo α del plano puede representarse con vértice en el origen y un lado coincidente con el semieje positivo de las x, de forma tal que el interior del ángulo se recorra desde allí en sentido antihorario. Si S es, como antes, la circunferencia unitaria, el otro lado del ángulo determina, por intersección con S, el punto P(α): ➔

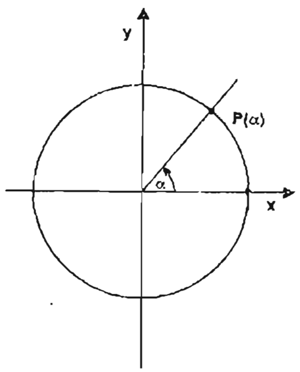


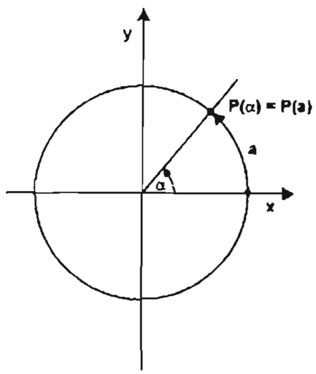
En la presentación clásica, las coordenadas de dicho punto son, respectivamente, coseno del ángulo α y seno del ángulo α. Para relacionarlo con nuestra definición, no hay más que medir el ángulo α en radianes:

En efecto: si el ángulo α mide a radianes, como S tiene radio 1, el arco que α subtiende sobre S tiene longitud a, y resulta que P(α) coincide con el punto P(a) = (cos a , sen a) que usamos para definir las funciones trigonométricas. Resulta entonces que, si α mide a radianes, el valor del coseno del ángulo α coincide con el valor de "nuestra" función coseno en el número real a, y que el valor del seno del ángulo α coincide con el de la función real seno en el número real a.

Es decir

coseno de α = cos a y seno de α = sen a





Las funciones trigonométricas en las calculadoras

Las calculadoras tienen incorporadas las funciones trigonométricas. Para obtener los valores de, por ejemplo, sen a ó cos b, donde a y b son números reales, hay que operar la calculadora en el modo **RAD** . Todas las cifras que aparecen son exactas.

Hay que estar alertas, porque estas máquinas tienen otros modos para interpretar las teclas trigonométricas, a saber, modo **DEG** y modo **GRAD** (este último puede faltar).

Cuando la calculadora está en **DEG**, y calculamos sin x, con $0 \le x \le 360$, nos entrega el valor del seno del ángulo que mide x grados sexagesimales. En realidad, esté x o no en ese rango, siempre es cierto que nos da el valor de la función real seno en el número $(\frac{180}{\pi}x)$

En el modo **GRAD** , toma nuestro dato como medida de un ángulo en grados centesimales (1 ángulo recto mide 100 de estos grados). En verdad, si el dato no está entre 0 y 400, esa interpretación no es aplicable: la calculadora arroja el valor de la función real seno en el número $(\frac{\pi}{400}x)$

Ejemplo 1

Obtener con una calculadora, operando en los diferentes modos, los valores de sen $\frac{\pi}{2}$; sen 30 ; cos $\frac{\pi}{2}$; cos 400.

Solución

	RAD	DEG	GRAD
sen $\frac{\pi}{6}$	0,5	0,009138395	0,008224577
sen 30	-0,988031624	0,5	0,453990499
cos $\frac{\pi}{2}$	0	0,999624216	0,9996956
cos 400	-0,525296338	0,766044443	1

Gráfico de la función seno

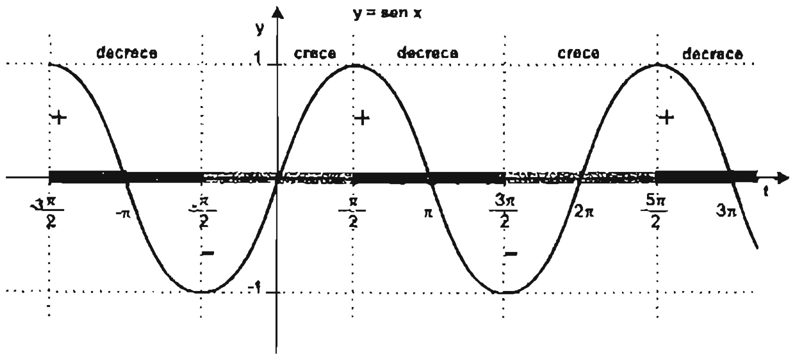
Grafiquemos la función sen: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ utilizando la circunferencia de radio 1 y la definición dada. Para ello dibujemos, con la misma escala, la circunferencia unitaria y un sistema de ejes cartesianos.

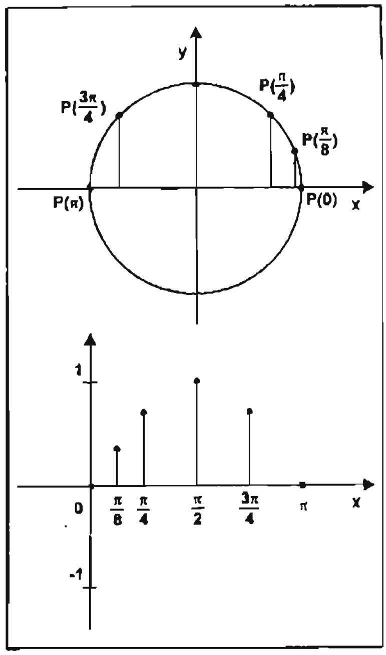
Para cada $x \in \mathbf{R}$, para obtener la ordenada del punto del gráfico (x , sen x), hay que copiar (con el compás) la ordenada del punto P(x) de S. Esto puede hacerse con alguna precisión para los x que son múltiplos enteros o fracciones de π.

→

También podemos obtener información de la calculadora: por ejemplo, es sen 1 = 0,8414...

Procediendo así con todos los puntos, llegaríamos al gráfico de la función seno:





O O O Estudio del seno

Observemos las características de la función seno

- La imagen es el intervalo [-1 , 1], ya que

  a) Cualquiera sea $t \in \mathbf{R}$, el punto P(t) = (cos t , sen t) pertenece a la circunferencia de radio 1, por lo tanto su ordenada verifica $-1 \leq \text{sen}\, t \leq 1$.

  b) Cualquiera sea $b \in [-1 , 1]$, existe al menos un punto P(t) en la circunferencia de radio 1 tal que P(t) = (x , b). Para este t, es sen t = b.
  Como ya hemos comentado, las funciones seno y coseno repiten sus valores cada 2π. Decimos que 2π es el período de la función.
  Si la variable es el tiempo, en cualquier lapso que dure un período, estas funciones completan un ciclo. El gráfico de la función describe una onda completa en un período y repite esta onda a izquierda y a derecha.

Localicemos los máximos y los mínimos locales de la función seno, sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento, sus ceros y conjuntos de positividad y de negatividad.

La periodicidad de la función, nos permite reducir el análisis al intervalo $[0 , 2\pi)$. Observando la circunferencia, podemos afirmar que:

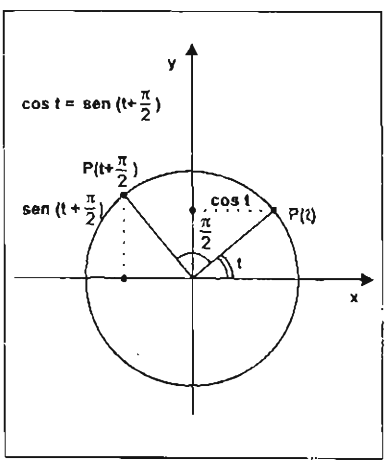
- el valor máximo del seno es 1, y se alcanza en $t = \frac{\pi}{2}$
- el valor mínimo es -1 y se alcanza en $t = \frac{3\pi}{2}$
- es creciente en $[0 , \frac{\pi}{2}]$ y en $[\frac{3\pi}{2} , 2\pi]$

- es decreciente en $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ (entre el máximo y el mínimo)
- sen t = 0 sólo para t = 0 y para t = π
- el seno es positivo para $0 < t < \pi$ (primero y segundo cuadrantes), y es negativo para $\pi < t < 2\pi$ (tercero y cuarto cuadrantes)

Extendiendo estas observaciones por periodicidad, concluimos que la función seno:

- tiene máximos en $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, con k entero
- tiene mínimos en $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, con k entero
- crece en los intervalos que van de un mínimo al máximo más próximo, que tienen la forma $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, con k entero.
- decrece en los intervalos que van de un máximo al mínimo más próximo, que son: $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, con k entero.
- tiene sus ceros en los puntos que pueden escribirse como $0 + 2k\pi$ ó $\pi + 2k\pi$, que sintéticamente pueden describirse como los de la forma $k\pi$, con k entero.
- es positiva en $\ldots \cup (-4\pi, -3\pi) \cup (-2\pi, -\pi) \cup (0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup (4\pi, 5\pi)\ldots$ o sea, en la unión de los intervalos $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, con k entero.
- es negativa en $\ldots \cup (-3\pi, -2\pi) \cup (-\pi, 0) \cup (\pi, 2\pi) \cup (3\pi, 4\pi) \cup\ldots$ que es la unión de los intervalos $((2k-1)\pi, 2k\pi)$, con k entero.

Estudio de la función coseno

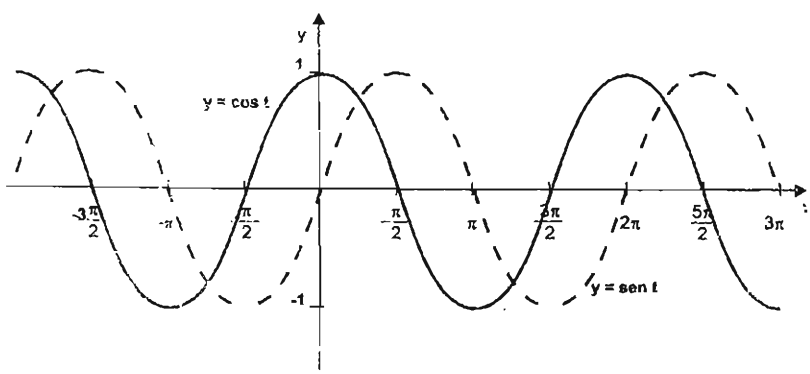


Una sencilla observación nos simplificará el análisis de la función coseno. Es

$$\cos t = \text{sen}\,(t + \frac{\pi}{2})$$

←

Entonces el gráfico del coseno resulta de correr $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda el gráfico del seno:



Adaptando la información que tenemos sobre el seno, concluimos que la función coseno:

- tiene como imagen al [-1 , 1]
- tiene sus máximos en: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi$, con k entero
- tiene sus mínimos en: $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi - \frac{\pi}{2} = (2k+1)\pi$, con k entero
- es creciente en $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \frac{\pi}{2})$, con k entero, o sea, en $((2k-1)\pi, 2k\pi)$, con k entero.
- es decreciente en: $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi - \frac{\pi}{2})$, con k entero, o sea, en $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, con k entero.
- se anula en: $-\frac{\pi}{2} + k\pi$, con k entero.
- es positiva en la unión de los intervalos $(2k\pi - \frac{\pi}{2}, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2})$, con k entero.
- es negativa en la unión de los intervalos $((2k-1)\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi - \frac{\pi}{2})$, con k entero.

Las funciones sen: R → [-1 , 1] y cos: R → [-1 , 1] son continuas en todo su dominio.

○○○ Inversa del seno y del coseno

Como ocurre con otras funciones, aparece en las aplicaciones la necesidad de resolver ecuaciones del tipo:

$$\cos x = a \quad \text{ó} \quad \text{sen } x = b$$

Para que exista solución, a y b deben estar entre -1 y 1, y si esto es así, existen infinitas soluciones en toda la recta.

Con más precisión: Cuando a ó b valen 1 ó -1, existe una única solución en cualquier intervalo semiabierto de longitud 2π; y cuando a ó b están en (1 , -1), existen exactamente dos soluciones distintas en cualquier intervalo de las características antes mencionadas. Todas las otras soluciones se obtienen apelando a la periodicidad.

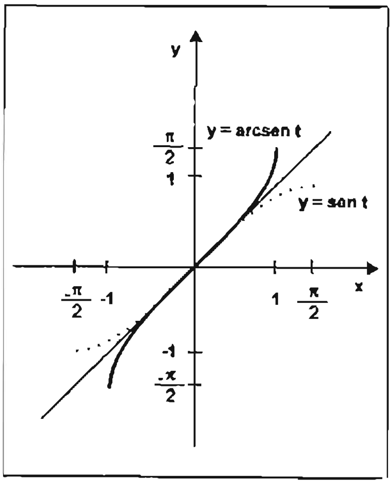
Suele ser necesario en las aplicaciones concretas, encontrar todas las soluciones que están en determinado intervalo; podría aparecer, por ejemplo, la necesidad de encontrar todas las soluciones de $\cos x = \frac{1}{3}$ en $[-2\pi, 5\pi]$.

Las funciones inversas del seno y del coseno aparecen al tratar este tipo de problemas.

La función sen: **R** → [-1 , 1] no es inyectiva. Por esto, para poder definir una función inversa, tendremos que restringir su dominio. Para conseguir que sea biyectiva bastará con que nos limitemos a cualquier intervalo entre un mínimo y un máximo (o viceversa), en que sea monótona.

Una posibilidad es elegir $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donde es creciente, y toma todos los valores entre -1 y 1.

Así, sen: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ es biyectiva. Su inversa se llama arco seno



y se nota arcsen. En consecuencia:

arcsen: $[-1\ ,\ 1] \to [-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}]$ es la función que verifica:

$$\text{arcsen}\ x = y \iff \text{sen}\ y = x$$

El gráfico de arcsen x se obtiene tomando el simétrico respecto de y = x del gráfico de sen: $[-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}] \to [1\ ,-1]$.

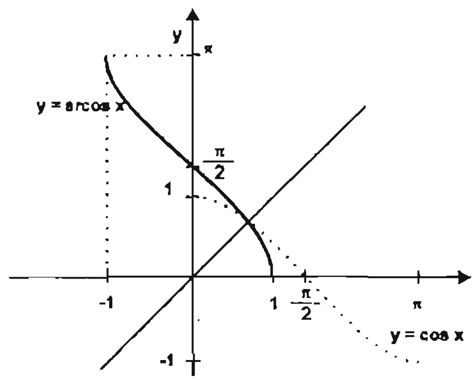
←

Análogamente, en el intervalo $[0\ ,\ \pi]$, el coseno es decreciente y toma todos los valores entre -1 y 1. Se define el arco coseno como la inversa de cos: $[0\ ,\ \pi] \to [-1\ ,\ 1]$.

Por lo tanto, arccos: $[-1\ ,\ 1] \to [0\ ,\ \pi]$, es la función que verifica:

$$\text{arccos}\ x = y \iff \cos y = x$$

A continuación damos el gráfico de arcos x construido a partir del gráfico de cos: $[-1\ ,\ 1] \to [0\ ,\ \pi]$ por simetría respecto de la recta y = x.



Estas determinaciones de arco seno y coseno, están incorporadas en las calculadoras. Operándolas en el modo **RAD**, se obtienen sus valores numéricos.

Ejemplo 2

Obtener:

a) arcsen $(\frac{\sqrt{2}}{2})$ c) arccos $(\frac{1}{3})$

b) arccos $(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ d) arcsen (-0,4)

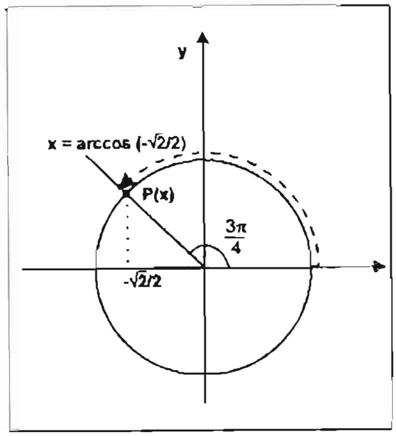
Solución

Salvo en los dos primeros casos, en los que no será necesario, usaremos la calculadora.

a) Por definición, debemos localizar $x \in (-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2})$ tal que sen $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Es $x = \frac{\pi}{4}$, pues sen $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Buscamos aquí $x \in [0, \pi]$ tal que $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ →



Como su coseno es negativo, x estará en $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Veamos quién es $P(x) = (\cos x, \text{sen } x)$. Por la relación pitagórica, es:

$$(\text{sen } x)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 1 \iff (\text{sen } x)^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \iff |\text{sen } x| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Como sen x > o, es $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Por lo tanto $P(x) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ está sobre la recta de ecuación $y = -x$. Por lo tanto, es $x = \frac{3}{4}\pi$ (sale fácil pensando en el ángulo que P(x) determina en S).

c) Con la calculadora en modo **RAD**:

$$\arccos \frac{1}{3} = \underbrace{\frac{1}{3}\ \boxed{\text{INV}}\ \boxed{\text{COS}}}_{\text{secuencia de teclas}} = 1.230959417...$$

$\arccos \frac{1}{3}$ está entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, pues su coseno es $\frac{1}{3}$, que es positivo.

d) Procediendo como antes,

$$\text{arcsen}(-0.4) = \underbrace{(-0.4)\ \boxed{\text{INV}}\ \boxed{\text{SIN}}}_{\text{secuencia de teclas}} = -0.411516846...$$

arcsen (-0.4) está en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, 0]$, pues su seno vale -0.4, que es negativo.

Ejemplo 3

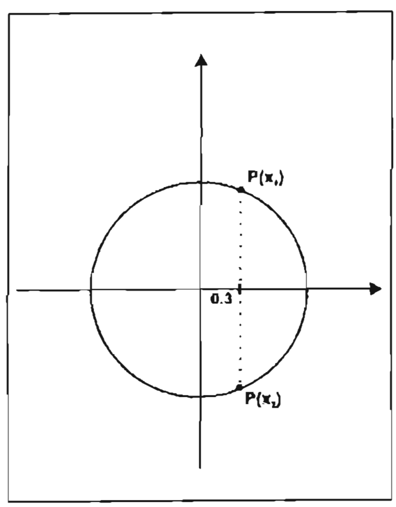
Encontrar todas las soluciones de $\cos x = 0.3$

a) en $[0, 2\pi]$

b) en $[-\frac{11}{3}, 3\pi]$

Solución

a) Esta ecuación tiene dos soluciones en $[0, 2\pi]$, x_1 y x_2:
Pensándolo en la circunferencia S, la recta vertical $x = 0.3$ corta a S en dos puntos, $P(x_1)$ y $P(x_2)$. →



Como 0.3 es positivo, $P(x_1)$ está en el primer cuadrante y $P(x_2)$ pertenece al cuarto cuadrante. Es:

$$x_1 = \arccos(0.3) \cong 1.266103673...$$
$$x_2 = 2\pi - x_1 = 2\pi - \arccos 0.3 \cong 5.017081634$$

b) Notemos que todas la soluciones de $\cos x = 0,3$ son de la forma $x = x_1 + 2k\pi$ ó $x = x_2 + 2k\pi$, con k entero y x_1 y x_2 las soluciones del inciso anterior. Ajustemos k en cada caso para que se cumpla la restricción

$$-\frac{11}{3} \leq x \leq 3\pi:$$

$$-\frac{11}{3} \leq x_1 + 2k\pi \leq 3\pi \Leftrightarrow -\frac{11}{3} - x_1 \leq 2k\pi \leq 3\pi - x_1 \Leftrightarrow \frac{-\frac{11}{3} - x_1}{2\pi} \leq k \leq \frac{3\pi - x_1}{2\pi}$$

Por lo tanto, como

$$\frac{-\frac{11}{3} - x_1}{2\pi} \cong -0{,}785074782 \quad y \quad \frac{3\pi - x_1}{2\pi} \cong 1{,}298493342$$

k puede tomar los valores 0 y 1

Haciendo lo análogo con la otra familia de soluciones,

$$-\frac{11}{3} \leq x_2 + 2k\pi \leq 3\pi \Leftrightarrow \frac{-\frac{11}{3} - x_2}{2\pi} \leq k \leq \frac{3\pi - x_2}{2\pi}$$

Como

$$\frac{-\frac{11}{3} - x_2}{2\pi} \cong -1{,}382061... \quad y \quad \frac{3\pi - x_2}{2\pi} \cong 0{,}7015066...$$

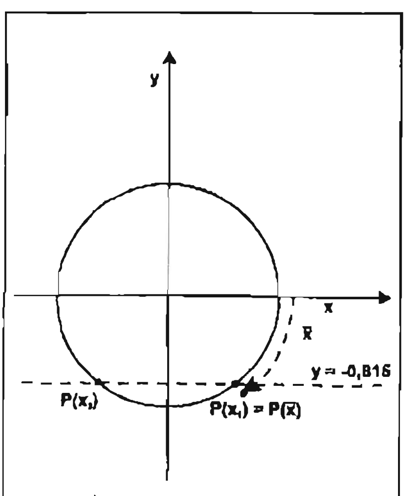
k puede valer, en este caso: -1 y 0.

Las soluciones buscadas son:

(k = 0) $s_2 = \arccos(0{,}3) \cong 1{,}266103673$
(k = 1) $s_3 = \arccos(0{,}3) + 2\pi \cong 7{,}54928898$

(k = -1) $t_1 = 2\pi - \arccos(0{,}3) - 2\pi \cong -1{,}266103673$
(k = 0) $t_2 = 2\pi - \arccos(0{,}3) \cong 5{,}017081634$

Ejemplo 4



Encontrar todos los $x \in [0, 2\pi]$ tales que sen $x = -0{,}815$

Solución

Analizando sobre S el problema, vemos que la recta horizontal de ecuación $y = -0{,}815$ corta a S en dos puntos, $P(x_1)$ y $P(x_2)$, el primero de ellos en el 4[to] cuadrante y el segundo en el 3[er] cuadrante. Los correspondientes x_1 y x_2, con $0 \leq x_1, x_2 \leq 2\pi$, son soluciones.

←

Si recurrimos al arcoseno para encontrar alguna solución, obtenemos una, $\overline{x}$, que está entre $-\frac{\pi}{2}$ y 0,

$$\overline{x} = \text{arcsen}(-0{,}815) \cong -0{,}952729195...$$

Para ella, es $P(\overline{x}) = P(x_1)$. En términos de ella, expresamos x_1 y x_2:

$$x_1 = 2\pi + \overline{x} = 2\pi + \text{arcsen}(-0{,}815) \cong 5{,}330456112$$
$$x_2 = \pi - \overline{x} = \pi - \text{arcsen}(-0{,}815) \cong 4{,}094321849$$

Observación

Cuando $\alpha > 0$, arcsen α está entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Las dos soluciones de sen $x = \alpha$, $0 \le x_1, x_2 \le 2\pi$ son, en ese caso,

$$x_1 = \text{arcsen } \alpha$$
$$x_2 = \pi - \text{arcsen } \alpha$$

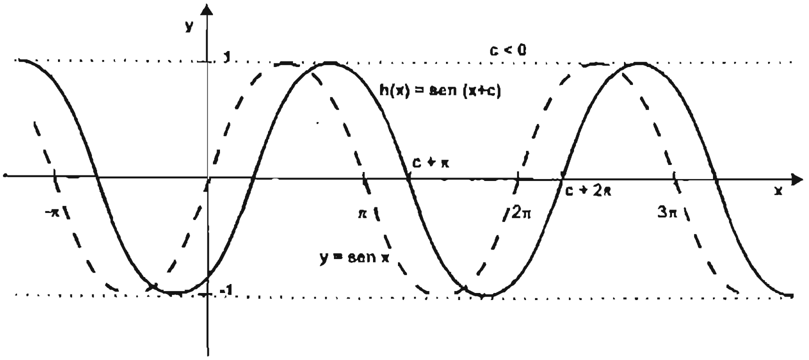
O O O Corrimientos y cambios de escala

Dijimos al comienzo de estas notas que las funciones trigonométricas son aptas para modelar fenómenos periódicos. En muchos casos un fenómeno periódico se representa por medio de la función $f(x) = a.\text{sen}(bx + c) + d$, donde a, b, c, d son números apropiados que cuantifican características del fenómeno en cuestión.

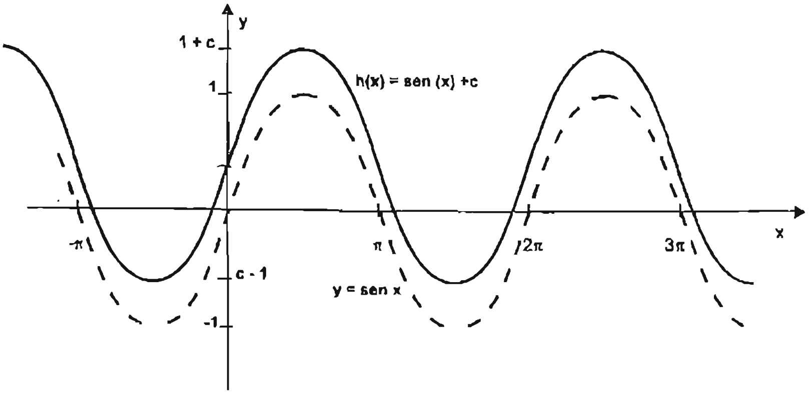
Estudiemos qué cambios se producen en el gráfico de $f(x)$ = sen x al componerla con funciones lineales. Idénticas conclusiones valen también para el coseno.

A) Sea g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x + c$.

i) Si $h(x) = (f \circ g)(x)$ = sen (x+c), esta composición produce una traslación del gráfico de f, hacia la izquierda si $c > 0$ y hacia la derecha si $c < 0$.
h es periódica, de período 2π e Im h = [-1 , 1]



ii) Si $h(x) = (g \circ f)(x)$ = sen x + c, para obtener el gráfico de h(x), basta trasladar el de la función seno, | c | unidades hacia arriba si $c > 0$ y hacia abajo si $c < 0$.
h es una función periódica de período 2π e Im h = [c-1 , c+1].



B) Para $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = a.x$

i) Estudiaremos $h(x) = (f \circ g)(x) = \text{sen } a.x$
Si $a > 1$, la composición provoca una "compresión" horizontal del gráfico.
Si $0 < a < 1$, el gráfico se "dilata" horizontalmente.
Si $a < 0$, además de dilatarse o comprimirse (según sea, respectivamente, $0 < |a| < 1$ ó $|a| > 1$), el gráfico se invierte respecto del eje y.

Esta composición mantiene la imagen: es $\text{Im } h = [-1, 1]$ pero modifica el período de T, que pasa a ser $\frac{2\pi}{|a|}$. En efecto:

Como el período del seno es 2π, si $t = ax$, se trata de ver cuál es la mínima distancia que debe existir entre x_1 y x_2 para que la distancia entre sus transformados (t_1 y t_2) sea 2π. Pero:

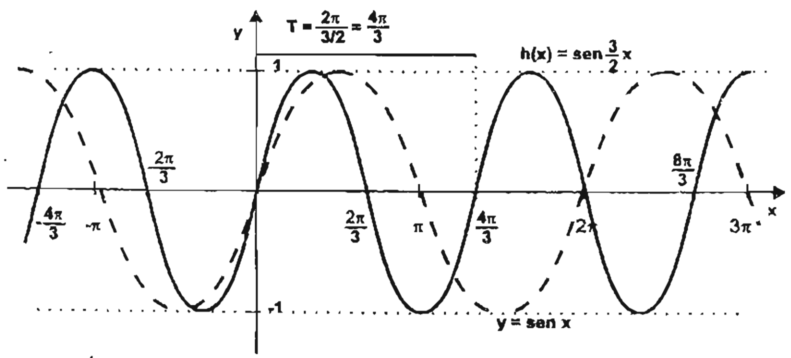
$$|t_1 - t_2| = 2\pi \Leftrightarrow |a(x_1 - x_2)| = 2\pi \Leftrightarrow |a|.|(x_1 - x_2)| = 2\pi \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = \frac{2\pi}{|a|}$$

Otro recurso válido para calcular el período de una función de este tipo, consiste en determinar para qué valores de x_1 y x_2 sus transformados toman los valores $t_1 = 0$ y $t_2 = 2\pi$. (podrían ser cualesquiera otros dos valores que estén a distancia 2π). El valor del período es la distancia entre x_1 y x_2, $|x_1 - x_2|$. En nuestro caso:

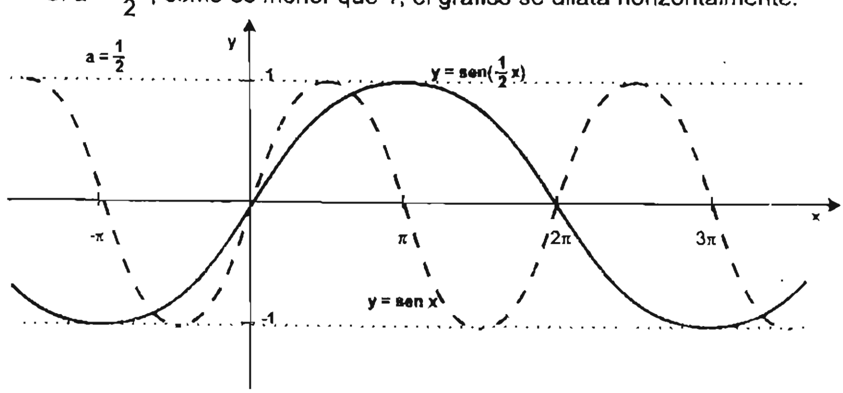
$$a.x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \quad y \quad a.x_2 = 2\pi \Leftrightarrow x_2 = \frac{2\pi}{a}$$

Es $T = |x_1 - x_2| = \frac{2\pi}{|a|}$

Si, por ejemplo, $a = \frac{3}{2}$, que es mayor que 1, se tiene una compresión horizontal del gráfico:

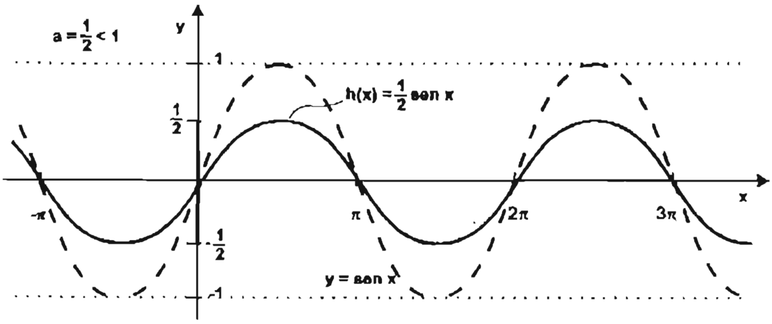


Si $a = \frac{1}{2}$, como es menor que 1, el gráfico se dilata horizontalmente:



ii) Si $h(x) = (g \circ f)(x) = g(\text{sen } x) = a.\text{sen } x$, esta composición dilata o comprime verticalmente el gráfico. Modifica la imagen pero no el período, que sigue siendo 2π.
Es $\text{Im } h = [-|a|, |a|]$.
Se dice que $|a|$ es la amplitud de h.

Si $a = \frac{1}{2}$, por ejemplo, el gráfico se "aplasta":

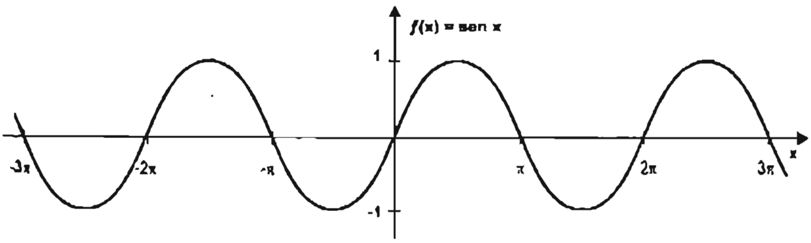


Ejemplo 5

A partir del gráfico de la función $f(x) = \text{sen } x$, efectuar el de:

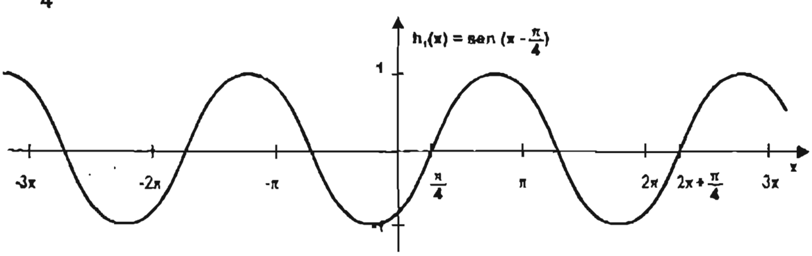
$$h(x) = -3 \text{ sen } (2x - \frac{\pi}{4})$$

Determinar analíticamente período, imagen y ceros de h.

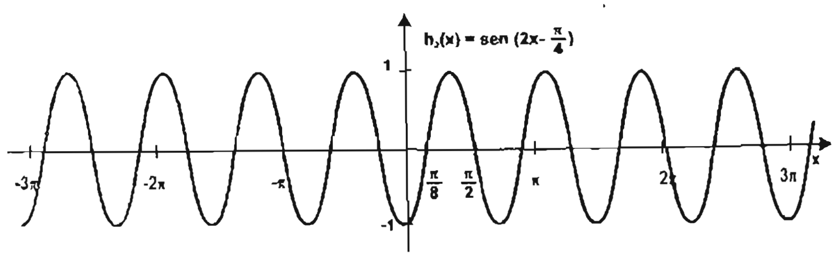


Solución

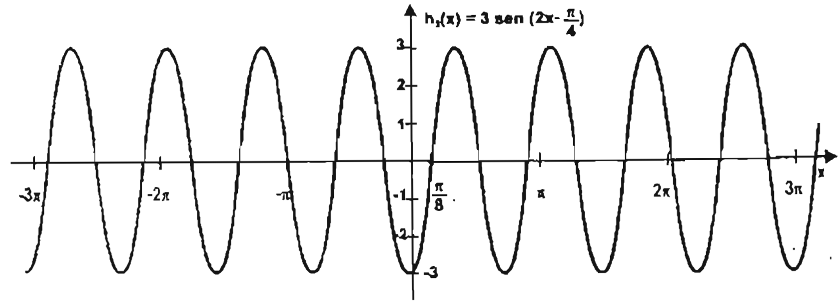
- Si $g_1 = x - \frac{\pi}{4}$, la composición $h_1(x) = (f \circ g_1)(x)$ produce
  $h_1(x) = \text{sen } (x - \frac{\pi}{4})$, cuyo gráfico se obtiene trasladando el de seno de x
  $\frac{\pi}{4}$ unidades hacia la derecha:



- Si ahora componemos $h_1(x)$ con $g_2(x) = 2x$ a derecha, resulta:
  $h_2(x) = h_1 \circ g_2(x) = \text{sen } (2x - \frac{\pi}{4})$ cuyo gráfico se obtiene, a partir del de $h_1(x)$, comprimiéndolo horizontalmente hasta la mitad:

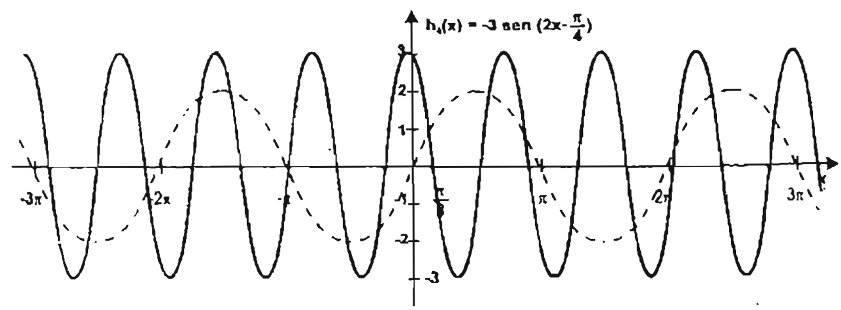


- Consideremos $g_3(x) = 3x$, y llamemos $h_3(x) = g_3 \circ h_2(x) = 3 \text{ sen } (2x - \frac{\pi}{4})$. El gráfico de h_3 se obtendrá dilatando verticalmente, al triple, el de h_2.



- Finalmente, si $g_4(x) = -x$, es $h(x) = g_4 \circ h_3(x)$ y, según sabemos, bastará "reflejar" el gráfico de h_3 respecto del eje x, para obtener el gráfico de h.

  En el siguiente gráfico se representan las funciones h(x) y sen x:



Completando el análisis de las características de h

i) Cálculo de la imagen de h :
Como $-1 \leq \text{sen } t \leq 1 \ \forall t$, resulta $3 \geq (-3).\text{sen } t \geq -3 \ \forall t$, de donde se infiere que $\text{Im } h \subset [-3 , 3]$.
Por la continuidad de la función seno, de las funciones lineales y de la composición de funciones continuas, h(x) es continua. Como 3 y -3 son valores de h, $\forall b \in [-3 , 3]$ existe $x \in \mathbf{R}$ que verifica $f(x) = b$.
Podemos concluir que $\text{Im } h = [-3 , 3]$

ii) Cálculo del período:
sen t es periódica de período 2π y -3 sen t tiene el mismo período.
Para calcular el período T de $h(x) = -3 \text{ sen } (2x - \frac{\pi}{4})$, calculamos qué distancia debe haber entre x_1 y x_2 para que los respectivos argumentos del seno difieran en 2π:

$$|(2x_2 - \frac{\pi}{4}) - (2x_1 - \frac{\pi}{4})| = 2\pi \iff |x_1 - x_2| = \pi.$$

Concluimos que $T = \pi$.

iii) Cálculo de los ceros de h(x):
Como $\operatorname{sen} t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi$ con k entero,

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow -3 \operatorname{sen}(2x - \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow (2x - \frac{\pi}{4}) = k\pi \Leftrightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$$

Los ceros de h(x) son de la forma:

$$x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \quad \text{, con k entero}$$

iv) Máximos y mínimos de h:

$h(x) = -3 \operatorname{sen}(2x - \frac{\pi}{4})$ toma valor máximo cuando $\operatorname{sen}(2x - \frac{\pi}{4})$ toma valor -1, y esto ocurre cuando $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$. Así, los máximos están en

$$x = \frac{7\pi}{8} + k\pi \quad \text{, con k entero}$$

Un razonamiento similar nos lleva a concluir que los mínimos de h(x) están en los puntos de la forma:

$$x = \frac{3}{8}\pi + k\pi \quad \text{, con k entero}$$

Observación

Los valores máximos y mínimos que toma la función son | -3 | y -| -3 |. La amplitud de esta función es 3.

C) Estudiaremos, en general, las características de una función $f(x) = a.\operatorname{sen}(bx+c)$ con a y b no nulos.

Amplitud

La función toma valores entre $-|a|$ y $|a|$; $\operatorname{Im} f = [-|a|, |a|]$
El máximo $|a|$ que toma la función se llama amplitud de f.

Período

La función es periódica, de periodo $\frac{2\pi}{|b|}$; notemos que:

- Si $|b|$ es un número grande, el período es pequeño; las ondas son más frecuentes.
- Si $|b|$ es un número pequeño, el período es grande, las ondas son menos frecuentes.

Llamamos *frecuencia* a la inversa del periodo. $|b|$ se denomina *pulsación*.

Corrimiento de fase

Expresando la función $f(x) = a.\operatorname{sen}(bx+c)$ de la forma:

$$f(x) = a.\operatorname{sen}[b(x + \frac{c}{b})]$$

su gráfico se obtendrá del de $h(x) = a.\operatorname{sen} bx$, trasladándolo $\frac{c}{b}$ unidades hacia

la izquierda o, si lo prefiere, $-\frac{c}{b}$ unidades hacia la derecha.
Al número $-\frac{c}{b}$ se lo llama *corrimiento de fase*. En el ejemplo 5, el corrimiento de fase de la función es $\frac{\pi}{8}$, ya que $-3 \text{ sen } (2x - \frac{\pi}{4}) = -3 \text{ sen } [2(x - \frac{\pi}{8})]$

Ejemplo 6

Un boxeador se entrena saltando a la soga. Cada 5 segundos hace 15 saltos, en los cuales se despega 10 cm del piso. Ajustar a, b , c para que:

$$f(t) = a.\text{sen } (bt - \frac{\pi}{2}) + c$$

represente a qué distancia (en centímetros) del piso se encuentran los pies del boxeador al cabo de t segundos de iniciado el ejercicio.

Solución

La amplitud debe ser 5, pues entre el punto más bajo de la onda y el más alto hay una diferencia de 10. Luego a = 5. Si fijamos el instante t = 0 cuando se inicia el ejercicio, deberá ser $f(0) = 0$. O sea

$$a.\text{sen } (b.0 - \frac{\pi}{2}) + c = 0$$

Como $\text{sen } (-\frac{\pi}{2}) = -1$, resulta:

$$a.(-1) + c = 0 \quad \text{de donde:}$$

$$a = c$$

y como a = 5, resulta también c = 5 y podemos escribir:

$$f(x) = 5 \text{ sen } (bt - \frac{\pi}{2}) + 5$$

Para determinar b, debemos medir el tiempo que tarda en completar un ciclo (o sea un salto): si para 15 saltos se necesitan 5 seg, para un salto serán necesarios $\frac{5}{15}$ seg. De modo que el período es $T = \frac{1}{3}$ seg. La primera vez que se repite un ciclo es para $t = \frac{1}{3}$: $f(0) = f(\frac{1}{3})$.

$$5.\text{sen } (b.0 - \frac{\pi}{2}) + 5 = 5.\text{sen } (b\frac{1}{3} - \frac{\pi}{2}) + 5 \Leftrightarrow \text{sen } (-\frac{\pi}{2}) = \text{sen } (b\frac{1}{3} - \frac{\pi}{2})$$

Para que esto ocurra debe ser:

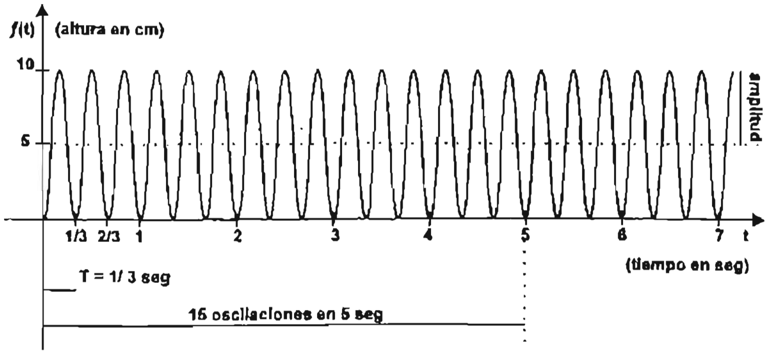
$\frac{b}{3} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi$, de donde resulta $b = 6\pi$, o bien

$\frac{b}{3} - \frac{\pi}{2} + 2\pi = -\frac{\pi}{2}$, de donde resulta $b = -6\pi$.

Cualquiera de esos valores del parámetro b caracteriza al corrimiento.
La función f que representa a qué altura del piso está el boxeador al cabo de t segundos de iniciado el ejercicio ha resultado ser:

$$f(t) = 5 \text{ sen } (6\pi t - \frac{\pi}{2}) + 5$$

Grafiquémosla:



Ejemplo 7

Hallar los ceros de sen $(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2})$

Solución

Para ello recordemos que los ceros de sen t son de la forma $t = n\pi$, con n entero.
Será sen $(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{4} + \frac{\pi}{2} = n\pi$, con $n \in \mathbf{Z}$;

Despejando x obtenemos:

$$\frac{x}{4} = n\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{(2n - 1)\pi}{2}$$

De modo que los ceros buscados son $x = 2(2n - 1)\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

Vemos que son de la forma "2 por un impar por π" ; por ejemplo, -10π, 6π, 46π.

Podríamos haber procedido de otra manera:

1) Hallar el período de f: 8π
2) Buscar los ceros de f en $[0 , 8\pi]$: 2π y 6π.
3) "Expandirlo " por periodicidad: los ceros son los números de la forma $2\pi + k8\pi$ y $6\pi + k8\pi$, con k entero.

Ejemplo 8

Hallar el período y graficar la función:

$$f(x) = \text{sen } (3x + \frac{\pi}{2})$$

Solución

Para hallar el período de f buscamos un intervalo en el que se complete un ciclo de la función seno:
Para que el seno complete un ciclo, podemos tomar cualquier intervalo de longitud 2π , por ejemplo el $[0 , 2\pi]$

$$3\, x_1 + \frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{\pi}{6}$$

$$3x_2 + \frac{\pi}{2} = 2\pi \Leftrightarrow x_2 = (2\pi - \frac{\pi}{2})\frac{1}{3} = (\frac{4\pi - \pi}{2})\frac{1}{3} = \frac{3}{2}\pi\frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$$

El período de f es $(x_2 - x_1) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{4}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi$

A continuación, buscamos los ceros de f en un intervalo de longitud $\frac{2}{3}\pi$, por ejemplo el $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$

$$\text{sen}(3x + \frac{\pi}{2}) = 0 \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{2} = n\pi \Leftrightarrow x = \frac{(2n-1)\pi}{6}$$

Si $n = -1$, $x = -\frac{\pi}{2}$, que no pertenece al $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$

Si $n = 0$, $x = -\frac{\pi}{6}$

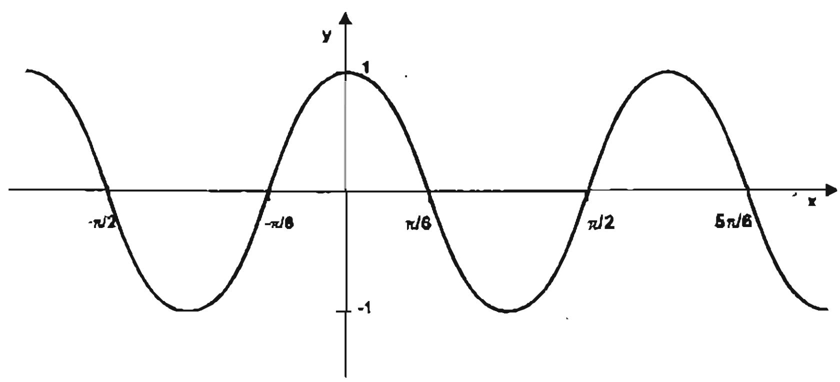
Si $n = 1$, $x = \frac{\pi}{6}$

Si $n = 2$, $x = \frac{\pi}{2}$, que no pertenece al $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$

En el intervalo estudiado, los ceros de f resultan entonces ser: $-\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{6}$, y en toda la recta, los puntos:

$$-\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \text{ y } \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, \text{ con k entero.}$$

Como $f(0) = 1$, el gráfico es entonces la sinusoide que corta al eje en los puntos calculados y que pasa por el $(0, 1)$.



Tangente, secante, cosecante

Definición : Si $x \in \mathbf{R}$ y $\cos x \neq 0$, definimos la tangente de x, como:

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

El dominio de la tangente es $\mathbf{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ con k entero, o sea, todo **R** menos el conjunto de ceros del coseno.

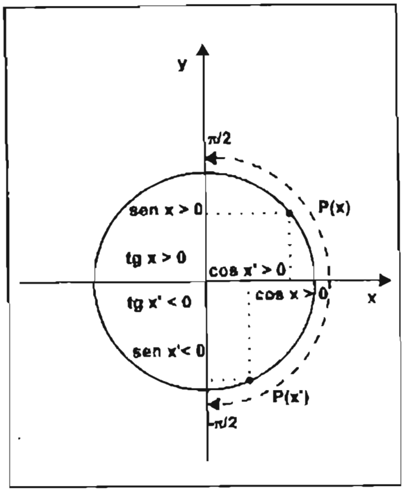
Los ceros de tg x son los ceros del sen x, o sea, los de la forma $n\pi$ con n entero.

Observamos además que:

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

de modo que tg x es periódica de período π.

Por lo tanto, si estudiamos la función tg x en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tendremos un panorama completo de su comportamiento:



i) Siendo $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, cociente de funciones continuas con denominador nunca nulo, es continua en todo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

ii) a) tg x es positiva si seno y coseno son ambos positivos o ambos negativos y esto, dentro del intervalo que estamos estudiando, sólo ocurre en $(0, \frac{\pi}{2})$ ➔

b) tg x es negativa si y sólo si sen x > 0 y cos x < 0 o viceversa, lo que, dentro de $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ sólo ocurre en $(-\frac{\pi}{2}, 0)$.

iii) Como $\operatorname{tg}(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$, el gráfico de la tangente es simétrico respecto del (0 , 0).

iv) Analicemos qué ocurre cuando $x \to \frac{\pi}{2}$ ($\frac{\pi}{2} \notin \operatorname{dom} \operatorname{tg} x$):

En la fracción $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ el numerador no puede tomar valores mayores que 1 (está acotado), y estos valores son siempre positivos si x "está cerca" de $\frac{\pi}{2}$. En cambio el denominador toma valores positivos "tan pequeños como uno quiera" con tal de tomar x a la izquierda de y "suficientemente cerca" de $\frac{\pi}{2}$.

Esto hace que tome valores positivos cada vez más grandes cuando x tiende

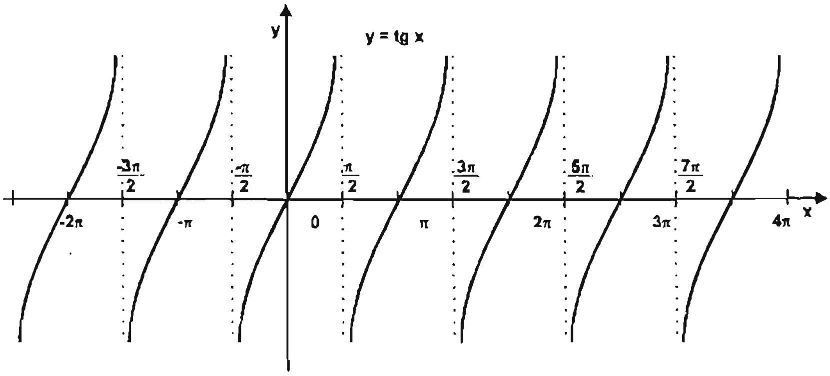
a $\frac{\pi}{2}$ por la izquierda. O sea que

$$\operatorname{tg} x \longrightarrow +\infty$$
$$x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$$

Si hacemos un análisis parecido para cuando x está a la derecha y "suficientemente cerca" de $\frac{\pi}{2}$ obtenemos:

$$\operatorname{tg} x \longrightarrow -\infty$$
$$x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$$

La periodicidad de la función y el estudio realizado en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nos permiten obtener el siguiente gráfico para la función tangente:



Hemos definido la nueva función trigonométrica "tangente", dividiendo entre si las funciones seno y coseno. Por lo tanto, en cualquier situación en la que debamos operar con la tangente, podremos recurrir a la definición, y utilizar lo que sabemos sobre el seno y el coseno.

A partir de las funciones sen x y cos x, se definen también las siguientes funciones trigonométricas:

secante: $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

cosecante: $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

cotangente: $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

Observación

$$\operatorname{dom}(\sec x) = \mathbf{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\} \text{ con k entero}$$

$$\operatorname{dom}(\operatorname{cosec} x) = \mathbf{R} - \{k\pi\} \text{ con k entero}$$

$$\operatorname{dom}(\operatorname{cotg} x) = \mathbf{R} - \{k\pi\} \text{ con k entero}$$

ALGUNAS FORMULAS UTILES

- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$
- $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$
- $\operatorname{sen} 2\alpha = 2\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
- $\operatorname{sen}(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$
- $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen}\alpha$
- $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}(\frac{\alpha+\beta}{2}) . \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) . \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

Capítulo VII

Funciones Exponenciales y Logarítmicas

FUNCIONES EXPONENCIALES

Consideremos los siguientes fenómenos:

1) Las amebas son seres unicelulares que se reproducen partiéndose en dos. Supongamos que las condiciones de un cultivo son tales que las amebas se duplican aproximadamente cada hora y que, *inicialmente*, hay una sola ameba. Con esta información un biólogo puede hacer la tabla →

tiempo en horas	número de amebas
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

En general, podrá predecir que al cabo de t horas habrá

$$N = 2^t \text{ amebas}$$

2) Un capital de C pesos se deposita en un Banco al 10% de interés anual. Al cabo de 1 *año se tendrá*

$$C + C\,\frac{10}{100} = C\,(1{,}10) \text{ pesos}$$

Al cabo de dos años, $C\,(1{,}10)^2$ pesos

Al cabo de x años, el monto acumulado M será de

$$M(x) = C\,(1{,}10)^x \text{ pesos}$$

3) El valor adquisitivo del dinero es cada vez menor. A esta pérdida de valor se la llama devaluación. Si con el mismo dinero con que hace un año se podían adquirir 100 lápices, hoy sólo se pueden adquirir 95, se dice que el dinero se ha devaluado en un 5%, es decir, al pasar un año el dinero vale $\frac{95}{100} = 0{,}95$ de lo que valía. Si cada año la devaluación fuera del 5%, la evolución del valor adquisitivo del dinero, al cabo de x años vendría dada por

$$D(x) = (0{,}95)^x$$

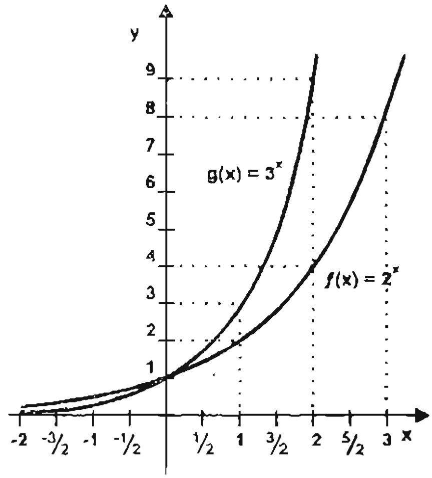
Estos fenómenos son descriptos por funciones exponenciales: $f(x) = a^x$ (a un número positivo) y, por tal motivo,se suele decir que tienen un "comportamiento exponencial".

En el presente capítulo estudiaremos las funciones exponenciales y sus inversas: las funciones logarítmicas.

Gráfico

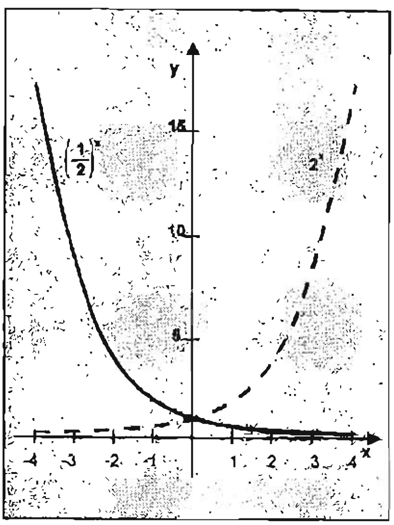
Grafiquemos aproximadamente $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 3^x$. Para ello confeccionamos sendas tablas de valores y unimos mediante una curva los puntos así determinados en cada caso:

x	$f(x) = 2^x$	$g(x) = 3^x$
-2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$
$-\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{9}$
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
0	1	1
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
1	2	3
$\frac{3}{2}$	$2\sqrt{2}$	$3\sqrt{3}$
2	4	9
$\frac{5}{2}$	$4\sqrt{2}$	$9\sqrt{3}$
3	8	27



Tenemos así graficadas dos fuciones exponenciales de distinta base: 2^x y 3^x. Ambos gráficos guardan entre sí mucha similitud:

- Ambos pasan por el punto (0 , 1)
- Ambós corresponden a funciones crecientes y continuas, y tienen la misma concavidad.
- Ambos se aproximan asintóticamente a la recta y = 0 cuando la variable tiende a menos infinito.
- Ambos tienden a más infinito cuando la variable tiende a $+\infty$.
- En ambos casos, el dominio es **R**, y la imagen son los reales mayores que 0.



Observemos que algunas de estas características cambian en la función exponencial

$$h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

←

En efecto, dado que:

$$h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x} = f(-x)$$

el gráfico de h es el simétrico del de f respecto del eje vertical.

De esta manera, h es una función decreciente; la recta y = 0 es un asíntota horizontal para $x \to +\infty$; tiende a más infinito cuando $x \to -\infty$.

○ ○ ○ Características y propiedades

En general, para cualquier número a mayor que 1 ($a > 1$), podemos graficar la función $f(x) = a^x$.

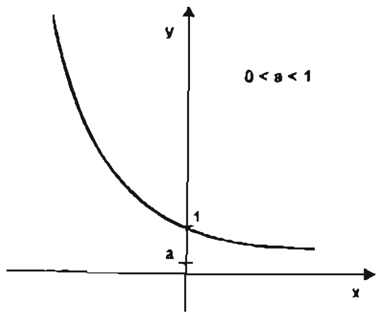
Sus características más importantes son:

1) $f(0) = a^0 = 1$
2) $f(1) = a^1 = a$
3) $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$
4) $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$, y la recta $y = 0$ es una asíntota de este gráfico
5) Es continua. Su dominio es R y su imagen es $[0\ ,\ +\infty)$

Si $0 < a < 1$ los puntos 3) y 4) cambian:

3) $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$, y la recta $y = 0$ es una asíntota de este gráfico.

4) $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$



Además valen las propiedades conocidas para la "potenciación"

(I) $a^{x+y} = a^x a^y$ para todo x e y $a > 0$
(II) $a^{xy} = (a^x)^y$ para todo x e y $a > 0$

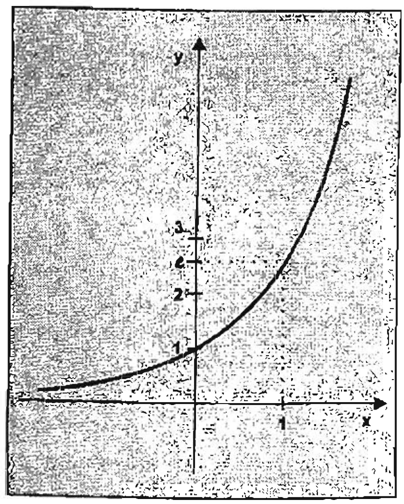
○ ○ ○ El número *e*

Una base de gran uso tanto en las aplicaciones como en el desarrollo de la teoría es el número e . Por ejemplo, la curva que forma un cable de tendido eléctrico entre dos postes consecutivos si bien parece una parábola, no lo es. Su ecuación viene determinada por la función $c(x) = e^x + e^{-x}$.

El número e es un número irracional, su valor aproximado es igual a 2,718281.

Por ser $2 < e < 3$, el gráfico de $f(x) = e^x$ quedará comprendido entre los gráficos de $y = 2^x$ y de $y = 3^x$.

A partir de los gráficos vistos hasta qui, por corrimientos o cambios de escala, podemos construir gráficos de otras funciones exponenciales.



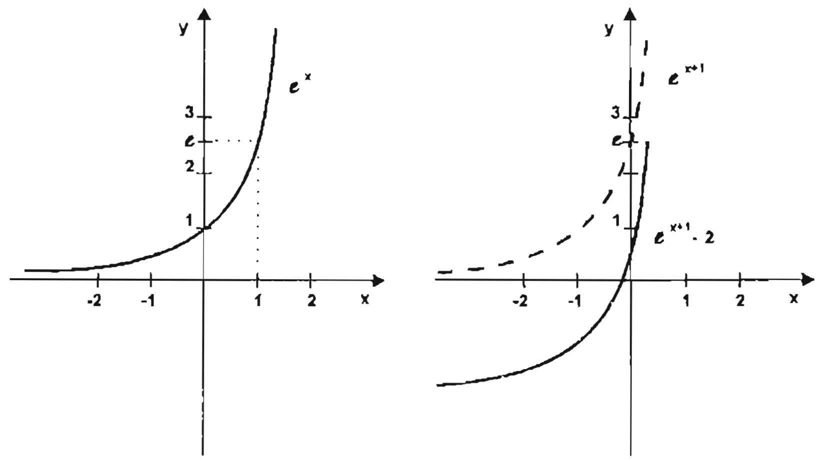
Ejemplo 1

Graficar $g(x) = e^{x+1} - 2$.

Solución

Si $f(x) = e^x$, entonces podemos escribir $g(x) = f(x+1) - 2$.

El gráfico de g(x) se obtendrá desplazando al gráfico de e^x una unidad a la izquierda ($f(x+1)$) y luego dos unidades hacia abajo ($f(x+1) - 2$).



FUNCIONES LOGARITMICAS

La función $f(x) = a^x$ es biyectiva entre **R** y el intervalo $(0, +\infty)$. Por lo tanto tiene inversa. La inversa es el **logaritmo en base a**:

$$\log_a : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$$

de modo tal que $\log_a x = y$ si y sólo si $a^y = x$.

Tenemos entonces dos relaciones fundamentales:

$$\log_a (a^x) = x, \text{ para todo } x \quad \text{y} \quad a^{(\log_a x)} = x, \text{ para todo } x > 0.$$

Notemos que:

1) Sólo pueden tomarse logaritmos de números positivos.
2) $\log_a 1 = 0$ pues $a^0 = 1$
3) $\log_a a = 1$ pues $a^1 = a$

además:

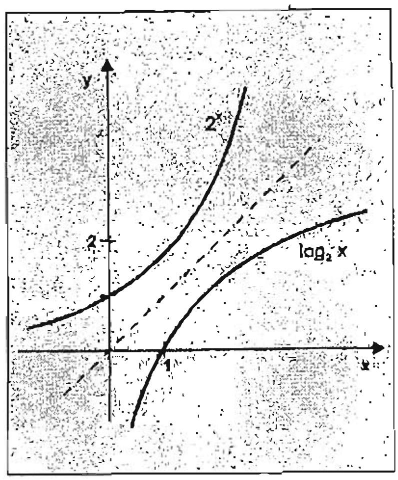
4) $\log_a (x\,y) = \log_a x + \log_a y$ para todo $x > 0$, $y > 0$.
5) $\log_a x^y = y \log_a x$ para todo $x > 0$, $y \in \mathbf{R}$.

Observación

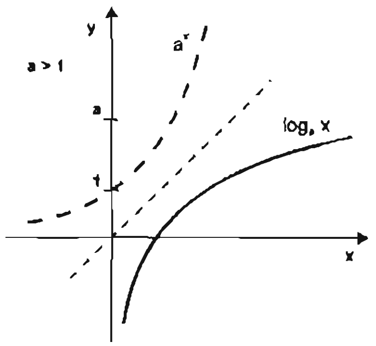
Las propiedades que hemos designado con 4) y 5) son consecuencia de las propiedades (I) y (II) de la exponencial.

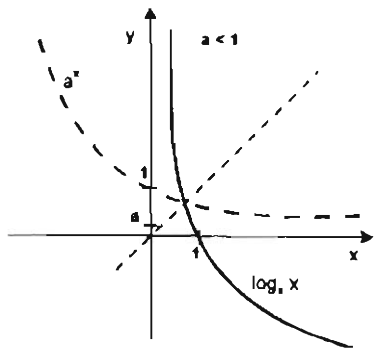
○○○ Gráfico

Graficamos $f(x) = \log_2 x$, a partir del gráfico de $g(x) = 2^x$. Como f y g son funciones inversas entre si, sus gráficos son simétricos respecto de la recta $y = x$. Por lo tanto, graficamos $g(x) = 2^x$ y reflejamos el gráfico respecto de dicha recta ➔



Análogamente, podemos graficar $f(x) = \log_a x$ a partir del gráfico de $g(x) = a^x$





○○○ Características

Observando el gráfico de $\log_a x$ podemos puntualizar que, si $a > 1$:

1) $\log_a 1 = 0$
2) $\log_a x < 0$ si $0 < x < 1$
3) $\log_a x > 0$ si $x > 1$
4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$
5) $\lim\limits_{x \to 0} \log_a x = -\infty$, o sea que la recta $x = 0$ es una asíntota del gráfico de logaritmo.
6) La función $\log_a x$ es creciente, continua y derivable. Su dominio es el intervalo $(0 , +\infty)$, y su imagen es **R**.

Estas características cambian si la base a está entre 0 y 1.
En la práctica, las bases más usuales son la base 10 (*logaritmo decimal*) y la base e (*logaritmo natural o neperiano*).
Para ellos se usa una notación especial:

$$\log_{10} x = \log x \qquad \log_e x = \ln x$$

Ambos suelen figurar en las calculadoras.

Observación

En general, cualquier función exponencial se puede poner en términos de la exponencial e^x. Por ejemplo: $5^x = e^{\ln 5^x}$. Pero $\ln 5^x = x \ln 5$. Por lo tanto, $5^x = e^{x \ln 5}$. Si usamos la calculadora, podemos ver que $\ln 5 \approx 1{,}6$. Tenemos entonces que $5^x \approx e^{1{,}6x}$

Ecuaciones con logaritmo y exponencial ○○○

Para resolver ecuaciones en las que aparecen estas funciones podemos aplicar a ambos miembros logaritmo o exponencial (según convenga), tantas veces como haga falta y utilizar los procedimientos algebraicos usuales.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 2

Resolver, en cada caso:

a) $2^x = 32$

Solución

Aplicando a ambos miembros $\log_2$ (inversa de 2^x) se obtiene:

$$\log_2 2^x = \log_2 32 \quad , \text{ o sea, } x \log_2 2 = \log_2 2^5.$$

Por lo tanto $x = 5$.

b) $3^{4x} - 1 = 0$

Solución

La ecuación equivale a: $3^{4x} = 1$. Aplicando a ambos miembros $\log_3$ obtenemos:

$$\log_3 3^{4x} = \log_3 1 \text{ , o sea , } 4x = 0$$

Por lo tanto $x = 0$

c) $2^{4x} + 1 = 0$

Solución

2^{4x} Û para cualquier valor de x; con más razón, $2^{4x} + 1 > 0$ para todo valor de x. Entonces **no existe** ningún valor de x que resuelva la ecuación planteada.

d) $\log_8 x = -3$

Solución

Aplicando a ambos miembros la función exponencial en base 6 tenemos:

$$x = 6^{-3} = \frac{1}{216}$$

e) $y = \log_9 27$

Solución

$y = \log_9 27 \iff 9^y = 27$. Aplicamos a ambos miembros $\log_3$:

$$\log_3 9^y = \log_3 27$$

Por lo tanto, $y \log_3 9 = 3$, o sea, $2y = 3$, de donde $y = \frac{3}{2}$.

Ahora disponemos de herramientas suficientes para resolver algunos problemas.

Ejemplo 3

Determinar los siguientes números sin usar calculadora ni tabla:

a) $\log_4 2$

Solución

Es el número al que hay que "elevar" a 4 para que el resultado de 2:
es $\frac{1}{2}$, pues $4^{0,5} = \sqrt{4} = 2$

b) $e^{3 \ln 2}$

Solución

Es lo mismo que $(e^{\ln 2})^3$, o sea 2^3 , pues $e^{\ln 2} = 2$.

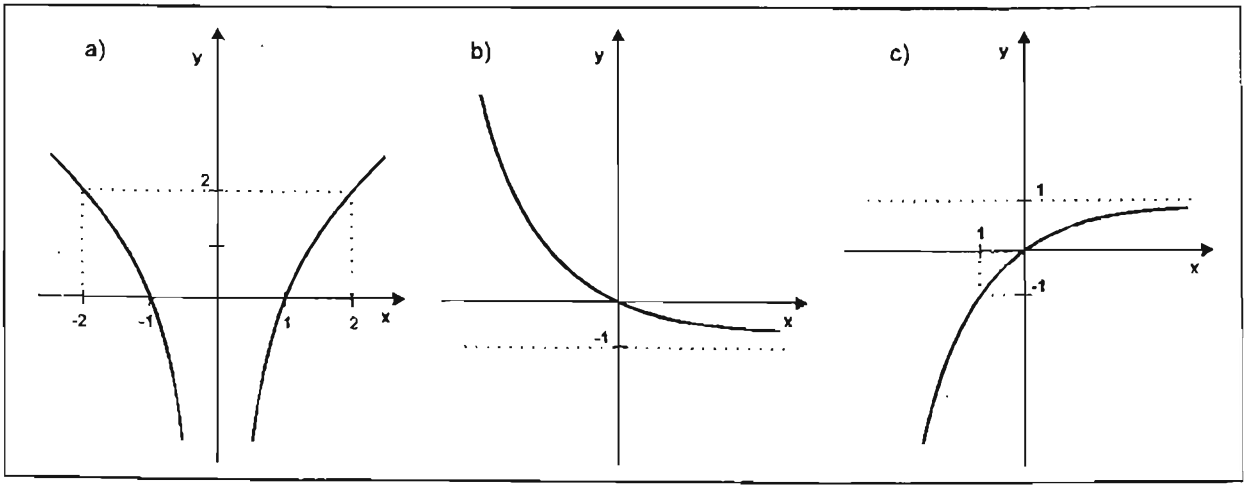
c) $\log_\pi 1$

Solución

Es 0 porque $\pi^0 = 1$

Ejemplo 4

Dadas las funciones $f(x) = \log_2 x^2$ y $g(x) = 1 - 2^{-x}$, identificar su gráfico entre las tres gráficos propuestos.



Solución

Es suficiente dar una razón para descartar un gráfico; veamos algunas posibles en el caso de f:

i) El dominio de $\log_2 x^2$ es $R - \{0\}$, ya que x^2 es positivo para todo número real $x \neq 0$. Esto permite asegurar que el gráfico de f es (a) , pues (b) y (c) tienen por dominio $\mathbb{R}$.

ii) El gráfico de f debe ser simétrico respecto del eje "y", ya que $f(x) = \log_2 x^2 = \log_2 (-x)^2 = f(-x)$ y (b) y (c) no lo son.

iii) También podemos decidirlo por ser (a) el único de los tres que pasa por el punto (1 , 0), y observando que $f(1) = \log_2 1 = 0$.

Uno de los gráficos (b) o (c) debe ser el de g.

i) Observemos que (b) corresponde a una función decreciente, y (c) a una creciente. Veamos cómo es $g(x) = 1 - 2^{-x}$.
Sabemos que $2^{-x} = (\frac{1}{2})^x$ es decreciente, por ser una fución exponencial de base menor que 1; entonces -2^{-x} es creciente, y $-2^{-x} + 1 = 1 - 2^{-x}$ también lo es. Por lo tanto (c) es el gráfico de g.

Crecimiento exponencial ○ ○ ○

Siempre que haya un proceso que evolucione de modo que el aumento (o disminución) en un intervalo de tiempo sea proporcional a lo que había al comienzo del mismo, ese proceso se describe mediante una exponencial. Por ejemplo: el crecimiento de una colonia de bacterias, el crecimiento de otras poblaciones animales y vegetales, el interés del dinero acumulado, la desintegración radiactiva, etc.

Para una función exponencial cualquiera

$$f(x) = a^x$$

se verifica que

$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = \frac{a^{x+h}}{a^x} = \frac{a^x a^h}{a^x} = a^h$$

es decir, el resultado no depende del valor inicial de x. La propiedad, puramente matemática, nos impresiona poco. Sin embargo su significado práctico es de enorme importancia.

Muchos tipos de seres unicelulares se reproducen por bipartición, es decir, cuando llega a un cierto grado de madurez, el individuo adulto se parte y da lugar a dos individuos jóvenes. Cada uno de ellos, a su vez, y transcurrido un cierto tiempo, repite el proceso.

El tiempo que media entre dos particiones depende del tipo de célula y del medio en que se encuentra. Si tomamos como unidad de tiempo el período correspondiente a unas ciertas condiciones, y empezamos con una célula, tendremos:

←

nº de períodos transcurridos	nº de células
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
...	...
n	2^n

Sin embargo, las cosas no son tan simples: no todas las células del mismo cultivo tardan exactamente lo mismo en partirse, y por lo tanto, no lo hacen simultáneamente. Lo que se observa es que la masa de células aumenta continuamente y se duplica cada cierto período.

Tomemos las siguientes unidades: en le eje de abscisas, el periodo de tiempo en que se duplica la masa de células; en el eje de ordenadas, la cantidad de células en un cierto instante.

Con estas unidades, la expresión que da la masa total de células en función del tiempo es

$$f(t) = 2^t$$

Esta expresión tiene sentido no sólo para valores enteros de t, pues el aumento de la masa celular es continuo. También es válida para valores negativos, si el cultivo tiene un pasado anterior al instante que tomamos como inicial.

Si en lugar de tomar como unidad el tiempo que se necesita para que la masa total se duplique, se toma otra unidad de tiempo, la función queda de la forma

$$f(t) = a^t$$

Si hacemos $t = 0$, obtenemos $f(0) = a^0 = 1$. Esto significa que en el instante inicial la masa es la unidad, lo cual queda más claro si se expresa en otra forma: en la función $f(t) = a^t$ estamos tomando como unidad la masa que hay en el instante inicial. Cuando esa forma de expresarnos no nos resulte convincente, pondremos la ecuación de esta otra forma:

$$f(t) = M\,2^t$$

Aquí la unidad es la que teníamos originariamente, y el factor M expresa la cantidad de aquellas unidades que hay en el instante inicial.

Es muy frecuente que se tome al número e como la unidad de la que hablamos al presentar la funcion exponencial, o sea que es frecuente llevar cualquier función exponencial a una expresión de la forma

$$f(x) = M\,e^x$$

donde M es la cantidad inicial (para $x = 0$), x es el tiempo transcurrido, expresado en las unidades que convenga, y e es el factor por el que se multiplica en cada unidad de tiempo.

Ejemplo 5

Completar la siguiente tabla de valores de modo que la función $y = f(x)$ sea una exponencial del tipo $f(x) = C\,a^x$. ➔

x	y
1	2,36
3	
5	7,41
7	

Vamos a usar una de las propiedades de las exponenciales, a saber:

$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = \frac{C\,a^{x+h}}{C\,a^x} = a^h$$

ya que, a partir de ella, podemos hallar el valor de la base a.
En nuestro caso, conocemos $f(1)$ y $f(5)$, con lo cual

$$\frac{f(5)}{f(1)} = \frac{C\,a^5}{C\,a^1} = a^4$$

y como

$$\frac{f(5)}{f(1)} = \frac{7.41}{2,36} \approx 3,14$$

tenemos que

$$a^4 \approx 3{,}14$$

de donde

$$a \approx 1{,}33$$

Podemos ahora determinar el valor de C, por ejemplo a partir del dato $f(1)$. En efecto:

$$2{,}36 = f(1) = C\,a^1 \approx C\ 1{,}33$$

de donde

$$C = \frac{2{,}36}{1{,}33} \approx 1{,}77$$

Luego,

$$f(x) = 1{,}77\,(1{,}33)^x$$

Ahora es fácil completar la tabla; basta evaluar f en $x = 3$ y en $x = 7$. Así:

$$f(3) = 1{,}77\,(1{,}33)^3 \approx 4{,}16$$

$$f(7) = 1{,}77\,(1{,}33)^7 \approx 13{,}03$$

La tabla queda:
←

x	y
1	**2,36**
3	**4,16**
5	7,41
7	13,03

Ejemplo 6

La población de Macondo (en millones de habitantes) fue en 1980 de 25 y en 1991 de 31,4. Determinar

a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento anual de la población?
b) ¿En qué año la población era de 23 millones?
c) ¿Cuántos habitantes habrá en el año 2000?

Solución

Asumiremos que el crecimiento de la población sigue una ley exponencial de modo que la población P viene dada por:

$$P(t) = Ca^t$$

Si tomamos como instante inicial ($t = 0$) el año 1980, tenemos:

$$P(0) = C = 25$$

El año 1991 corresponde a $t = 1991 - 1980 = 11$, entonces:

$$P(11) = C\,a^{11} = 25\,a^{11} = 31{,}4$$

de donde

$$a^{11} = \frac{31{,}4}{25} = 1{,}25$$

De aquí podemos despejar el valor de a:

$$a = \sqrt[11]{1{,}25} \approx 1{,}02$$

Luego, el modelo exponencial queda determinado:

$$P(t) = 25\ (1{,}02)^t$$

teniendo en cuenta que $t = 0$ corresponde al año 1980.
Estamos en condiciones de responder a las preguntas planteadas.

a) La "masa de crecimiento" anual se obtiene averiguando en qué porcentaje creció la población en un año. Este porcentaje se calcula haciendo

$$\frac{\text{aumento de la población en un año}}{\text{población existente al comienzo del año}}\ 100$$

Gracias a que el modelo es exponencial, esta tasa de crecimiento no depende del año en particular que se elija.
En efecto, dado que

aumento de la población en un año = $P(t + 1) - P(t)$
población existente al comienzo del año = $P(t)$

resulta

$$\text{tasa de crecimiento} = \frac{P(t + 1) - P(t)}{P(t)} =$$

$$= \frac{25(1{,}02)^{t+1} - 25(1{,}02)^t}{25(1{,}02)^t} = \frac{25(1{,}02)^t(1{,}02) - 25(1{,}02)^t}{25(1{,}02)^t} =$$

$$= \frac{25(1{,}02)^t\ (1{,}02 - 1)}{25(1{,}02)^t} = 1{,}02 - 1 = 0{,}02$$

En otras palabras, la población crece un 2% al año.

b) Nos están preguntando para qué valor de t es $P(t) = 23$, o sea:

$$25\ (1{,}02)^t = 23$$

Despejamos t:

$$(1{,}02)^t = \frac{23}{25} = 0{,}92$$

Tomando logaritmo natural:

$$\ln\ [(1{,}02)^t] = \ln 0{,}92$$

$$t \ln\ (1{,}02) = \ln 0{,}92$$

$$t = \frac{\ln 0{,}92}{\ln 1{,}02} = -4{,}21$$

Es decir, $t = -4{,}21$.
Debemos interpretar este resultado. Recordemos que $t = 0$ correspondía al año 1980. El valor de $t = -4{,}21$ nos está diciendo que 4,21 años antes de 1980 había 23 millones de habitantes. O sea que, en virtud de que $1980 - 4{,}21 = 1975{,}79$, podemos afirmar que , durante 1975 la población de Macondo llegó a 23 millones.

c) Esta es más fácil . El año 2000 corresponde a $t = 2000 - 1980 = 20$. La población, según nuestro modelo, será:

$$P(20) = 25(1{,}02)^{20} \approx 37{,}1$$

Ejemplo 7

En publicidad se estima que el número de personas N(t) en una población P_0 que conocen un producto nuevo es

$$N(t) = P_0(1 - 2^{-kt})$$

donde k es un número fijo y se ha partido del supuesto que en el instante t = 0 nadie conocía el producto.

a) ¿Cuándo el producto será conocido por la mitad de la población?
b) ¿y por las tres cuartas partes de la población?

Solución

a) Que la mitad de la población conozca el producto significa que:

$$N(t) = \frac{P_0}{2}$$

Resolveremos esta ecuación:

$$\frac{P_0}{2} = P_0(1 - 2^{-kt}) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 1 - 2^{-kt} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = -2^{-kt} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 2^{-kt}$$

Aplicamos $\log_2$ en ambos miembros:

$$\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-kt} \Leftrightarrow -1 = -kt$$

Esta igualdad se verifica si y sólo si $t = \frac{-1}{-k} = \frac{1}{k}$

Para que la mitad de la población conozca el producto debe transcurrir un tiempo $t = \frac{1}{k}$

b) Análogamente, que las $\frac{3}{4}$ partes de la población conozcan el producto significa que: $\frac{3}{4}P_0 = P_0(1 - 2^{-kt})$.

Resolviendo:

$$\frac{3}{4} = 1 - 2^{-kt} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} = -2^{-kt} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = 2^{-kt}$$

Nuevamente, aplicando

$$\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-kt} \Leftrightarrow -2 = -kt$$

La solución de esta última ecuación es: $t = \frac{-2}{-k} = \frac{2}{k}$.

Para que las $\frac{3}{4}$ partes de la población conozcan el producto debe transcurrir un tiempo $t = \frac{2}{k}$.

Observemos, como hecho interesante, que el tiempo que debe transcurrir para que las $\frac{3}{4}$ partes de la población conozcan el producto es el doble del tiempo necesario para que lo conozca la mitad de la población.

Capítulo VIII

Derivadas

Introducción

Hemos visto que las funciones son apropiadas para modelar fenómenos diversos. En este sentido, cómo varía (cómo crece o decrece) una función, es el aspecto que probablemente más interesa desde el punto de vista práctico. Interesa, por ejemplo, cómo varía el nivel de agua de un embalse con el tiempo, creciendo cuando llueve, decreciendo en tiempo de sequía.

El objetivo principal de estas notas es presentar una herramienta (el cálculo diferencial) eficaz para estudiar características de las funciones.

La forma natural de medir la variación de una magnitud f que cambia al cambiar otra magnitud x es:

"f cambia (crece o decrece) tanto cuando x cambia tanto"

Precisar esta idea matemáticamente nos conduce a la noción de derivada de una función.

Una de las razones principales que condujeron al desarrollo del cálculo diferencial fue la necesidad de encontrar una manera de estudiar el comportamiento de los objetos en movimiento. Consideraremos en el siguiente ejemplo, el problema de obtener una definición precisa de la velocidad de un objeto en un instante dado.

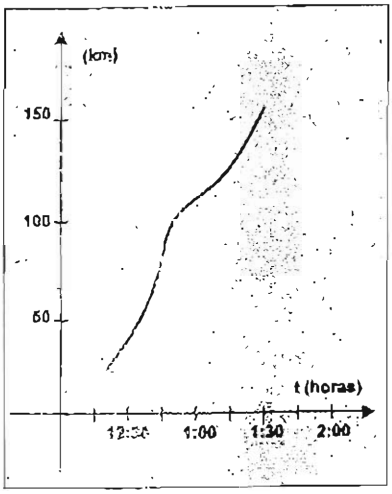
Velocidad instantánea

Supongamos que a las 12.00 hs de la noche salimos en auto hacia Mar del Plata y que alguien anotó los siguientes datos

a las 12.30	habíamos recorrido	39 kilómetros
a las 12.45	habíamos recorrido	65 kilómetros
a la 1.00	habíamos recorrido	90 kilómetros
a la 1.15	habíamos recorrido	115 kilómetros
a la 1.30	habíamos recorrido	145 kilómetros
a la 1.45	habíamos recorrido	172 kilómetros
a las 2.00	habíamos recorrido	192 kilómetros

después nos quedamos todos dormidos (menos el que manejaba) y nos despertamos al llegar, a las 5 de la mañana.

Podemos pensar a las mediciones hechas durante el viaje como valores



de una función $y = f(t)$ que, a cada instante de tiempo t le asigna la distancia recorrida $f(t)$. De acuerdo con los datos disponibles el gráfico de f será aproximadamente

←

Se quiere tratar de determinar a qué velocidad iba el auto exactamente a la 1.00 de la mañana.

Suponiendo que la distancia a Mar del Plata es de 400 kilómetros y teniendo en cuenta que tardamos 5 horas en llegar, podemos decir que la velocidad promedio fue de $\frac{400}{5} = 80$ km/hora.

Sin embargo esto no da demasiada información, ya que a la 1.00 el velocímetro puede haber marcado más velocidad o el auto haber estado detenido. De todas maneras podemos afinar la puntería:

Vel. prom. entre la 1.00 y las 2.00 $\frac{192 - 90}{2 - 1} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 102$ km/h

Vel. prom. entre la 1.00 y las 1.45 $\frac{172 - 90}{0,75} = \frac{f(1+0,75) - f(1)}{1 + 0,75 - 1} \cong 109$ km/h

Vel. prom. entre la 1.00 y las 1.30 $\frac{145 - 90}{0,5} = \frac{f(1+0,5) - f(1)}{1 + 0,5 - 1} = 130$ km/h

Vel. prom. entre la 1.00 y las 1.15 $\frac{115 - 90}{0,25} = \frac{f(1+0,25) - f(1)}{1 + 0,25 - 1} = 100$ km/h

Vel. prom. entre las 12.30 y la 1.00 $\frac{39 - 90}{-0,5} = \frac{f(1-0,5) - f(1)}{1 - 0,5 - 1} = 102$ km/h

Vel. prom. entre las 12.45 y la 1.00 $\frac{65 - 90}{-0,25} = \frac{f(1-0,25) - f(1)}{1 - 0,25 - 1} = 100$ km/h

Estos cálculos nos van dando información cada vez más confiable. Si tuviéramos más datos, por ejemplo: cuántos kilómetros se recorrieron entre la 1.00 y la 1.01 (1 y un minuto), entre la 1.00 y la 1.00 y 30 segundos, o entre las 12.59 y la 1.00, etc. podríamos hacer un cálculo más exacto de qué velocidad llevaba el auto a la 1.00, tomando promedios en intervalos cada vez más pequeños. El límite de esos promedios, esto es, el valor al que se van aproximando esos promedios, nos daría exactamente la velocidad buscada. Este límite será algo así como un promedio instantáneo, un promedio tomado sobre un intervalo de tiempo "infinitamente chico".

Este promedio instantáneo de una función $f(t)$ en un punto t_0 dado es lo que se llama *derivada de $f(t)$ en t_0* y se escribe en la forma $f'(t_0)$. En nuestro ejemplo, con los datos de que disponemos,

$$f'(1) \cong 100$$

Decimos que la velocidad instantánea del auto en $t = 1$ es, aproximadamente, 100 km/hora.

Definición de derivada

En general, si $f(x)$ es una función y x_0 es un punto de su dominio la derivada de f en x_0 se define como el

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ahora bien, este límite puede existir o no. Si existe, se dice que f es

derivable en x_0. El valor del límite es la derivada de f en x_0 y se escribe $f'(x_0)$. Si no existe (o sea: al acercarse x a x_0 no existe un valor al cual se aproximen - o tiendan - los promedios) se dice que **f no es derivable en x_0**.

Al promedio $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ se lo llama *cociente incremental*. De modo que la derivada de f en x_0 es el límite de los cocientes incrementales cuando $x \to x_0$.

Notar que como x está próximo a x_0 podemos poner $x = x_0 + h$ con h un número pequeño (próximo a cero, positivo o negativo). Con este cambio de nombres a las variables, el cociente incremental se expresa en la forma ($x - x_0 = h$)

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

y la derivada es el límite de los cocientes incrementales cuando $h \to 0$, a saber

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

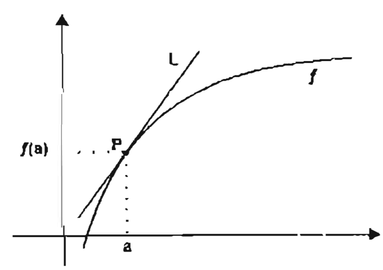
En los cálculos que hagamos podemos usar las expresiones (1) o (2) según nos resulte más cómodo, ya que son equivalentes.

Para cada $x \in$ dom (f) tiene sentido preguntarse si f es o no derivable en x, y si lo es, *tratar de calcular su derivada (en nuestro ejemplo podríamos* preguntarnos cuál era la velocidad a las 2.00, a las 2.15 o a las 4.30, si tuviéramos suficientes datos). Una función puede ser derivable en algunos puntos de su dominio y en otros no.

○ ○ ○ Interpretación geométrica

La derivada de una función en un punto tiene una relación muy precisa con la gráfica de la función:

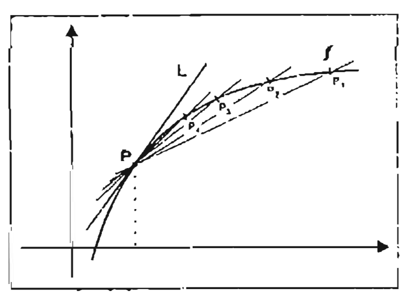
Supongamos que $f(x)$ es la función del gráfico ➔



Queremos encontrar la pendiente (y la ecuación) de la recta L "tangente" al gráfico de f en el punto P de coordenadas (a , f(a)).

La dificultad radica en que sólo conocemos un punto P sobre L, y necesitamos dos puntos de la recta para calcular su pendiente.

Observemos que si elegimos un punto P', perteneciente al gráfico de f y próximo a P, podemos hallar la pendiente de la recta secante L' que pasa por P y P'. Si consideramos luego que el punto P' se acerca a P es razonable suponer que la *pendiente de la recta que une P y P' se aproximará a la pendiente* de la recta L. ➔

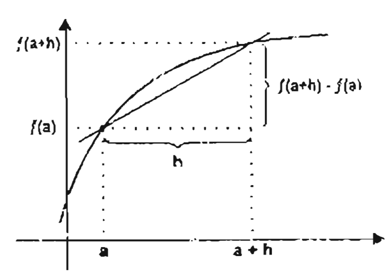


Consideremos pues P' = (a+h , f(a+h)) . De este modo la pendiente de la recta L' es:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = m_h$$

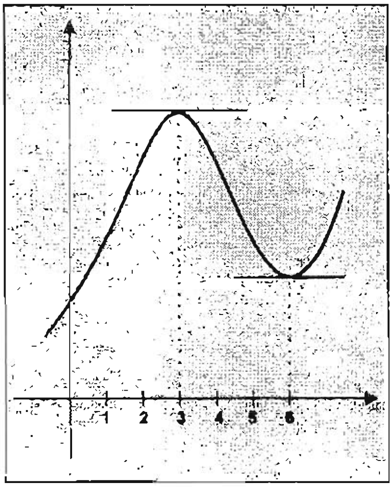
El punto P' estará próximo al punto P si h es suficientemente pequeño: si $h > 0$, P' estará a la derecha de P y si $h < 0$, P' estará a la izquierda de P.

Esperamos entonces que la pendiente m_h se aproxime a la pendiente m de la recta L cuando h se acerque a 0. ➔



De modo que necesitamos que exista

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



En caso afirmativo,

> el número $f'(a)$ es el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$.

Así, la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$ es:

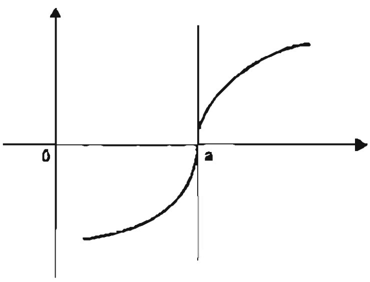
$$y - f(a) = f'(a).(x - a)$$

Por ejemplo:

← $f(x)$ está representada en la gráfica. Vemos que las rectas tangentes en los puntos de abscisa $x = 3$ y $x = 6$ son horizontales; por lo tanto, sus pendientes son cero. Podemos concluir entonces que $f'(3) = 0$ y $f'(6) = 0$. Notar además que en esos puntos la función alcanza un máximo y un mínimo relativo respectivamente.

Si bien no podemos calcular el valor de $f'(1)$ y el de $f'(4)$ podemos decir, de acuerdo a la interpretación geométrica que acabamos de ver, que $f'(1) > 0$ (pues la recta tangente en este punto tiene pendiente positiva) y $f'(4) < 0$ (pues la recta tangente en este punto tiene pendiente negativa).

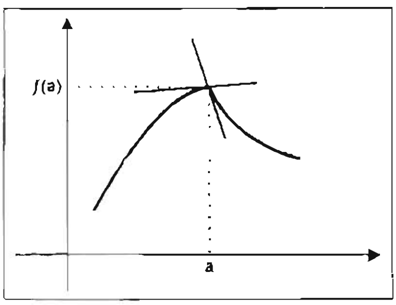
Cuándo no existe la derivada ○○○



La derivada de una función puede no existir, o sea que puede ocurrir que no haya un número al cual los cocientes $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ se aproximen cuando $x \to a$.

Si la gráfica de la función es tal que en un punto $(a, f(a))$ la recta tangente a la curva es **vertical**, no existe $f'(a)$: estas rectas no tienen pendiente.

←

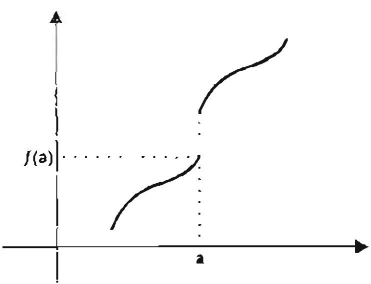


Puede ocurrir que f tenga un gráfico como el de la figura

←

En este caso no hay recta tangente a la gráfica en $(a, f(a))$ ya que las pendientes de las rectas secantes, según nos acerquemos por derecha o por izquierda, se aproximan a valores distintos. Luego aquí tampoco existe $f'(a)$.

Observar que en este caso la función tiene un máximo en $x = a$.



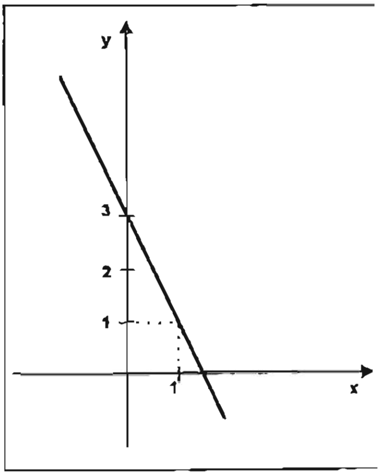
Si el gráfico de una función presenta una fractura, evidentemente en ese punto no hay recta tangente, y por lo tanto, allí no existe la derivada.

←

Entonces, cuando existe la derivada de una función f en punto a deducimos que f es continua en a.

Si f derivable en a entonces f continua en a.

La derivada de una función nos dará rica información sobre la función misma. Pero ¿cómo se calcula?. Mostraremos en algunos ejemplos sencillos cómo calcular efectivamente la derivada de una función en un punto dado.



Ejemplo 1

Calcular $f'(a)$ en cada caso

i) $f(x) = -2x + 3$ $\quad a = 1$ ➔

Solución

Recordemos la definición, debemos calcular el

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

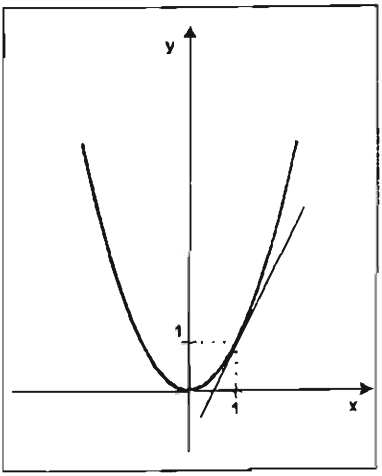
Ahora:

$$f(x) - f(1) = -2x + 3 - (-2.1 + 3) = -2x + 2 = -2(x - 1)$$

Entonces

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{-2(x - 1)}{x - 1} = -2$$

O sea que el cociente incremental de f en $a = 1$ es igual a -2 (no depende de x).
En consecuencia, la pendiente de la recta tangente en el punto $(1 , f(1)) = (1 , 1)$ es $f'(1) = -2$.



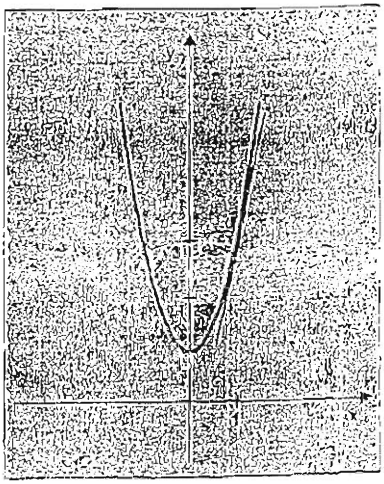
ii) $f(x) = x^2$ $\quad a = 1$ ➔

Solución

El cociente incremental es

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = 2 + h$$

Si hacemos $h \to 0$ el cociente incremental se "acerca" a 2.
Entonces la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en $(1 , 1)$ vale 2. Es decir: $f'(1) = 2$.



iii) $f(x) = 2x^2 + 1$ $\quad a = 1$ ➔

Solución

En este caso el cociente incremental es

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{2(1+h)^2 + 1 - 3}{h} = \frac{2(1 + 2h + h^2) + 1 - 3}{h} =$$

$$= \frac{2 + 4h + 2h^2 - 2}{h} = \frac{2h(2 + h)}{h} = 2(2 + h) = 4 + 2h$$

Por lo tanto $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (4 + 2h) = 4$

En consecuencia, la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(1\ ,\ f(1)) = (1\ ,\ 3)$ vale 4.

Si $y = f(x)$ representa la ecuación de movimiento de un móvil, el cálculo precedente se interpreta diciendo que la velocidad del móvil en el instante $a = 1$ es igual a 4 (unidades de distancia por unidad de tiempo).

iv) $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ $a = 2$

←

Solución

El cociente incremental resulta ser

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{[-\frac{1}{2+h}] - [-\frac{1}{2}]}{h} = \frac{-\frac{1}{2+h} + \frac{1}{2}}{h} = \frac{\frac{-2+2+h}{(2+h).2}}{h} =$$

$$= \frac{h}{(2+h).2.h} = \frac{1}{(2+h).2}$$

Entonces $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{(2+h).2} = \dfrac{1}{4}$

En consecuencia, la pendiente de la recta tangente de la función f en el punto $(2\ ,\ f(2)) = (2\ ,\ -\frac{1}{2})$ vale $\frac{1}{4}$; o sea que: $f'(2) = \frac{1}{4}$.

Ejemplo 2

Sea $f(x) = x^2$, calcular $f'(a)$ para $a = x$ un punto genérico.

Solución

En este caso el cociente incremental es

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

Si hacemos "tender" h a cero, es decir, si calculamos el límite del cociente incremental cuando h tiende a cero, obtenemos:

$$\lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

Luego $f'(x) = 2x$.

Hemos encontrado una **fórmula** que nos dice lo que vale la derivada de la función $f(x) = x^2$ en **cualquier** punto: para conocer la derivada de f en x hay que multiplicar 2 por x. Esto es coherente con lo que calculamos en el ejemplo 1 (ii) , ya que:

$$f'(1) = 2 = 2.1$$

Ahora podemos afirmar que $f'(3) = 2.3 = 6$ sin necesidad de volver a calcular el límite del cociente incremental.

Conocer una fórmula para la derivada de una función nos ahorra el tener que hacer cada vez el cálculo del límite.

○ ○ ○ Función derivada

Esta fórmula se llama *función derivada* de $f(x)$ y se escribe $f'(x)$.
En el ejemplo anterior:

$$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x$$

También se nota: $(x^2)' = 2x$

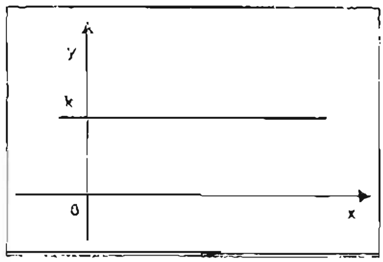
La función derivada de $f(x)$ es una función que a cada punto le asigna el valor de la derivada de $f(x)$ en ese punto.
En el ejemplo del automóvil, si en cada instante de tiempo se anota a qué distancia de Buenos Aires se encuentra, se tiene una tabla de valores para $f(x)$. Si, en cambio, se anota en cada instante lo que marca el velocímetro se tiene una tabla de valores de la función $f'(x)$.

○ ○ ○ Cálculo de derivadas

Ejemplo 3

Calcular la función derivada en los siguientes casos:

i) $f(x) = k$ con $k \in \mathbf{R}$ (f es una función constante)

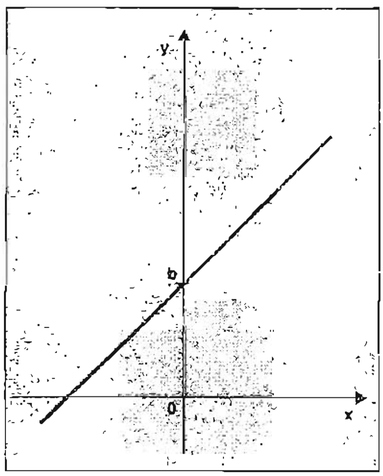


Solución

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

O sea que $(k)' = 0$.
Este resultado es obvio si se observa el gráfico de una función constante. ➔

ii) $f(x) = mx + b$ ➔



Solución

La derivada en cada punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en ese punto. Pero siendo f una función lineal, en todo punto, la recta tangente a la gráfica es ella misma, luego $f'(x) = m \ \forall x \in \mathbf{R}$

Analíticamente :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[m(x+h) + b] - (mx + b)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{mx + mh + b - mx - b}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{mh}{h} = m.$$

$f(x)$	$f'(x)$	
k	0	
$mx+b$	m	
x	1	
x^2	$2x$	
x^3	$3x^2$	
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in R$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	
sen x	cos x	
cos x	-sen x	
e^x	e^x	
ln x	$\frac{1}{x}$	
a^x	$a^x \ln a$	

Ejercicio

Probar que si $f(x) = x^3$ entonces $f'(x) = 3x^2$.

Puede demostrarse que si $f(x) = x^\alpha$ ($\alpha \in$ **R**) entonces $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.
O bien

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Mediante el cálculo del límite del cociente incremental puede demostrarse que:

$$(\text{sen } x)' = \cos x \; ; \; (\cos x)' = -\text{sen } x \; ; \; (e^x)' = e^x \; ; \; (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

← Anotamos las derivadas de las funciones más usadas en una tabla.

Ejemplo 4

$$(x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}\, x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(\frac{x^2 x^{1/2}}{x^{1/3}}\right) = (x^{13/6})' = \frac{13}{6}\, x^{7/6}$$

Reglas de derivación

Veamos ahora cómo podemos calcular las derivadas de funciones como:

$$3x^4 \; ; \; x^2 + 5 \text{ sen } x \quad \text{o} \quad 3e^x - \cos x + 4x^6$$

Vayamos de a poco:

Calculemos en general la derivada de $g(x) = k.f(x)$ suponiendo que conocemos $f'(x)$.

$$(k.f(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{k.f(x+h) - k.f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k.[f(x+h) - f(x)]}{h} =$$

$$= k \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k.f'(x).$$

Se sigue entonces que:

$$(k.f(x))' = k.f'(x)$$

Ejemplo 5

Calcular las derivadas de las siguientes funciones

i) $f(x) = 3x^4$
$(3x^4)' = 3(x^4)' = 12x^3$

ii) $f(x) = 5 \cos x$
$(5 \cos x)' = 5.(\cos x)' = 5.(-\text{sen } x) = -5.\text{sen } x$

O O O Derivada de una suma

Calculemos la derivada de $[f(x) + g(x)]$ suponiendo conocidas las derivadas de f y de g.

$$(f(x) + g(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

Se tiene entonces que:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Advertencia

Para obtener estas fórmulas estamos usando propiedades del límite que no son demostradas en este curso. El objetivo, de todas formas, es mostrar que las reglas de derivación que estamos dando se obtienen de la definición de derivada.

Ejemplo 6

Calcular la derivada de $f(x) = x^2 + 5 \ln x$

$$(x^2 + 5 \ln x)' = (x^2)' + (5 \ln x)' = 2x + 5\left(\frac{1}{x}\right) = 2x + \frac{5}{x}$$

O O O Derivada del producto y del cociente

Análogamente se obtienen las siguientes igualdades:

$$(f(x) \,.\, g(x))' = f'(x) \,.\, g(x) + f(x) \,.\, g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \,.\, g(x) - f(x) \,.\, g'(x)}{(g(x))^2}$$

Ejemplo 7

Calcular $f'(x)$ en cada caso:

i) $f(x) = (\ln x) \,.\, (x^3 + 2x)$

$$f'(x) = (\ln x)'.(x^3 + 2x) + (\ln x).(x^3 + 2x)' = \frac{1}{x}(x^3 + 2x) + (\ln x).(3x^2 + 2) =$$
$$= (x^2 + 2) + (\ln x).(3x^2 + 2)$$

ii) $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{3x^2 + 1}$

$$f'(x) = \frac{(\text{sen } x)'.(3x^2 + 1) - (\text{sen } x).(3x^2 + 1)'}{(3x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{(\cos x).(3x^2 + 1) - (\text{sen } x).(6x)}{(3x^2 + 1)^2}$$

iii) $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{(\operatorname{sen} x)'.(\cos x) - (\operatorname{sen} x).(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{(\cos x).(\cos x) - (\operatorname{sen} x).(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Ejercicio

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva:

$f(x) = \ln x + x^2.e^x$ en el punto $(1 , f(1))$.

Solución

Como ya sabemos, la ecuación de la recta tangente viene dada por la fórmula:

$$y - f(1) = f'(1).(x - 1)$$

Debemos conocer pues cuánto valen $f(1)$ y $f'(1)$.

$$f(1) = \ln 1 + 1^2 e^1 = e$$

Para calcular $f'(1)$ usaremos las reglas de derivación:

$$f'(x) = (\ln x + x^2 e^x)' = (\ln x)' + (x^2 e^x)' = \frac{1}{x} + 2xe^x + x^2e^x = \frac{1}{x} + (2 + x)\, xe^x$$

Entonces $f'(1) = 1 + (2+1)\, 1\, e^1 = 1 + 3e$

Así, la ecuación de la recta tangente en $(1 , e)$ es:

$$y - e = (1 + 3e).(x - 1)$$

o bien

$$y = (1 + 3e)\, x - (1+2e)$$

Regla de la cadena

Veremos a continuación cómo derivar una composición de funciones. Calculando por definición la derivada de $f \circ g\,(x) = f(g(x))$ se llega a la siguiente igualdad:

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x))\,.\,g'(x)$$

Esta se conoce con el nombre de **Regla de la cadena**. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 8

Calcular la derivada de la función: $f(x) = (x^2 + 3x)^3$

Solución

f es la composición de las funciones:

$$x \xrightarrow[h]{\text{Elevar al cuadrado y sumar el triple}} x^2 + 3x \xrightarrow[g]{\text{elevar al cubo}} (x^2 + 3x)^3$$

Es decir: $f(x) = (g \circ h)(x)$ siendo $h(x) = x^2 + 3x$ y $g(x) = x^3$.
Comenzamos derivando la última función que se aplicó, esto es "elevar al cubo" y la evaluamos en h(x):

$$3.(x^2 + 3x)^2$$

después se multiplica por la derivada de la primera función:

$$(x^2 + 3x)' = 2x + 3$$

el resultado es: $f'(x) = ((x^2 + 3x)^3)' = 3(x^2 + 3x)^2 .(2x + 3)$

Ejemplo 9

Calcular la derivada de $f(x) = \sqrt{5 + 8x}$

Solución

Esta función es composición de las siguientes funciones:

$$x \longrightarrow 5 + 8x \longrightarrow \sqrt{5 + 8x}$$

procediendo como en el ejemplo anterior su derivada será:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{5 + 8x}} (5 + 8x)' = \frac{1}{2\sqrt{5 + 8x}} 8 = \frac{4}{\sqrt{5 + 8x}}$$

Esta regla también puede aplicarse para más de dos funciones, derivando siempre paso a paso y evaluando en lo mismo en que se estaba evaluando.

Ejemplo 10

Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

i) $f(x) = \ln (2x^2 + 5)$

Solución

f es composición de las siguientes funciones:

$$x \longrightarrow 2x^2 + 5 \longrightarrow \ln (2x^2 + 5)$$

Por lo tanto su derivada es:

$$f'(x) = \frac{1}{2x^2 + 5} (2x^2 + 5)' = \frac{4x}{2x^2 + 5}$$

ii) $f(x) = \text{sen}^3 (x^2 + 7x)$

Solución

Podemos pensar en la función f como composición de tres funciones:

$$x \longrightarrow x^2 + 7x \longrightarrow \text{sen}\,(x^2 + 7x) \longrightarrow [\text{sen}\,(x^2 + 7x)]^3$$

Resulta entonces que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3.\text{sen}^2(x^2 + 7x).[\text{sen}\,(x^2 + 7x)]' = \\ &= 3.\text{sen}^2(x^2 + 7x).\cos(x^2 + 7x).(x^2 + 7x)' = \\ &= 3.\text{sen}^2(x^2 + 7x).\cos(x^2 + 7x).(2x + 7) \end{aligned}$$

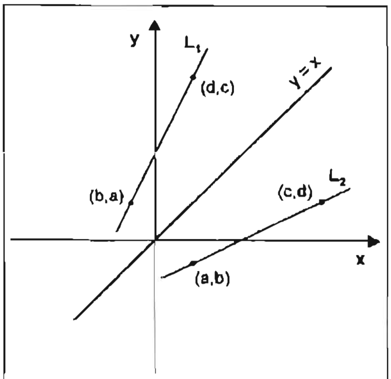
iii) $f(x) = (x^2 + \frac{1}{x})^5\, e^x$

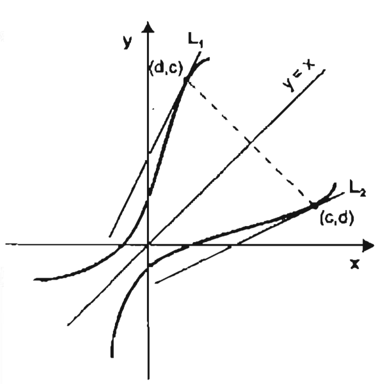
Solución

En este caso, f es el producto de las funciones $g(x) = e^x$ y $h(x) = (x^2 + \frac{1}{x})^5$, siendo h una composición. Por lo tanto, la derivada de f será:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(x^2 + \tfrac{1}{x})^5]'.e^x + (x^2 + \tfrac{1}{x})^5.(e^x)' = \\ &= 5.(x^2 + \tfrac{1}{x})^4.(x^2 + \tfrac{1}{x})'.e^x + (x^2 + \tfrac{1}{x})^5.e^x = \\ &= 5.(x^2 + \tfrac{1}{x})^4.(2x + \tfrac{-1}{x^2}).e^x + (x^2 + \tfrac{1}{x})^5.e^x \end{aligned}$$

Derivada de la función inversa





Veamos qué relación hay entre la derivada de una función biyectiva y la de su inversa; (por ejemplo: de $f(x) = x^2$ y de $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, o de $f(x) = e^x$ y de $f^{-1}(x) = \ln x$).

Recordemos que el gráfico de una función y el de su inversa son simétricos respecto de la recta y = x.

Observemos lo que sucede cuando una recta L_1 de pendiente no nula se refleja sobre la recta y = x. Si la pendiente de L_1 es m_1 entonces la pendiente de L_2 es $m_2 = \frac{1}{m_1}$ pues:

$$m_1 = \frac{d-b}{c-a} = \frac{1}{\frac{c-a}{d-b}} = \frac{1}{m_2}$$

Supongamos ahora que L_1 y L_2 son las rectas tangentes a los gráficos de una función f en (c , d) y de su inversa f^{-1} en (d , c), respectivamente. Concluimos entonces que:

$$[f^{-1}]'(d) = \frac{1}{f'(c)} \quad \text{con } c = f^{-1}(d), \text{ siempre que } f'(c) \neq 0.$$

Comprobemos que es válido para funciones inversas con derivada conocida.
Sean $f(x) = e^x$ y $f^{-1}(x) = \ln x$.
Sabemos que $f'(x) = (e^x)' = e^x$ y que $[f^{-1}]'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

Entonces se verifica que $(\ln)'(e) = [f^{-1}]'(e) = \frac{1}{e} = \frac{1}{f'(1)}$

Ejemplo 11

Hallar la derivada de arcsen x.

Solución

Como arcsen x es la función inversa de la función sen x, si $x \in [-1, 1]$ vale que sen(arcsen x) = x.
Entonces, si $y = f^{-1}(x) = \text{arcsen } x$ con $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, se tiene que

$$(\text{arcsen})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\text{arcsen } x)} \qquad (*)$$

Si $y = \text{arcsen } x$, $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y por lo tanto $\cos y \geq 0$; como además $\cos^2 y + \text{sen}^2 y = 1 \Rightarrow$

$$\cos^2 y = 1 - \text{sen}^2 y \Rightarrow \cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y}$$

Volviendo a (*) ,tenemos:

$$(\text{arcsen})'(x) = \frac{1}{\cos(\text{arcsen } x)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 y}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - [\text{sen}(\text{arcsen } x)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

O O O Derivadas sucesivas

La derivada $f'(x)$, como ya dijimos, es una función. Como tal, podemos derivarla y obtener una nueva función definida en los puntos en donde exista esta derivada. Llamaremos a esta función derivada segunda de f y la notaremos $f''(x)$. O sea que:

$$f''(x) = (f'(x))'$$

De la misma manera en que definimos derivada segunda podemos definir derivada tercera (derivando f''), derivada cuarta, etc.

O O O Aceleración

Así como la velocidad es la derivada de la función posición con respecto al tiempo, o la "razón instantánea de cambio" de la posición con respecto al tiempo, se llama aceleración a la "razón instantánea de cambio" de la velocidad. Es decir que si $y = f(t)$ describe la ecuación de movimiento de un móvil con respecto al tiempo entonces:

$f'(t)$ es la velocidad del móvil en el instante t
$f''(t)$ es la aceleración del móvil en el instante t

Ejemplo 12

Hallar $f''(x)$ y $f'''(x)$ en cada caso

i) $f(x) = 3x^4$

Solución

Calculamos, en primer lugar, $f'(x)$:

$$f'(x) = (3x^4)' = 12x^3$$

Para obtener f'' volvemos a derivar:

$$f''(x) = (12x^3)' = 36x^2$$

Entonces $f''(x) = 36x^2$.
Para calcular f''' derivamos f'' :

$$f'''(x) = 72x.$$

ii) $f(x) = \text{sen } 2x$

Solución

$$f'(x) = 2.\cos 2x$$
$$f''(x) = (2.\cos 2x)' = -4.\text{sen } 2x$$
$$f'''(x) = (-4.\text{sen } 2x)' = -8.\cos 2x$$

Ejemplo 13

En cierto instante los móviles cuyas ecuaciones de movimiento son, respectivamente:

$$s(t) = t^3 - 45t + 100 \quad \text{y} \quad e(t) = 3t^2 + 60t - 439$$

(donde s y e están medidos en metros y t en segundos)
están en el mismo lugar y marchan con la misma velocidad. Decir cuál es ese instante y hallar los valores correspondientes de la posición, de la velocidad y de la aceleración de cada uno de ellos.

Solución

Si las velocidades coinciden deberá ocurrir que:

$$s'(t) = e'(t) \text{ o sea } 3t^2 - 45 = 6t + 60$$

Resolviendo esta ecuación resulta que $t = 7$ o $t = -5$.
Dado que $s(7) = e(7) = 128$, resulta que a los 7 segundos ambos se encuentran a 128 metros del punto de partida y sus velocidades coinciden:

$$s'(7) = e'(7) = 102 \text{ m/seg.}$$

Para hallar la aceleración calculamos la derivada segunda de las funciones s y e:

$$s''(t) = 6t \quad \text{y} \quad e''(t) = 6.$$

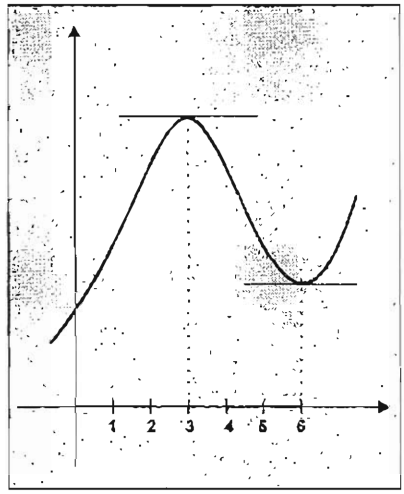
Luego, las aceleraciones respectivas cuando $t = 7$ son:

$$s''(7) = 42 \text{ m/seg}^2 \quad \text{y} \quad e''(7) = 6 \text{ m/seg}^2$$

Ahora que ya sabemos calcular derivadas y además sabemos qué representa, podemos usar toda esta información para graficar aproximadamente funciones, estudiar intervalos de crecimiento y de decrecimiento y para encontrar máximos y mínimos.

Volvamos a observar el gráfico de la función f dada al comienzo de este capítulo. ➔

(observar que corresponde a una función derivable. ¿Por qué?)



Si recorremos la curva $y = f(x)$ de izquierda a derecha (es decir en el sentido en que crece x) vemos que en $x = 1$ y en $x = 2$ las pendientes de las rectas tangentes son positivas ($f'(1) > 0$ y $f'(2) > 0$) y corresponden a puntos en los que "la curva se eleva" , es decir, aumentan los valores de y: la función es creciente.

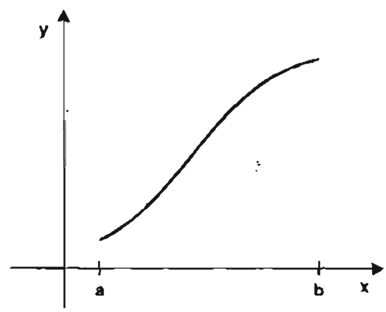
Por el contrario, en $x = 4$ y en $x = 5$ las pendientes de las rectas tangentes son negativas ($f'(4) < 0$ y $f'(5) < 0$) y corresponden a puntos en los que "la curva desciende", es decir, disminuyen los valores de y: la función es decreciente.

Observemos también que en $x = 3$ la función f tiene un máximo relativo y en $x = 6$ tiene un mínimo relativo, y que en ambos casos los puntos correspondientes del gráfico tienen rectas tangentes horizontales (de pendiente nula); es:

$$f'(3) = f'(6) = 0.$$

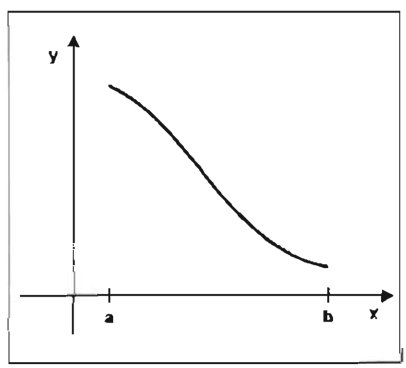
O O O Crecimiento y decrecimiento

Podemos decir que para $f: (a , b) \to \mathbf{R}$ derivable:

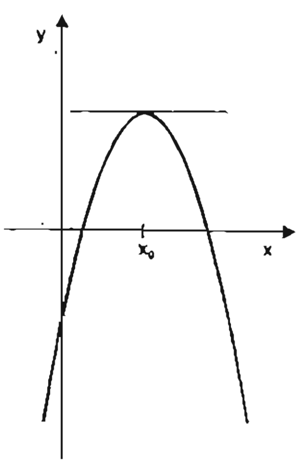


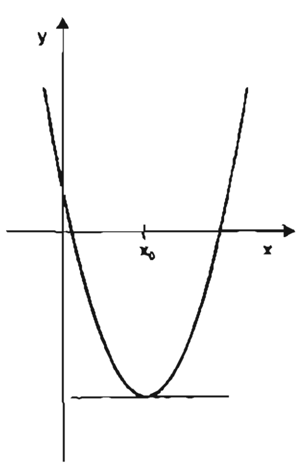
- Si las rectas tangentes al gráfico de f tienen pendientes positivas, esto es, si $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a , b)$ entonces f es creciente en (a , b) ➔

- Si las rectas tangentes al gráfico de f tienen pendiente negativa, esto es, si $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a , b)$, entonces f es decreciente en (a , b) ➔

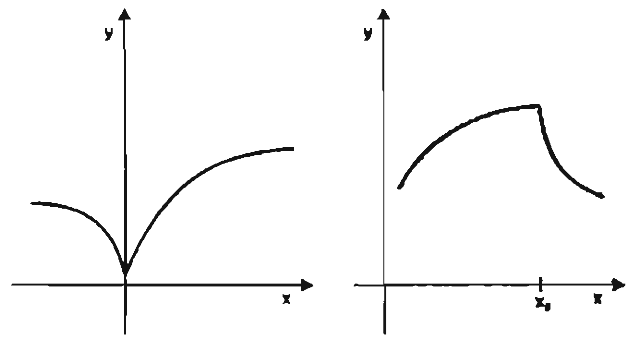


- Si x_0 es un máximo o un mínimo local de la función f entonces $f'(x_0) = 0$.





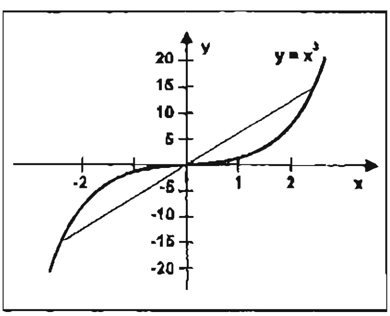
Puede ocurrir que el gráfico de f sea como alguno de los siguientes



f alcanza máximos o mínimos en puntos donde no es derivable. Concluimos entonces que si x_0 es un máximo o un mínimo de f deberá ocurrir alguna de las siguientes situaciones:

a) No existe $f'(x_0)$
b) $f'(x_0) = 0$

Puntos críticos



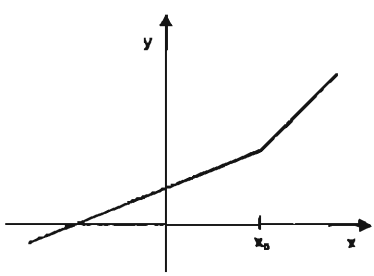
Llamaremos puntos críticos a los puntos que satisfacen alguna de las dos condiciones anteriores, es decir

Puntos críticos de $f = \{x \mid \text{no existe } f'(x)\} \cup \{x \mid f'(x) = 0\}$

Todo extremo de una función (máximo o mínimo) es un punto crítico, pero no todo punto crítico es un extremo. Vemos unos ejemplos:

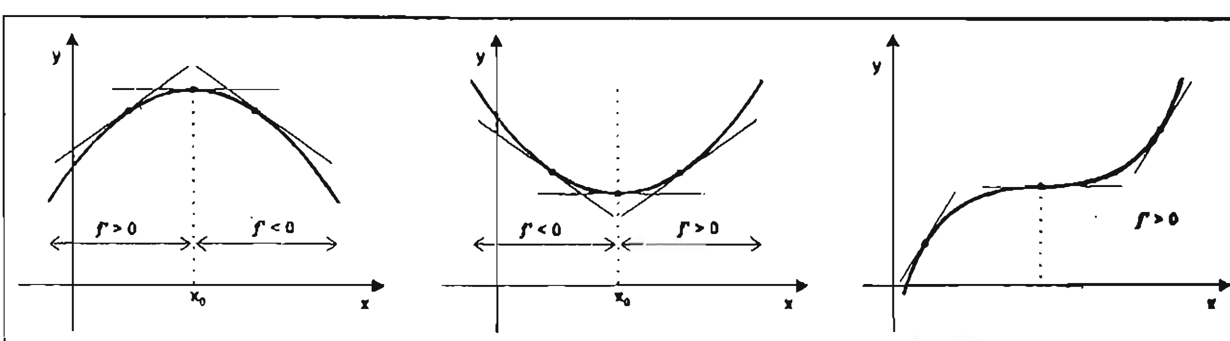
Considerando $f(x) = x^3$. Dado que $f'(x) = 3x^2$, vale que $f'(0) = 0$. Es decir $x_0 = 0$ es un punto crítico de f.

← Como podemos observar en el gráfico, 0 no es un máximo ni un mínimo de f.



← Si f es la función del gráfico vemos que x_0 es un punto crítico de f, pues no existe $f'(x_0)$, pero x_0 no es máximo ni mínimo.

Luego, para hallar los extremos de una función, se buscan los candidatos, que son los puntos críticos. Lo que decide si un punto crítico es o no un extremo es que la función cambie su crecimiento a la izquierda y a la derecha del punto crítico. Por ejemplo:



○○○ Criterio de la primera derivada

Es decir que si:

$f'(x) < 0$ a la izquierda de x_0
$f'(x) > 0$ a la derecha de x_0 $\Rightarrow$ x_0 es mínimo relativo de f

$f'(x) > 0$ a la izquierda de x_0
$f'(x) < 0$ a la derecha de x_0 $\Rightarrow$ x_0 es máximo relativo de f

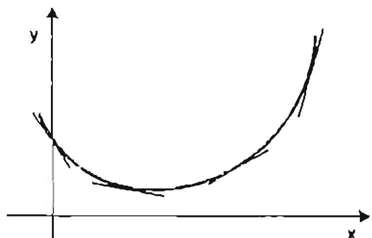
$f'(x) > 0$ a derecha y a izquierda de x_0 $\Rightarrow$ x_0 no es máximo ni mínimo de f

$f'(x) < 0$ a derecha y a izquierda de x_0 $\Rightarrow$ x_0 no es máximo ni mínimo de f

○○○ Criterio de la segunda derivada

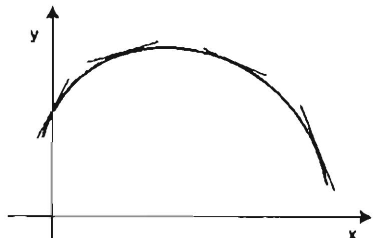
Para decidir si en un punto crítico x_0 hay un máximo o un mínimo relativo, en el caso en que x_0 sea un punto de derivabilidad de f, se puede usar a veces el "criterio de la segunda derivada" que pasamos a enunciar.

Si $f''(x_0) > 0$ (siendo f'' continua) resulta que f' es creciente. Como $f'(x_0) = 0$ las pendientes de las rectas pasan creciendo de negativas a positivas, esto es, las rectas tangentes son como en la figura. ➔
Así, en x_0 hay un **mínimo**.



f' creciente

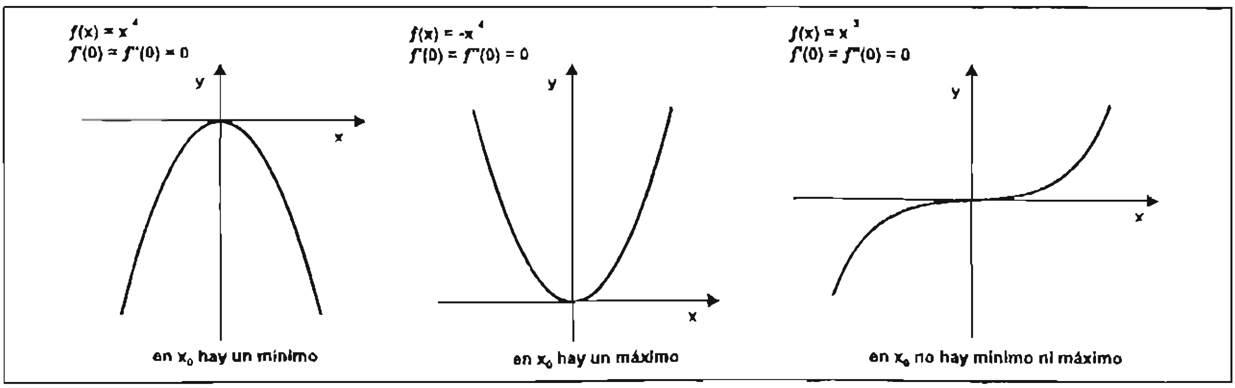
Si $f''(x_0) < 0$ (siendo f'' continua) f' es decreciente. Como $f'(x_0) = 0$ resulta que las pendientes de las rectas pasan decreciendo de positivas a negativas, esto es, las rectas tangentes son como en la figura. ➔
Así, en x_0 hay un **máximo**.



f' decreciente

Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) = 0$ puede haber un máximo o un mínimo o no haber máximo ni mínimo.

Esto puede verse en los siguientes ejemplos: ↓



Es decir,

Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$ $\Rightarrow$ x_0 es un mínimo relativo
Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$ $\Rightarrow$ x_0 es un máximo relativo
Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) = 0$ $\Rightarrow$ el criterio no sirve.

En resumen, para analizar máximos y mínimos de f hay que:
(*) Buscar $\{x / f'(x) = 0\}$ y $\{x$ / no existe $f'(x)\}$
(*) Analizar el signo de $f'(x)$ entre cada par de puntos críticos consecutivos; o analizar el signo de f'' en cada punto crítico.
(*) Decidir cuáles son máximos, cuáles son mínimos, y cuáles no son máximos ni mínimos.

Observación:

Para hallar los puntos críticos de una función que es derivable en todo su dominio basta resolver la ecuación

$$f'(x) = 0$$

Una clase importante de funciones derivables en todo punto está constituida por las funciones polinómicas.

Ejemplo 14

Hallar los máximos y los mínimos de $f(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x + 1$
Trazar un gráfico aproximado de f.

Solución

Como f es un polinomio, es derivable $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Los puntos críticos serán los x tales que $f'(x) = 0$. Calculemos f'.

$$f'(x) = 12x^2 - 30x + 12$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \text{ ó } x = \frac{1}{2}$$

Obtuvimos entonces que el conjunto de puntos críticos es $\{2, \frac{1}{2}\}$.

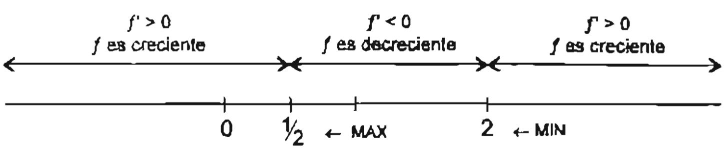
Veamos si corresponden o no a extremos de f. Para ello, analizaremos el crecimiento y decrecimiento de la función a la derecha y a la izquierda de cada punto crítico. Dado que f' es una función cuadrática con coeficiente $a = 12 > 0$ que se anula en 2 y en $\frac{1}{2}$ resulta que:

si $x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente.

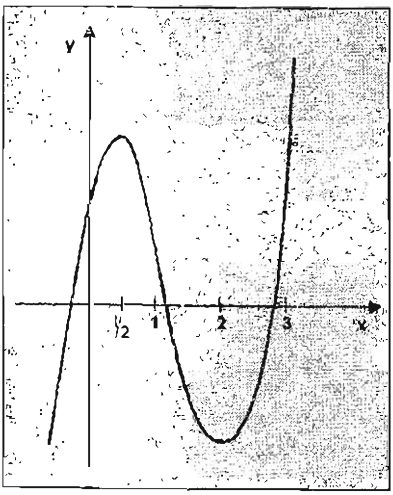
si $x \in (\frac{1}{2}, 2) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente.

si $x \in (2, +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente.

En resumen tenemos que:



Para trazar un gráfico aproximado de f calculamos los valores de f en los extremos: $f(\frac{1}{2}) = \frac{15}{4}$ y $f(2) = -3$.



← entonces tenemos el gráfico de f

Podríamos haber clasificado los puntos críticos de f usando el criterio de la segunda derivada:

$$f''(x) = (12x^2 - 30x + 12)' = 24x - 30$$

Evaluamos la segunda derivada en los puntos críticos.

$$f''(2) = 24.(2) - 30 = 18 > 0 \Rightarrow 2 \text{ es mínimo relativo.}$$

$$f''(\frac{1}{2}) = 24\,(\frac{1}{2}) - 30 = -18 < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \text{ es máximo relativo.}$$

Ejemplo 15

Trazar un gráfico aproximado de $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$.

Solución

f es un polinomio, por lo tanto dom(f) = **R** y es derivable para todo $x \in$ **R**.
La derivada de f es

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2\,(x - 3)$$

de modo que los puntos críticos de f son: $x = 0$ y $x = 3$
Estudiemos el crecimiento y el decrecimiento de f en **R**
Como $f'(x) = 4x^2\,(x - 3)$ y dado que $4x^2 > 0 \ \forall\ x \neq 0$ concluimos que

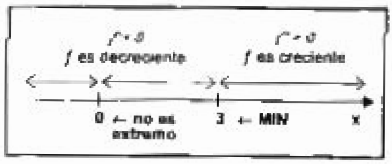
si $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente.

si $x \in (0, 3) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente.

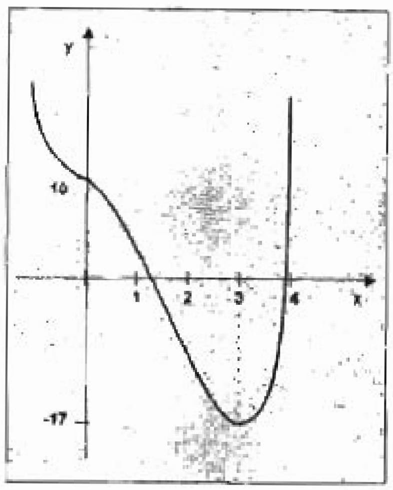
si $x \in (3, +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente.

Dado que f es decreciente tanto a la derecha como a la izquierda de $x = 0$ concluimos que en 0 no hay máximo ni mínimo para f, como f es decreciente *a la izquierda* de $x = 3$ y creciente a la derecha resulta que f tiene un mínimo en 3

Resumiendo, hasta aquí sabemos →



Como $f(0) = 10$ y $f(3) = -17$ obtenemos el gráfico →



Si utilizamos el criterio de la derivada segunda para clasificar los puntos críticos, debemos analizar el signo de f'' en $x = 0$ y $x = 3$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x \quad \text{entonces}$$

$$f''(3) = 36 > 0 \text{ de donde 3 es un mínimo local de } f.$$

$$f''(0) = 0; \text{ luego, este criterio no sirve para decidir.}$$

Ejemplo 16

Estudiar la función sen x.

Solución

Queremos hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales. Aprovechando la periodicidad de la función, analizaremos su comportamiento sólo para $x \in [0, 2\pi]$

(sen x)' = cos x, por lo tanto nos interesa ver para qué valores de $x \in [0, 2\pi]$ es positivo el coseno. Esto sucede para los valores del primer y del cuarto cuadrante, es decir, $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

El coseno es negativo en el segundo y en el tercer cuadrante, o sea, para $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Se anula si $x = \frac{\pi}{2}$ ó $x = \frac{3\pi}{2}$.

Por lo tanto, la función sen x es creciente en $(0, \frac{\pi}{2})$ y en $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, y es decreciente en $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

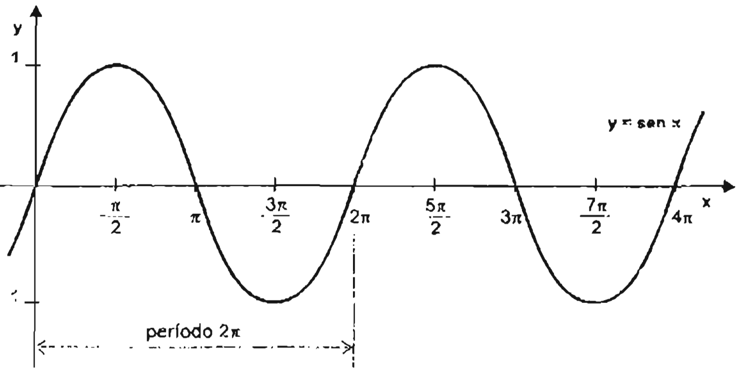
En $x = \frac{\pi}{2}$ la función pasa de ser creciente a ser decreciente, y por lo tanto hay un máximo.

Por la periodicidad, resulta que sen x es creciente en los intervalos $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ con $k \in \mathbf{Z}$, y es decreciente en los $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$ con $k \in \mathbf{Z}$. Además, tiene máximos en los puntos en que la función cambia de creciente a decreciente, o sea en $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Tiene mínimos donde la función pasa de decreciente a creciente, o sea en $x_k = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

El valor máximo es: $\text{sen}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 1$ $(k \in \mathbf{Z})$.

El mínimo es: $\text{sen}(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = -1$ $(k \in \mathbf{Z})$.



Ejemplo 17

Para $f(x) = \frac{16}{x^2 + 4}$ hallar los extremos y trazar un gráfico.

Solución

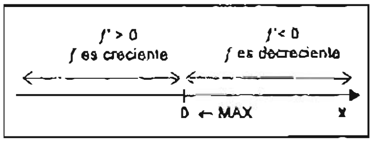
Calculemos f' para encontrar los puntos críticos de f. $f'(x) = \frac{-32x}{(x^2 + 4)^2}$

Dado que f' esta definida para todo $x \in \mathbf{R}$, los puntos críticos de f serán los que verifican que $f'(x) = 0$. Por lo tanto el único punto crítico es $x = 0$.
Como el denominador de f' es positivo para todo $x \in \mathbf{R}$ resulta que:

si $x \in (-\infty, 0)$ $\Rightarrow$ $f'(x) > 0$ $\Rightarrow$ f es creciente.

si $x \in (0, +\infty)$ $\Rightarrow$ $f'(x) < 0$ $\Rightarrow$ f es decreciente.

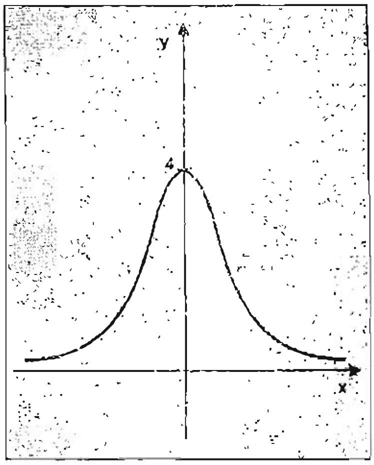
En resumen, tenemos que →



Concluimos entonces que f tiene un máximo en $x = 0$.
Antes de trazar un gráfico aproximado de f observemos que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto su gráfico no interseca al eje x.

Además $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0.$

Es decir que la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de f.
Luego, aproximadamente, el gráfico de f es →



Ejemplo 18

Trazar un gráfico aproximado de $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x$ para $x \in [-\pi, \pi]$.

Solución

f es derivable $\forall$ x, luego los puntos críticos serán los puntos con derivada nula.

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x - 2 \operatorname{sen} 2x = 0 \Leftrightarrow 2(\cos x - 2 \operatorname{sen} x \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

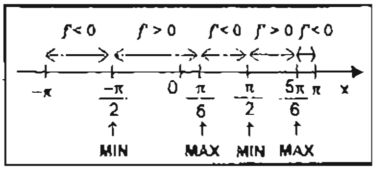
$$\Leftrightarrow 2\cos x\,(1 - 2\operatorname{sen} x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ó } \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

Los puntos críticos son, por lo tanto:

$$\{x \in [-\pi, \pi] \,/\, \cos x = 0\} \cup \{x \in [-\pi, \pi] \,/\, \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}\}$$

$$\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\} \cup \{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$$

Si estudiamos el signo de f' resulta que →



Concluimos que f es creciente en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6})$ y en $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6})$

y es decreciente en $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$, en $(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2})$ y en $(\frac{5\pi}{6}, \pi)$.

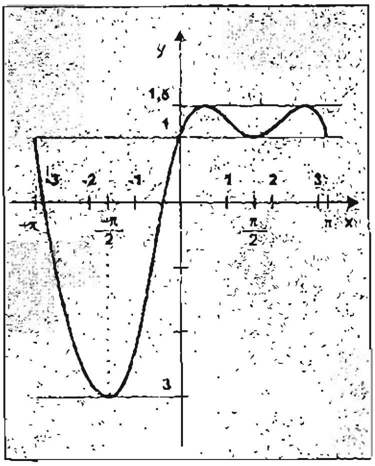
f tiene máximos locales en $x = \frac{\pi}{6}$ y en $x = \frac{5\pi}{6}$

f tiene mínimos locales en $x = -\frac{\pi}{2}$ y en $x = \frac{\pi}{2}$.

Calculamos los valores de f en los puntos críticos y en los extremos del intervalo, obteniendo:

$$f(-\frac{\pi}{2}) = -3 \;;\; f(\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{2} \;;\; f(\frac{\pi}{2}) = 1 \;;\; f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{3}{2} \;;\; f(-\pi) = f(0) = f(\pi) = 1$$

Con lo cual el gráfico de f resulta aproximadamente →



Dado que f es periódica de período 2π, si queremos hallar el gráfico de f en $\mathbb{R}$ habrá que repetir el gráfico obtenido en cada intervalo de amplitud 2π (por ejemplo: de π a 3π, de 3π a 5π, etc.)

Ejemplo 19

Trazar un gráfico aproximado de $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Solución

Comencemos por observar que dom(f) = R - {0}. Dado que:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \quad y \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

resulta que el eje y es una asíntota vertical de f.
Calculemos los puntos críticos de f, para esto calculamos su derivada.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

Vemos que f' esta definida para todo $x \neq 0$ (o sea $\forall\ x \in$ dom(f)) y que además $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ó $x = -1$.
Observando que el denominador de f' es siempre positivo y recordando que la función no está definida en x = 0 obtenemos que:

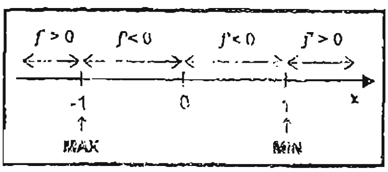
si $x \in (-\infty, -1) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente.

si $x \in (-1, 0) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente.

si $x \in (0, 1) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente.

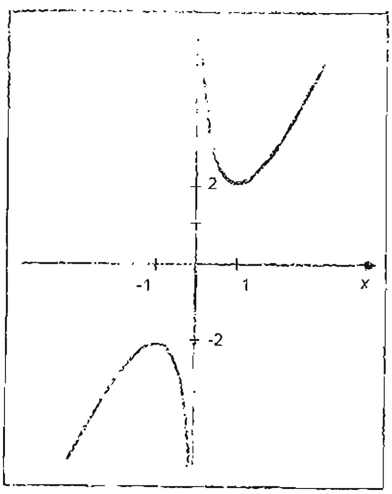
si $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente.

Es decir que obtuvimos la siguiente información:
←



Por consiguiente, f tiene un máximo en x = -1 y un mínimo en x = 1. Para trazar un gráfico aproximado de f calculamos $f(-1) = 2$ y $f(1) = -2$ y tendremos

←



Ejemplo 20

Trazar un gráfico aproximado de la función $f(x) = 1 - x^{2/3}$.

Solución

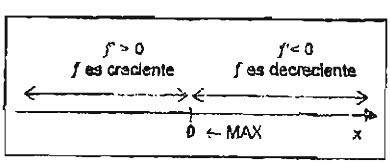
Observemos que dom(f) = R y que $f(-1) = f(1) = 0$.

$$f'(x) = \frac{-2}{3} x^{-1/3} = \frac{-2}{3x^{1/3}}$$

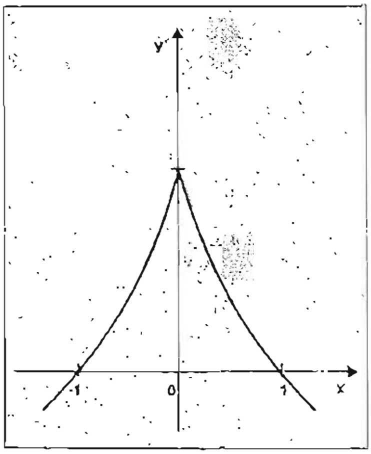
por lo tanto para x = 0 no existe f'. Dado que la derivada de f es siempre distinta de cero, concluimos que el único punto crítico es x = 0.
Estudiando el signo de f' obtenemos que:

si $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente.

si $x \in (0, +\infty) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente.
←



Luego el gráfico de f es



Ejemplo 21

Trazar un gráfico aproximado de $f(x) = x.e^{x/2}$.

Solución

f es derivable para todo x; luego, dado que

$$f'(x) = e^{x/2} + \frac{x}{2}e^{x/2} = e^{x/2}\left(1 + \frac{x}{2}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{x}{2} = 0 \text{ (pues } e^{x/2} > 0 \ \forall x) \Leftrightarrow x = -2.$$

Por otra parte:

si $x \in (-\infty, -2) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente.

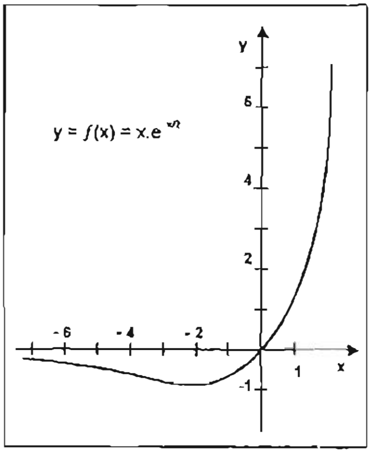
si $x \in (-2, +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente.

luego f tiene un mínimo en x = -2 y vale $f(-2) = \frac{-2}{e}$.

Observemos que $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, es decir que el gráfico de f corta al eje x solamente en (0 , 0); además $f(x) > 0 \ \forall x > 0$ y $f(x) < 0 \ \forall x < 0$. El eje x es una asíntota horizontal a izquierda:

Si bien decidir que: $\lim\limits_{x \to -\infty} x.e^{x/2} = 0$ está fuera del alcance de este curso, podemos convencernos de esto haciendo uso de la calculadora. Por ejemplo:

$$f(-100) = -1{,}9287498 \ 10^{-20} \quad \text{y} \quad f(-200) = -1{,}860038 \ 10^{-46}$$



Ejemplo 22

Trazar un gráfico aproximado de $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

Solución

Dado que dom(f) = **R** - {2 , -2}, calculamos:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

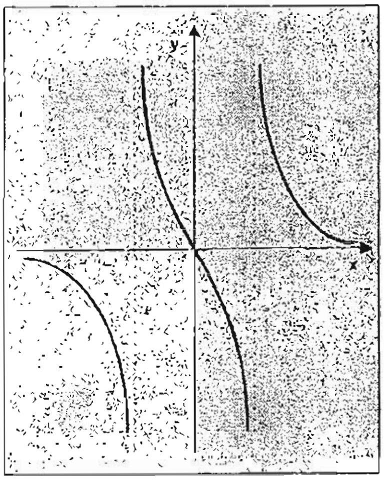
$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$$

Tenemos entonces que las rectas x = 2 y x = -2 son asíntotas verticales de f.
La derivada de f es:

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 4) - 2x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-(x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^2}$$

de donde concluimos que $f'(x) < 0 \ \forall x \in \mathbf{R} - \{-2, 2\}$. Es decir que f es decreciente en $(-\infty, -2)$, en $(-2, 2)$ y en $(2, +\infty)$. Por lo tanto f no tiene máximo ni mínimo.

Dado que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$



y como 0 es el único punto donde f corta al eje x obtenemos:

Veamos cómo todo lo estudiado hasta aquí sirve para resolver problemas de máximos y mínimos. Para ello, en primer lugar hay que construir una función f cuyos máximos o mínimos resuelvan el problema considerado. Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 23

Una firma comercial puede vender x kg de azúcar por mes a un precio de y pesos por kg, siendo $y = 10 - \frac{x}{8000}$. Hallar cuántos kg debe vender para que el ingreso mensual por la venta del axúcar sea máximo.

Solución

La cantidad de pesos ingresada mensualmente es $R = x \cdot y$; por lo tanto:

$$R(x) = x\,(10 - \frac{x}{8000}) \qquad (x > 0)$$

Derivamos la función R para encontrar el máximo:

$$R'(x) = (10 - \frac{x}{8000}) + x\,(\frac{-1}{8000}) = 10 - \frac{x}{4000}$$

De donde x = 40000 es un punto crítico de R, que corresponde a un máximo pues $R''(x) = \frac{-1}{4000} < 0$ para todo x

Para obtener el máximo beneficio deberá vender mensualmente 40000 kg, y la ganancia será de: R(40000) = 200000 pesos.

Ejemplo 24

Entre todos los rectángulos de área igual a 16, hallar los de perímetro mínimo.

Solución

Sean x e y las longitudes de los lados del rectángulo. La función que queremos minimizar es:

$$\textit{perímetro del rectángulo} = 2x + 2y \qquad (x\,,\,y > 0) \quad (*)$$

Pero según los datos del problema debe verificarse que:

$$\text{área del rectángulo} = x.y = 16 \qquad \text{de donde debe ser} \quad y = \frac{16}{x}$$

Reemplazando en (*) obtenemos que la función a minimizar es:

$$p(x) = 2x + 2\,\frac{16}{x} = 2\,(x + \frac{16}{x}) \qquad (x > 0)$$

Calculemos la derivada de p

$$p'(x) = 2\,(1 - \frac{16}{x^2})$$

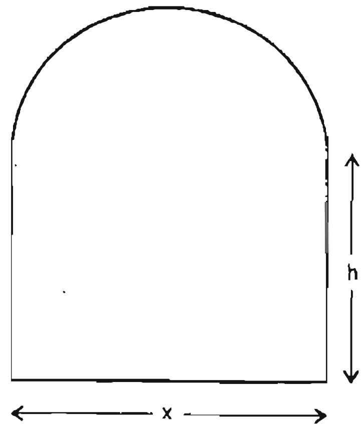
De donde concluimos que

$$p'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{16}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$$

Dado que debe ser $x > 0$, el único punto crítico que nos interesa analizar es $x = 4$.
Como en el intervalo $(0 , 4)$ vale que $p'(x) < 0$ y en el intervalo $(4 , +\infty)$ es $p'(x) > 0$ concluimos que en $x = 4$ la función p tiene un mínimo.
Por consiguiente, el rectángulo de área 16 que tiene perímetro mínimo es el cuadrado de lado 4.

Ejemplo 25

Se quiere construir una ventana que tenga la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo cuyo perímetro total sea de 12 metros. Hallar las dimensiones que debe tener la ventana si se quiere que deje pasar la mayor cantidad de luz posible.



Solución

Lo más difícil en este tipo de problemas es interpretar qué se nos está pidiendo y, consecuentemente, plantear la situación en términos matemáticos. En general, conviene leer el problema dos o tres veces e ir sacando la información que contiene el enunciado. Un dibujo suele ser de mucha ayuda.
Veamos: "una ventana de forma rectangular coronada por un semicírculo" es de la forma ➔

Para fijar ideas digamos que la longitud de la base mide x metros y que la altura del rectángulo es h metros. Nos informan que el perímetro mide 12 metros. El perímetro está formado por la base del rectángulo, sus dos laterales y la semicircunferencia; sus medidas son:

base	x	metros
laterales	$2h$	metros
semicircunferencia ($\frac{\pi \text{ diámetro}}{2}$)............	$\frac{\pi x}{2}$	metros
Perímetro total	$x + 2h + \frac{\pi x}{2}$	metros

Entonces

$$12 = x + 2h + \frac{\pi x}{2} \qquad (1)$$

Para que la ventana deje pasar "la mayor cantidad de luz posible" su superficie debe ser lo más grande posible. La superficie de la ventana puede calcularse sumando la del rectángulo más la del semicírculo.

Sup. rectángulo	xh	m^2
Sup. semicírculo ($\frac{\pi .(\text{radio})^2}{2}$)	$\frac{\pi}{2} (\frac{x}{2})^2$	m^2
Sup. ventana	$xh + \frac{\pi}{2} (\frac{x}{2})^2$	m^2 · (2)

Despejamos h de (1) y reemplazamos su valor en (2):

$$2h = 12 - x - \frac{\pi x}{2} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{24 - 2x - \pi x}{4}$$

Llamando S(x) a la superficie de la ventana tenemos en (2)

$$S(x) = x\ \frac{24 - 2x - \pi x}{4} + \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(24x - \frac{\pi}{2}x^2 - 2x^2\right) \quad (x > 0)$$

y lo que se quiere es encontrar el máximo de S. Para ello, derivamos S(x)

$$S'(x) = \frac{1}{4}(24 - 4x - \pi x) = 6 - \frac{(4 + \pi).x}{4}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - \frac{(4 + \pi).x}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{24}{4 + \pi}$$

Calculamos la segunda derivada para determinar si el valor de x hallado corresponde a un máximo tal cual queremos:

$$S''(x) = \frac{-(4 + \pi)}{4} < 0 \ \forall x$$, luego el x hallado es un máximo.

En consecuencia las dimensiones de la ventana son las siguientes

$$\text{base: } x = \frac{24}{4 + \pi} \qquad \text{altura: } h = \frac{24 - 2x - \pi x}{4} = \frac{12}{4 + \pi}$$

Ejemplo 26

Un productor de fruta sabe que en el momento actual puede vender 6 cajones semanales con una ganancia de \$10 por cajón. Si espera más tiempo, calcula que la producción aumentará a razón de 3 cajones por semana, pero al mismo tiempo el beneficio disminuirá en $\$\frac{5}{3}$ por cajón y por semana. ¿Cuántas semanas debe esperar para obtener la máxima ganancia?

Solución

Si t es el tiempo en semanas (t = 0 es la actualidad) entonces el beneficio será:

$$B = (\text{cant. de cajones}).(\text{precic por cajón}) = (6 + 3t).(10 - \frac{5t}{3}) = 60 + 20t - 5t^2$$

Calculamos B' para hallar los puntos críticos.

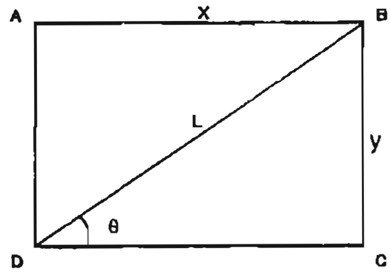
$$B'(t) = 20 - 10t$$

Por lo tanto $B'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Dado que $B''(t) = -10 < 0$ para todo valor de t, resulta que t = 2 es el valor máximo de la función B.
El productor deberá esperar 2 semanas para obtener el máximo beneficio.

Ejemplo 27

Se desea construir un cilindro juntando los lados AD y BC de un rectángulo que se recortará de una placa de material elástico. Para hacer más resistente al cilindro se colocará un alambre de longitud fija L, según la diagonal del rectángulo. Calcular el ángulo θ para el cual el volumen del cilindro es máximo, y determinar las longitudes de los lados del rectángulo. ➔



Solución

Llamando $x = |AB|$, $y = |BC|$, tenemos que $L^2 = x^2 + y^2$.

$$\frac{x}{L} = \cos\theta \quad \Rightarrow \quad x = L\cos\theta.$$

$$\frac{y}{L} = \operatorname{sen}\theta \quad \Rightarrow \quad y = L\operatorname{sen}\theta.$$

Volumen del cilindro = Superficie de la base por altura.
Superficie de la base = πr^2.
No conocemos r, pero sí la longitud de la circunferencia, que es x.

Por lo tanto: $2\pi r = x = L\cos\theta$, de donde $r = \dfrac{L\cos\theta}{2\pi}$

Además, la altura del cilindro es y.
Reemplazando en la fórmula del volumen:

$$V(\theta) = \pi\left(\frac{L\cos\theta}{2\pi}\right)^2 L\operatorname{sen}\theta = \frac{L^3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta}{4\pi}$$

Queremos que el volumen sea máximo:

$$V'(\theta) = \frac{L^3}{4\pi}\,[2\cos\theta\,(\cos\theta)'\operatorname{sen}\theta + \cos^2\theta\,(\operatorname{sen}\theta)'\,] =$$

$$= \frac{L^3}{4\pi}\,[-2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta + \cos^3\theta\,] = 0$$

Esto equivale a:

$$\cos^3\theta - 2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta = 0$$

$$\cos\theta\,(\cos^2\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta) = 0$$

Para que un producto se anule, alguno de los factores debe ser cero:

$$\cos\theta = 0 \quad \text{o bien} \quad \cos^2\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta = 0$$

$\cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; \theta = \dfrac{\pi}{2}$. En este caso no hay rectángulo pues la diagonal coincide con un lado.

Por lo tanto, debe ser:

$$\cos^2\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta = 0$$

$$\cos^2\theta = 2\operatorname{sen}^2\theta$$

Pero $\quad 1 = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 2\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 3\operatorname{sen}^2\theta.$

Entonces:

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{3}\,;\ \operatorname{sen}\theta > 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\theta = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0{,}615479708$. Llamaremos α a este valor.

Sabemos que $\cos^2 \alpha = 2 \operatorname{sen}^2 \alpha$.

Calculemos la derivada segunda para ver si en el punto crítico α hay un máximo:

$$V''(\theta) = \frac{L^3}{4\pi} [-2 (-\operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen}^2 \theta - 2 \cos \theta \, 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + 3 \cos^2 \theta (-\operatorname{sen} \theta)] =$$

$$= \frac{L^3}{4\pi} [2 \operatorname{sen}^3 \theta - 4 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta - 3 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta)] =$$

$$= \frac{L^3}{4\pi} [2 \operatorname{sen}^3 \theta - 7 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta]$$

Especializando en α se obtiene $V''(\alpha) = \dfrac{-12 L^3}{4\pi} \operatorname{sen}^3 \alpha < 0$
Por lo tanto, hay un máximo.
Las longitudes pedidas son:

$$x = L \cos \alpha = L \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = L \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$y = L \operatorname{sen} \alpha = L \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Capítulo IX

Integrales

○○○ Primitiva

En todo lo que sigue f y g: [a , b] $\rightarrow$ **R** son funciones continuas.
Decimos que G:(a , b) $\rightarrow$ **R** es una primitiva o una antiderivada de g si

$$G'(x) = g(x) \quad \forall \; x \in (a\,,\,b)$$

Ejemplo 1

Hallar una primitiva de $g(x) = x^2$

Solución

Si $g(x) = x^2$, una primitiva de g es una función tal que su derivada sea g. Al tanteo vemos que si derivamos x^3 obtenemos

$$(x^3)' = 3x^2$$

que "se parece" bastante a x^2 (nos sobra el 3 que multiplica).
Si recordamos que cuando derivamos las constantes multiplicativas "salen afuera", proponemos como primitiva a

$$G(x) = \frac{x^3}{3}$$

y, en efecto, cuando la derivamos:

$$G'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$$

Ejemplo 2

Hallar una primitiva de $g(x) = \cos x$

Solución

Debemos recordar qué función nos da cos x al derivarla. Mirando una tabla de derivadas se observa que

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$$

Luego una primitiva de cos x es $G(x) = \operatorname{sen} x$

Ejemplo 3

Hallar una primitiva de $g(x) = x^n$ $n \in \mathbf{R}$, $n \neq -1$

Solución

Sabemos que $(x^{n+1})' = (n+1).x^n$. (¡Un múltiplo de g(x)!)
Multiplicando x^{n+1} por una constante, tendremos una primitiva de la función g. Pongamos $G(x) = \lambda.x^{n+1}$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Debe ser $g(x) = G'(x) = \lambda.(x^{n+1})' = \lambda.(n+1)x^n$

Como $g(x) = x^n$, hace falta $\lambda.(n+1) = 1$, y de aquí, $\lambda = \dfrac{1}{n+1}$

Concluimos que $G(x) = \dfrac{1}{n+1}\, x^{n+1}$ es una primitiva para x^n, cualquiera sea $n \neq -1$,

$$G(x) = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1}$$

Observaciones

1) Encontrar una primitiva de una función es, a priori, más difícil que encontrar su derivada, ya que no se cuenta con reglas similares a las de derivación. Pensemos en algo tan simple como $f(x) = x.\text{sen } x$ o $f(x) = x^{-1}.\ln x$. Sin embargo, podemos pensar a la antiderivada como una suerte de "operación inversa" de la derivación y así construir una tabla elemental de primitivas a partir de una tabla de derivadas. De hecho, tablas de primitivas existen y son de mucha utilidad en la práctica. En una parte de esta guía presentamos algunas técnicas (métodos) que permiten encontrar primitivas de algunas funciones.

2) Es fácil observar que no hay una sola primitiva. Si en lugar de $G(x) = \text{sen } x$ (ejemplo 2) ponemos $F(x) = \text{sen } x + 5$ tenemos que

$$F'(x) = (\text{sen } x + 5)' = \cos x$$

con lo cual F también es una primitiva. Esto sucede siempre: si a una primitiva le sumamos una constante, al derivar, ésta desaparece. Es cierto, sin embargo, que dos primitivas no pueden diferir en mucho: si F y G son primitivas de una función g, debe ser

$$(F - G)' = F' - G' = g - g = 0$$

con lo cual a $(F - G)(x)$ no le queda otra posibilidad más que ser una constante.
En síntesis: dos primitivas de una función difieren en una constante aditiva.

Integral indefinida

Al conjunto de primitivas de una función g se lo llama integral indefinida de g y se nota

$$\int g(x)dx$$

Es por ello que usualmente escribimos $\int g(x)dx = G(x) + K$ siendo K una constante (llamada constante de integración) y $G'(x) = g(x)$.

Por ejemplo: $\int x^2\, dx = \dfrac{x^3}{3} + K$

Quiere decir que las funciones $\frac{x^3}{3}$; $\frac{x^3}{3}+2$; $\frac{x^3}{3}-\pi$; $\frac{x^3}{3}-\frac{7}{9}$; etc., son primitivas de x^2.
Por lo dicho más arriba para encontrar la integral indefinida de g basta con encontrar una primitiva ya que todas las demás se obtienen sumándole constantes a ésta.

Ejemplo 4

Hallar una función cuyo gráfico pase por el punto (1 , 5) y tal que la pendiente de la recta tangente al gráfico en cada punto sea igual a $G(x) = 3x^2$

Solución

Sea G la función buscada. Sabemos que $G'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente al gráfico de G en $(x_0 , G(x_0))$; por lo tanto debemos hallar G tal que

$$G'(x) = g(x) \quad \text{y} \quad G(1) = 5$$

Es decir, tenemos que hallar una primitiva de g. Procediendo como en los ejemplos anteriores obtenemos:

$$G(x) = x^3 + K$$

Dado que $G(1) = 5 = 1 + K \Rightarrow K = 4$

Por lo tanto, la función buscada es:

$$G(x) = x^3 + 4$$

O O O Velocidad y aceleración

Hemos visto que la noción de derivada puede ser interpretada cinéticamente como la velocidad de un móvil que describe un recorrido $f(t)$, donde t es el tiempo. Análogamente, vimos que la derivada de la velocidad nos da la aceleración del móvil (ver Capítulo 8). Un problema de la física es: conociendo la velocidad (o la aceleración), averiguar la posición del móvil en cada instante t.

Ejemplo 5

Calcular la posición a los 10 segundos de un móvil que recorre un camino recto, si se sabe que en el instante inicial se encontraba a 3 m del origen del camino y la velocidad en cada instante viene dada por $v(t) = 6t^2$ m/seg.

Solución

La posición $f(t)$ es la primitiva de v(t) con la condición $f(0) = 3$ (en el instante inicial se encuentra a 3 m). Calculamos pues

$$\int v(t)\, dt = \int 6t^2\, dt = 6\frac{t^3}{3} + C$$, donde C es una constante

La constante de integración C queda determinada por la condición inicial

$$3 = f(0) = \frac{0^3}{3} + C = C \Rightarrow C = 3.$$

En consecuencia, la posición en cada instante t viene dada por $f(t) = 2t^3 + 3$. Como t está medido en segundos y $f(t)$ en metros, a los 10 segundos el móvil se encontrará a $f(10)$ metros del origen del camino, esto es

$$f(10) = (2.10^3 + 3)\ m = 2003\ m$$

Propiedad de linealidad

De las propiedades que tiene la derivada, se deduce la propiedad de linealidad de la integral indefinida, a saber

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$$

Ejemplo 6

Calcular $\int (3x^2 + 5 \operatorname{sen} x)\, dx$

Solución

$$\int (3x^2 + 5 \operatorname{sen} x) dx = 3 \int x^2\, dx + 5 \int \operatorname{sen} x\, dx = 3(\frac{x^3}{3}) + 5\,(-\cos x) + C =$$

$$= x^3 - 5 \cos x + C$$

Ejemplo 7

Un móvil se desplaza por un camino recto. Se sabe que la aceleración en el instante t (t se mide en horas) viene dada por $a(t) = t(t-200)$ km/h^2. Si en el instante $t = 0$ el móvil se encuentra en la posición $s_0 = 50$ km y parte a una velocidad de 20km/h, ¿Cuál es la posición s(t) para $0 \leq t \leq 200$?

Solución

Si s(t) es la posición (en km) del móvil en el instante t, la velocidad en el mismo instante es $v(t) = s'(t)$ (en km/h) y la aceleración en el instante t es $a(t) = v'(t) = s''(t)$. Nuestro problema se reduce a encontrar s(t), sabiendo que:

(1) $\quad v(t) = \int a(t)\, dt \qquad v(0) = 20$km/h

(2) $\quad s(t) = \int v(t)\, dt \qquad s(0) = 50$ km

Integramos:

$$v(t) = \int t(t-200)\, dt = \int (t^2 - 200t)\, dt = \int t^2\, dt - 200 \int t\, dt = \frac{1}{3}t^3 - 200\,(\frac{1}{2}t^2) + C =$$

$$= \frac{1}{3}t^3 - 100\,t^2 + C$$

C es tal que $v(0) = 20 \Rightarrow C = 20$

Así, la velocidad en km/h en el instante t es

$$v(t) = \frac{1}{3}t^3 - 100\,t^2 + C$$

Reemplazando en (2):

$$s(t) = \int(\frac{1}{3}t^3 - 100t^2 + 20)\,dt = \frac{1}{3}\int t^3\,dt - 100\int t^2\,dt + 20\int dt =$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{t^4}{4} - 100\,.\,\frac{t^3}{3} + 20t + C$$

En fin, obtenemos

$$s(t) = \frac{1}{12}t^4 - \frac{100}{3}t^3 + 20t + C$$

donde C es tal que s(0) = 50, de modo que haciendo t = 0 se tiene C = 50

Así, la posición del móvil a las t horas será

$$s(t) = (\frac{1}{12}t^4 - \frac{100}{3}t^3 + 20t + 50)\text{km}$$

Ejemplo 8

Calcular las siguientes integrales:

a) $\int\sqrt{x}(2x - \sqrt{x})\,dx = \int 2x\sqrt{x}\,dx - \int\sqrt{x}\sqrt{x}\,dx = 2\int x^1 x^{1/2}\,dx - \int x^{1/2}x^{1/2}\,dx =$

$= 2\int x^{3/2}\,dx - \int x\,dx = 2\frac{2x^{5/2}}{5} - \frac{1}{2}x^2 + C = \frac{4}{5}x^{5/2} - \frac{1}{2}x^2 + C$

b) $\int(-\cos x + \frac{1}{3\sqrt[3]{x}} + e^x)\,dx = -\int\cos x\,dx + \frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx + \int e^x\,dx =$

$= -\int\cos x\,dx + \frac{1}{3}\int x^{-1/3}\,dx + \int e^x\,dx =$ por el ejemplo 3 y dado que

$(\text{sen } x)' = \cos x$ y $(e^x)' = e^x$ resulta:

$= -\text{sen } x + \frac{1}{3}\frac{x^{-1/3+1}}{-\frac{1}{3}+1} + e^x + C = -\text{sen } x + \frac{1}{3}\frac{3x^{2/3}}{2} + e^x + C =$

$= -\text{sen } x + \frac{1}{2}x^{2/3} + e^x + C \qquad C \in \mathbf{R}$

O O O Método de sustitución

Consiste en la introducción de una nueva variable con el objeto de reducir el problema de integrar una composición de funciones a integrar una función más sencilla.

Supongamos tener que calcular:

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$$

Si conocemos una primitiva F de f, entonces F∘g es una primitiva de $f(g(x))g'(x)$. En efecto, mediante la regla de la cadena derivamos F∘g:

$$(F\circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

Luego, $\int f(g(x))g'(x)\,dx = (F\circ g)(x) + C$

Veamos la utilidad de este método en la práctica.

Ejemplo 9

Calculemos $\int \cos(x^2).2x\,dx$

Solución

Como la derivada de x^2 es $2x$, considerando $g(x) = x^2$ y $f(x) = \cos(x)$, podemos escribir $\cos(x^2).2x = f(g(x))g'(x)$. Por lo tanto, basta obtener una primitiva para $f(x) = \cos x$, por ejemplo: $F(x) = \operatorname{sen} x$, Entonces:

$$\int \cos(x^2).2x\,dx = F(g(x)) + C = \operatorname{sen}(x^2) + C$$

Ejemplo 10

Calculemos $\int \operatorname{sen}^3 x \ \cos x\,dx$

Solución

Como la derivada de sen x es cos x, tomando

$$g(x) = \operatorname{sen} x \quad y \quad f(x) = x^3$$

podemos escribir

$$\operatorname{sen}^3 x \,.\, \cos x = f(g(x))g'(x)$$

y, usando que $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$ es una primitiva de f, resulta:

$$\int \operatorname{sen}^3 x \,.\, \cos x\,dx = F(g(x)) + C = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + C$$

Observación

Si miramos la fórmula

$$\int f(\overbrace{g(x)}^{u})\ \overbrace{g'(x)\,dx}^{du} = F(\overbrace{g(x)}^{u}) + C$$

donde F es una primitiva de f, lo que nos sugiere es que nos "olvidemos" de g y de g', encontremos una primitiva F de f y evaluemos F en g(x) para obtener una primitiva de $f(g(x))g'(x)$.
Esto nos induce llamar u a g(x) y, en lugar de $g'(x)\,dx$, escribir du. Es decir

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du =$$

$$= F(u) + C = F(g(x)) = C$$

Repasamos entonces los pasos de este método:

a) Llamar u a g(x) y sustituir todas las g(x) por u en la integral.
b) Sustituir $g'(x)\,dx$ por du.
c) Calcular la $\int f(u)\,du$ como si u fuese, simplemente, la variable de integración (obteniendo una integral que depende de u).
d) Reemplazar u por g(x) en la integral obtenida en c).

Ejemplo 11

Otra vez.
Resolvamos nuevamente el ejemplo 9 y calculemos

$$\int \cos(x^2).2x\,dx$$

Llamando

$$u = x^2 \ , \ du = (x^2)'\,dx = 2x\,dx \ , \ \cos(x^2) = \cos u$$

Entonces

$$\int \cos(x^2).2x\,dx = \int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C = \operatorname{sen}(x^2) + C$$

Ejemplo 12

Calculemos:

a) $\int \frac{12x^3+5}{3x^4+5x-3}\,dx$

Como la derivada de $3x^4 + 5x - 3$ es $12x^3 + 5$, si tomamos

$$u = 3x^4 + 5x - 3 \quad \Rightarrow \quad du = (12x^3 + 5)\,dx$$

$$\int \frac{12x^3+5}{3x^4+5x-3}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln|3x^4+5x-3| + C$$

b) $\int \frac{\text{sen}(\ln x)}{x}\,dx$. Aquí resulta natural proponer $u = \ln x$ pues $\frac{\text{sen}(\ln x)}{x} =$

$= \text{sen}(\ln x).\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{x}$ es la derivada de ln x.

Así, si $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x}\,dx$ y entonces:

$$\int \frac{\text{sen}(\ln x)}{x}\,dx = \int \text{sen}(\ln x).\frac{1}{x}\,dx = \int \text{sen}\,u\,du = -\cos u + C =$$

$= -\cos(\ln x) + C$

Observación

A veces se tiene $\int f(g(x))\,dx$ siendo $g'(x) = k$ $(k \neq 0)$. En estos casos procederemos así:

$$\int f(g(x))\,dx = \int f(g(x))\,\frac{1}{k}\,k\,dx =$$
$$= \frac{1}{k}\int f(g(x))\,k\,dx = \frac{1}{k}\int f(u)\,du$$

Ejemplo 13

Calculemos:

a) $\int \text{sen}\,2x\,dx$

Llamamos $u = 2x$, $du = 2\,dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\,du$

$$\int \text{sen}\,2x\,dx = \int \text{sen}(u)\,\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int \text{sen}\,u\,du = \frac{1}{2}(-\cos u) + C =$$

$= -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

b) $\int \text{tg}\,x \,.\, \ln(\cos x)\,dx$

Como $\text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}$ y $\text{sen}\,x = -(\cos x)'$, la sustitución natural parece ser

$u = \cos x$ ($du = -\text{sen}\,x\,dx$), de modo que:

$$\int \text{tg}\,x\ \ln(\cos x)\,dx = \int -\frac{\ln(\cos x)}{\cos x}(-\text{sen}\,x)\,dx = -\int \frac{\ln u}{u}\,du \qquad (1)$$

A priori, no se nos ocurre una primitiva para $\frac{\ln u}{u}$.
Encontraremos una después de hacer una nueva sustitución.

En efecto, recordemos que $\frac{1}{u}$ es la derivada de ln u.

Si $t = \ln u$, $dt = \frac{1}{u}\,du$ y $(1) = -\int t\,dt = -\frac{t^2}{2} + C$, volviendo a reemplazar t por ln u, queda:

Un comentario importante

Contrariamente a lo que ocurre para derivadas, el cálculo de primitivas es un proceso que admite verificación inmediata. Es por ello que, dada $f(x)$, es casi imperdonable proponer como primitiva de f a una función que al ser derivada no de f. Si bien aquí no se muestra explícitamente, siempre hemos realizado la verificación de que las soluciones halladas en cada caso sean efectivamente primitivas de las funciones propuestas.

$$(1) \quad = -\frac{\ln^2 u}{2} + C \underset{u = \cos x}{\overset{\uparrow}{=}} -\frac{1}{2}\ln^2(\cos x) + C$$

c) $\int \text{sen}^{-2}(-3x)\, dx$

Tomando $u = -3x$; $du = -3\, dx \Rightarrow \int \frac{1}{\text{sen}^2(-3x)}\, dx = \int \frac{(-1/3)\, du}{\text{sen}^2 u} =$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{du}{\text{sen}^2 u} \quad (A)$$

Ahora bien, una primitiva de $-\frac{1}{\text{sen}^2 u}$ es cotg u ; entonces:

$$(A) = \frac{1}{3}\int -\frac{1}{\text{sen}^2 u}\, du = \frac{1}{3}\text{cotg}\, u + C = \frac{1}{3}\text{cotg}\,(-3x) + C$$

Integración por partes

Otro método, ampliamente utilizado para tratar el problema de integración, se basa en la regla de derivación del producto.
Si u y v son funciones derivables entonces:

$$[u(x).v(x)]' = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$$

Usando la linealidad de la integral resulta:

$$\int [u(x).v(x)]'\, dx = \int u'(x).v(x)\, dx + \int u(x).v'(x)\, dx$$

y como u(x).v(x) es una primitiva de [u(x).v(x)]' obtenemos:

$$u(x).v(x) = \int u'(x).v(x)\, dx + \int u(x).v'(x)\, dx$$

O bien:

$$\int u(x).v'(x)\, dx = u(x).g(x) - \int u'(x).g(x)\, dx$$

Cuando $f(x)$ pueda escribirse como un producto u(x).v'(x); y puedan encontrarse v y una primitiva para u'(x).v(x); calcularemos $\int f(x)\, dx$ usando este método. La dificultad que -en general- encontraremos será la de elegir convenientemente v'(x) y u(x).

Ejemplo 14

Calcular $\int x.\text{sen}\, x\, dx$

Solución

Si consideramos

$$u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$$
$$v'(x) = \text{sen}\, x \Rightarrow v(x) = -\cos x$$

Entonces

$$\int \underbrace{x}_{u} \,.\, \underbrace{\text{sen}\, x}_{v'}\, dx = \underbrace{x}_{u} \,.\, \underbrace{(-\cos x)}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'} \,.\, \underbrace{(-\cos x)}_{v}\, dx$$

$$= -x \cos x + \int \cos x\, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C$$

¿Qué pasaría si hubiéramos elegido al revés, es decir:

$$u(x) = \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \cos x$$
$$v'(x) = x \quad \Rightarrow \quad v(x) = \frac{x^2}{2}$$

Así

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{sen} x - \int \frac{x^2}{2} \cos x\, dx \qquad (*)$$

y calcular $\int \frac{x^2}{2} \cos x\, dx$ parece más complicado que calcular $\int x \operatorname{sen} x\, dx$
Por lo tanto, si bien la igualdad (*) es cierta, esta elección no nos simplifica el problema.

Ejemplo 15

Calcular $\int x^2 e^x\, dx$

Solución

Si consideramos

$$u(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 2x$$
$$v'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad v(x) = e^x$$

$$\int \underbrace{x^2}_{u}\ \underbrace{e^x}_{v'}\, dx = \underbrace{x^2}_{u} . \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{2x}_{u'}\ \underbrace{e^x}_{v}\, dx$$

Como vemos, queda para calcular una nueva integral. Utilizando, nuevamente, el método de integración por partes resulta:

$$u(x) = x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 1$$
$$v'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad v(x) = e^x$$

$$\int x\ e^x\, dx = x\ e^x - \int 1\ e^x\, dx = x\ e^x - e^x + C$$

Luego

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2[xe^x - e^x] + C = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x[x^2 - 2x + 2] + C$$

Ejemplo 16

Calcular $\int \ln x\, dx$

Solución

Aquí el integrando no parece un producto de funciones; sin embargo, lo es:

$$\ln x = 1.\ln x$$

Eligiendo u' = 1; v = ln x, hacemos un intento de integración por partes:

$$u' = 1 \ \Rightarrow \ u = x \ ; \ v = \ln x \ \Rightarrow \ v' = \frac{1}{x}$$

Entonces

$$\int \ln x\, dx = \int \underbrace{1}_{u'} . \underbrace{\ln x}_{v}\, dx = \underbrace{x}_{u} . \underbrace{\ln x}_{v} - \int \underbrace{x}_{u} . \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'}\, dx =$$

$$= x.\ln x - \int dx = x.\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

Ejemplo 17

Calcular $\int x^2 . \ln x^{-1}\, dx$

Solución

Si tomamos $u = x^2$; $v' = \ln x^{-1}$, aparece la necesidad de encontrar v. ¿Qué función tiene derivada $\ln x^{-1}$?
Hagamos mejor:

$u' = x^2 \quad \Rightarrow \quad$ (por ejemplo) $u = \frac{1}{3} x^3$

$$v = \ln x^{-1} \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{1}{x^{-1}} (x^{-1})' = \frac{1}{x^{-1}} (-1)\, x^{-1-1} = \frac{1}{\frac{1}{x}} (-1)\, x^{-2} =$$
$$= - \frac{x}{x^2} = - \frac{1}{x}$$

> **Observación**
>
> La combinación de los métodos expuestos aquí permite resolver una importante colección de integrales indefinidas. Sin embargo existen funciones muy sencillas (y muy importantes en las aplicaciones) que no tienen una primitiva expresable en términos de funciones elementales. Por ejemplo, la función $f(x) = e^{(-x)^2}$ no tiene una primitiva expresable como combinación de funciones elementales. Esta función, conocida como función de Gauss, es de vital importancia en la teoría de errores y en la Estadística.

Apliquemos ahora el método:

$$\int \underbrace{x^2}_{u'} . \underbrace{\ln x^{-1}}_{v}\, dx = \underbrace{\frac{1}{3} x^3}_{u} . \underbrace{\ln x^{-1}}_{v} - \int \underbrace{\frac{1}{3} x^3}_{u} . \underbrace{(- \frac{1}{x})}_{v'}\, dx =$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \ln (\frac{1}{x}) + \frac{1}{3} \int x^2\, dx = \frac{1}{3} x^3 \ln (\frac{1}{x}) + \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \ln (\frac{1}{x}) + \frac{1}{9} x^3 + C = \frac{1}{3} x^3 [\ln (\frac{1}{x}) + \frac{1}{3}] + C$$

Ejemplo 18

Calcular $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$

Solución

Si tomamos $\quad u = e^x \quad \Rightarrow \quad u' = e^x$
$\quad v' = \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad v = - \cos x$

y aplicamos el método de integración por partes

$$\int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\operatorname{sen} x}_{v'}\, dx = \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{(-\cos x)}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{u'} (-\cos x)\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx \quad (1)$$

Para calcular $\int e^x \cos x\, dx$ aplicamos nuevamente el método de integración por partes, llamando

$u = e^x \quad \Rightarrow \quad u' = e^x$
$v' = \cos x \quad \Rightarrow \quad v = \operatorname{sen} x$

$$\int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\cos x}_{v'} \, dx = \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\operatorname{sen} x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{u'} \underbrace{\operatorname{sen} x}_{v} \, dx$$

Reemplazando en (1) se obtiene:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

Con lo cual

$$2 \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x (\operatorname{sen} x - \cos x), \text{ y } \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x)$$

El método de integración por partes nos ha permitido obtener una primitiva de e^x sen x. Es

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

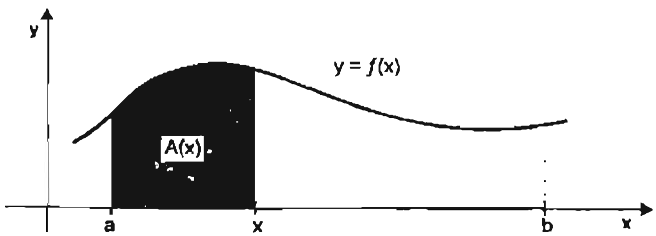
O O O Teorema fundamental del cálculo

Una de las aplicaciones más importantes de la integral es el cálculo de áreas. Esbozaremos aquí la conexión que existe entre la idea de área y la noción de integral.

Consideremos una función positiva f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ y continua.
Para cada $x \in [a, b]$ definimos

$A(x)$ = área comprendida entre el gráfico de f y el eje x en el intervalo $[a, x]$

Gráficamente

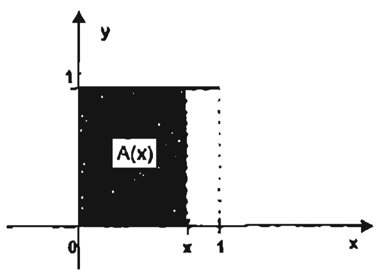


En estas condiciones podemos enunciar uno de los resultados más importantes del cálculo diferencial e integral.

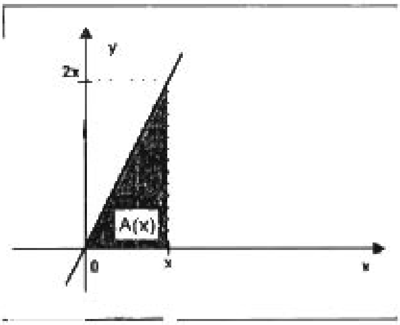
La función $A(x)$ es una primitiva de f. Es decir $A'(x) = f(x)$.
Antes de estudiar el caso general veamos algunos ejemplos simples:

Ejemplo 19

a) Sea f: $[0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ ➔



Entonces $A(x)$ = área del rectángulo de base x y altura $1 = x \cdot 1 = x$
Se verifica entonces que $A'(x) = x' = 1 = f(x)$



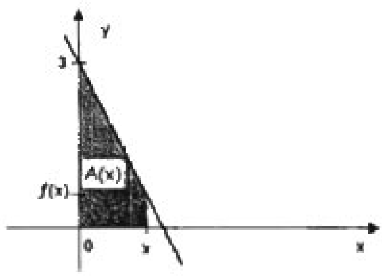
b) Sea f: $[0\,,+\infty) \to \mathbf{R}$ tal que $f(x) = 2x$

←

Entonces A(x) = área del triángulo de base x y altura

$$f(x) = \frac{x\,f(x)}{2} = \frac{2x^2}{2} = x^2$$

Tenemos entonces que $A'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$



c) Sea f: $[0\,,\frac{3}{2}] \to \mathbf{R}$ tal que $f(x) = -2x + 3$

←

Entonces A(x) = área del trapecio de bases 3 y $f(x)$ y altura x

$$A(x) = \frac{[3 + f(x)]\,.\,x}{2} = \frac{[3 + -2x + 3]\,.\,x}{2} = 3x - x^2$$

Resulta entonces que: $A'(x) = (3x - x^2)' = 3 - 2x = f(x)$.

Veamos ahora el caso general.

Argumentos a favor de la validez del teorema

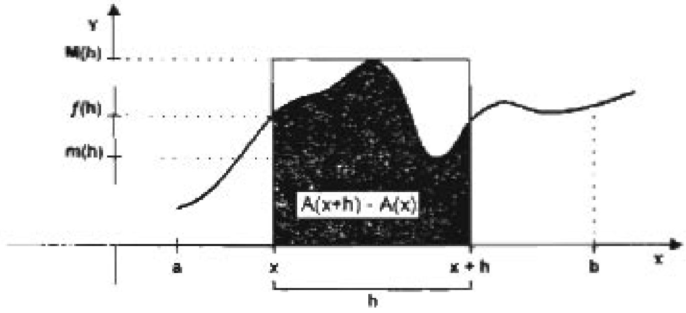
Debemos mostrar que $A'(x) = f(x)$.
Para ello vamos a calcular el cociente incremental

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

y observar qué sucede cuando h tiende a cero.
Es claro que

$A(x + h) - A(x)$ = área comprendida entre el gráfico de f y el eje x en el intervalo $[x\,,x+h]$

(Supongamos, para fijar ideas y sin perder generalidad, que $h > 0$)



Si definimos

$m(h)$ = mínimo valor de f en $[x\,,x+h]$
$M(h)$ = máximo valor de f en $[x\,,x+h]$

Observamos gráficamente que A(x+h) - A(x) se encuentra entre los valores de las áreas de los rectángulos de altura m(h) y M(h) respectivamente (ambos con base igual a h). Es decir.

$$\underset{\text{menor}}{\text{área del rectángulo}} \rightarrow h\, m(h) \leq A(x+h) - A(x) \leq h\, M(h) \leftarrow \underset{\text{mayor}}{\text{área del rectángulo}}$$

Dividiendo por h (h > 0) el cociente incremental queda entre m(h) y M(h), a saber

$$m(h) \leq \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \leq M(h)$$

Observe ahora el gráfico con atención y piense qué sucede con m(h) y M(h) cuando h tiende a cero:
El intervalo [x , x+h] se va "convirtiendo" en el punto x, con lo cual el máximo valor de f, y el mínimo también, se van acercando (gracias a la continuidad) a $f(x)$. Esto que afirmamos se puede demostrar analíticamente (no lo haremos aquí) y se escribe diciendo que

$$\lim_{h \to 0} m(h) = f(x) \qquad \lim_{h \to 0} M(h) = f(x)$$

Por lo tanto, el cociente incremental (que tiende a A'(x) cuando h tiende a cero) queda "atrapado" entre dos límites que valen $f(x)$. Es decir:

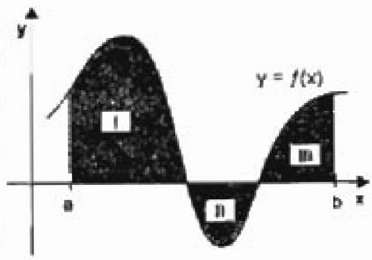
$$\begin{array}{ccccc} m(h) \leq & \dfrac{A(x+h) - A(x)}{h} & \leq M(h) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(x) \leq & A'(x) & \leq f(x) \end{array}$$

Concluimos que

$$A'(x) = f(x)$$

Observación

La restricción hecha al comienzo, de que f fuera positiva, se puso al sólo efecto de fijar ideas. La función f puede ser cualquier función continua si tenemos en cuenta, en la definición de A(x), que las áreas que quedan por encima del eje x se cuentan con signo positivo y las que están por debajo con signo negativo (para más detalles ver la bibliografía)



A(x) = I - II + III

○○○ Integral definida

El teorema fundamental del cálculo nos motiva a definir la integral definida de f entre a y b como el número A(b). Notaremos

$$A(b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

A "a" y a "b" se los llama límites de integración.

○○○ Regla de Barrow

En la práctica, basta encontrar cualquier primitiva F de f para hallar

$\int_a^b f(x)\, dx$. En efecto:

Como A y F son primitivas de f, difieren en una constante. Esto es:

$$F(x) = A(x) + C \qquad (1)$$

Pero, si recordamos la definición de A(x), observamos que A(a) = 0.
Si reemplazamos x por a en (1)

$$F(a) = A(a) + C = C \qquad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos que A(x) = F(x) - F(a), y por lo tanto será:

$$A(b) = F(b) - F(a)$$

En síntesis

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Esta igualdad, que vale para cualquier primitiva F de f, se conoce como **Regla de Barrow**, y sirve para calcular integrales definidas.

Ejemplo 20

Calcular $\int_{-2}^{1} x^2\,dx$

Solución

En el ejemplo 1, vimos que una primitiva de x^2 es $F(x) = \frac{x^3}{3}$

Entonces; la Regla de Barrow nos dice que

$$\int_{-2}^{1} x^2\,dx = F(1) - F(-2) = \frac{1^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{1+8}{3} = 3$$

En la práctica, escribimos:

$$\int_{-2}^{1} x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{1} = \frac{1^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = 3$$

Ejemplo 21

Calcular $\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx$

Solución

$$\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = (-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi} = (-\cos 2\pi) - (-\cos \pi) = -1 -1 = -2$$

Propiedades

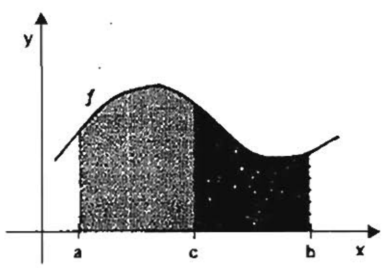
De la Regla de Barrow se pueden deducir algunas propiedades que son importantes para el cálculo de integrales definidas. En lo que sigue, F es una primitiva de f.

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ (pues F(a) - F(a) = 0)

2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ (pues F(b) - F(a) = - (F(a) - F(b)))

3) $\int_a^b [\alpha.f(x) + \beta.g(x)]\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$ (Linealidad)

4) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$



← Es decir que se puede calcular la integral a trozos. Esta propiedad vale aún cuando no se verifique a < c < b.

O O O Cambio de variable

Cuando calculamos una integral definida usando el método de sustitución, debemos tener cuidado con los límites de integración.

Si la integral a calcular es

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx$$

recordemos que una primitiva de $(f \circ g)(x).g'(x)$ es $(F \circ g)(x)$ donde F es una primitiva de f.

Podemos proceder de dos maneras:

Un camino:

Una vez hecha la sustitución se vuelve a la variable original, sin cambiar los límites de integración.
Esto es, usando la Regla de Barrow

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = F(g(b)) - F(g(a))$$

Otro camino:

Hecha la sustitución, se cambian los límites de integración sin volver a la variable original.
Llamando

$$u = g(x) \text{ resulta } du = g'(x)\ dx$$

Con esta sustitución

$$\text{cuando } x = a \text{ es } u = g(a)$$
$$\text{cuando } x = b \text{ es } u = g(b)$$

Entonces

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ du$$

y se resuelve la integral de la derecha.

Ejemplo 22

Calcular $\int_0^2 x\sqrt{2x^2+1}\ dx$

Solución

Usando el primer camino:
Calculamos primero una primitiva. Llamando

$$u = 2x^2 + 1 \text{ resulta } du = 4x\ dx$$

Resulta

$$\int x\sqrt{2x^2+1}\ dx = \int \sqrt{u}\ \frac{1}{4}\ du = \frac{1}{4}\int u^{1/2}\ du = \frac{1}{4}\ \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}\, u^{3/2} =$$

$$= \frac{1}{6}\,(2x^2+1)^{3/2}$$

Así

$$\int_0^2 x\sqrt{2x^2+1}\,dx = \frac{1}{6}(2x^2+1)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{1}{6}(9)^{3/2} - \frac{1}{6}(1)^{3/2} = \frac{27-1}{6} = \frac{13}{3}$$

Usando el segundo camino:
Hacemos

$$u = 2x^2 + 1 \text{ con lo cual } du = 4x\,dx$$

cambiamos los límites de integración

cuando $x = 0$ resulta $u = 1$
cuando $x = 2$ resulta $u = 9$

Entonces, sin volver a la variable original, calculamos

$$\int_0^2 x\sqrt{2x^2+1}\,dx = \int_1^9 \sqrt{u}\,\frac{1}{4}\,du = \frac{1}{6}u^{3/2}\Big|_1^9 = \frac{1}{6}(9)^{3/2} - \frac{1}{6}(1)^{3/2} =$$

$$= \frac{27-1}{6} = \frac{13}{3}$$

Por supuesto, los resultados coinciden usando uno u otro camino.

Ejemplo 23

a) Encontrar A, B, C, para que, si $u = 2t^3 + 1$, valga:

$$\int_{-2}^{1} t^2(2t^3+1)^2\,dt = \int_A^B C.u^2\,du$$

Solución

Si u es como se dijo, $du = 6t^2\,dt$; además, cuando

$$t = -2 \Rightarrow u = 2.(-2)^3 + 1 = -15$$
$$t = 1 \Rightarrow u = 2.(1)^3 + 1 = 3$$

Entonces:

$$\int_{-2}^{1}(2t^3+1)^2\,t^2\,dt = \int_{-2}^{1}(2t^3+1)^2\,\frac{1}{6}\,6t^2\,dt = \frac{1}{6}\int_{-15}^{3}u^2\,du$$

De aquí vemos que una posibilidad es tomar

$$A = -15\ ;\ B = 3\ ;\ C = \frac{1}{6}$$

b) Determinar A, B y C $\in$ **R** de modo que para toda función continua f: **R** $\rightarrow$ **R** sea cierto que:

$$\int_5^{10} f(x)\,dx = C\int_A^B f\!\left(\frac{t+1}{2}\right)dt$$

Apliquemos un cambio de variable en la integral de la derecha; si llamamos

$u = \frac{t+1}{2}$; $du = \frac{1}{2}dt$ además:

cuando $t = A \Rightarrow u = \frac{A+1}{2}$ y cuando $t = B \Rightarrow u = \frac{B+1}{2}$; entonces:

$$C\int_A^B f\left(\frac{t+1}{2}\right)\,dt = C\int_A^B 2.f\left(\frac{t+1}{2}\right)\frac{1}{2}\,dt = 2C\int_{\frac{A+1}{2}}^{\frac{B+1}{2}} f(u)\,du \quad = \quad (1)$$

Para que esta integral coincida, $\forall\, f$ continua, con $\int_5^{10} f(x)\,dx$, pedimos:

$$2C = 1 \qquad \frac{A+1}{2} = 5 \qquad \frac{B+1}{2} = 10$$

Tendremos así:

$(1) \;=\; \int_5^{10} f(u)\,du = \int_5^{10} f(x)\,dx$. Elegimos, por lo tanto:

$$C = \frac{1}{2} \qquad A = 9 \qquad B = 19$$

O O O

Integrales definidas usando integración por partes

También tenemos que tener cuidado cuando calculamos una integral definida usando el método de integración por partes.

Recordemos que

$$\int u(x).v'(x)\,dx = u(x).v(x) - \int u'(x).v(x)\,dx$$

En el caso de tener que calcular $\int_a^b u(x).v'(x)\,dx$ debemos tener en cuenta que los límites de integración deben afectar a los dos términos de la fórmula, a saber:

$$\int_a^b u(x).v'(x)\,dx \;=\; u(x).v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x).v(x)\,dx$$

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 24

Calcular $\int_1^e x\,.\ln x\,dx$

Solución

$$u = \ln x \qquad \Rightarrow \qquad u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

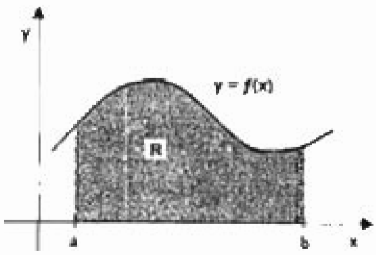
Entonces

$$\int_1^e x\,.\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \left(\frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1^2}{2}\ln 1\right) - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{e^2}{4}$$

Un error frecuente consiste en olvidarse de la parte integrada u.v . Hay que tener presente que el cálculo de una integral definida debe dar como resultado un número y nunca una función.

Cálculo de áreas

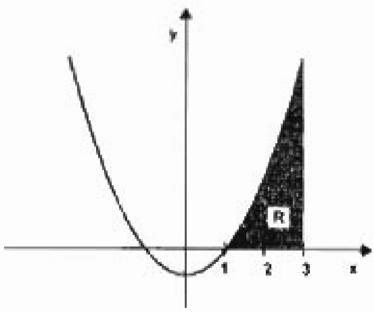


Dijimos antes que una de las aplicaciones más importantes de la integral, es el cálculo de áreas.

a) Cuando la función f es positiva en [a , b], el problema de calcular el área del trapecio curvilíneo R de la figura, ya que comentado cuando enunciamos el Teorema fundamental del Cálculo. Si llamamos A(R) al área de dicha región, sabemos que:

←

$$A(R) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{si} \quad f(x) \geq 0 \quad \text{en} \quad [a\,,\,b]$$



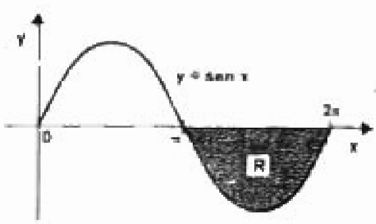
Ejemplo 25

Calcular el área de la región R determinada por el eje de las x, y el gráfico de la función.

← $f(x) = x^2 - 1$ para $1 \leq x \leq 3$

Observamos que cuando $x \in [1\,,\,3]$ el gráfico de f se encuentra por encima del eje x (es decir $f(x) \geq 0 \;\; \forall\, x \in [1\,,\,3]$), por lo cual el área de R es exactamente la integral de f en [1 , 3].

$$A(R) = \int_1^3 (x^2 - 1)\,dx = \frac{20}{3}$$

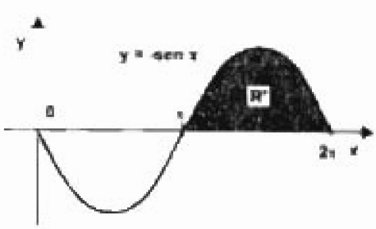


b) Queremos ahora calcular el área de la región comprendida entre el gráfico de la función $f(x)$ = sen x para $\pi \leq x \leq 2\pi$ y el eje x

←

En el ejemplo 20 vimos que $\int_\pi^{2\pi} \text{sen}\, x\,dx = -2$ por lo tanto dicha integral

NO puede ser el área de R. Pero si consideramos la función:
$g(x) = -f(x) = -\text{sen}\, x$ para $\pi \leq x \leq 2\pi$ y llamamos R' a la región sombreada vale que

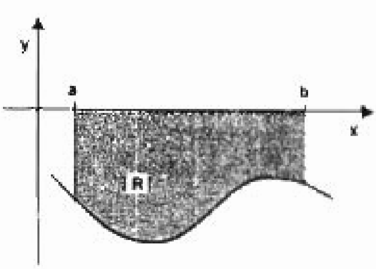


←

$$A(R) = A(R') = \int_\pi^{2\pi} g(x)\,dx = \int_\pi^{2\pi} -f(x)\,dx = \int_\pi^{2\pi} -\text{sen}\, x\,dx = -\int_\pi^{2\pi} \text{sen}\, x\,dx = 2$$

Si $f: [a\,,\,b] \rightarrow \mathbf{R}$ es tal que $f(x) \leq 0 \;\; \forall\, x \in [a\,,\,b]$, entonces el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de f es

$$A(R) = \int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$



←

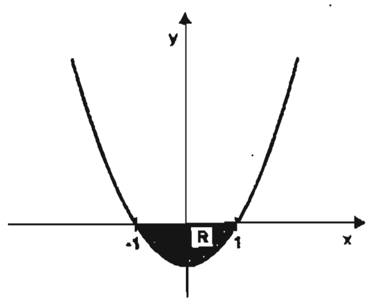
Ejemplo 26

Calcular el área de la región R limitada por la curva $y = x^2 - 1$ y el eje x.

Solución

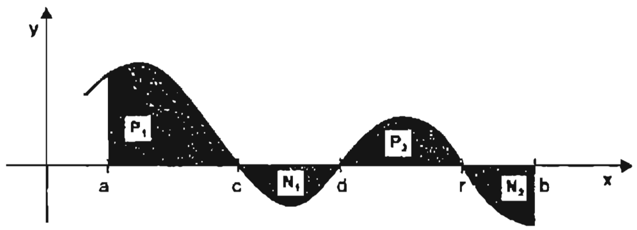
La intersección del eje x con la curva se encuentra resolviendo la ecuación

$x^2 - 1 = 0$, cuyas soluciones son -1 y 1. Es sencillo comprobar que en el intervalo [-1 , 1] la curva se encuentra debajo del eje x, por lo cual será: ➔



$$A(R) = \int_{-1}^{1} -(x^2 - 1)\, dx = \int_{-1}^{1} -x^2 + 1\, dx = \frac{4}{3}$$

c) Veamos un caso más general:
Calcular el área de la región que muestra la figura. Podemos pensar que dicha región está compuesta por regiones "positivas" (cuya gráfica queda por encima del eje de las x) y regiones "negativas" (su gráfica queda por debajo del eje de las x).



Las áreas de las regiones positivas se obtienen integrando la función sobre cada uno de los intervalos asociados con cada región, como vimos en a). Los intervalos donde la f es no negativa son [a , c] y [d , r], luego:

$$A(P_1) = \int_a^c f(x)\, dx \qquad A(P_2) = \int_d^r f(x)\, dx$$

Las áreas de las regiones "negativas" se obtienen integrando $-f$ en cada uno de los intervalos asociados con cada región, como vimos en b).

$$A(N_1) = -\int_c^d f(x)\, dx \qquad A(N_2) = -\int_r^b f(x)\, dx$$

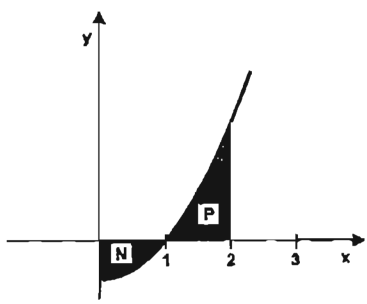
Como es de esperar, el área de la región R se obtiene sumando las áreas de las componentes:

$$A(R) = A(P_1) + A(N_1) + A(P_2) + A(N_2)$$

$$A(R) = \int_a^c f(x)\, dx - \int_c^d f(x)\, dx + \int_d^r f(x)\, dx - \int_r^b f(x)\, dx$$

Ejemplo 27

Calcular el área de la región R comprendida entre $y = x^2 - 1$, el eje de las x y las rectas verticales x = 0 y x = 2. ➔



La curva atraviesa el eje x cuando $x^2 - 1 = 0$, o sea, cuando x = 1.
En el segmento [0 , 1], la curva se encuentra por debajo del eje de las x, de donde el área de la región N obtiene haciendo

$$A(N) = -\int_0^1 x^2 - 1\, dx$$

En el segmento [1 , 2] la curva se encuentra por arriba del eje de las x, y así, el área de la región P viene dada por

$$A(P) = \int_1^2 x^2 - 1\, dx$$

La región R es la reunión de las regiones N y P, por lo cual es:

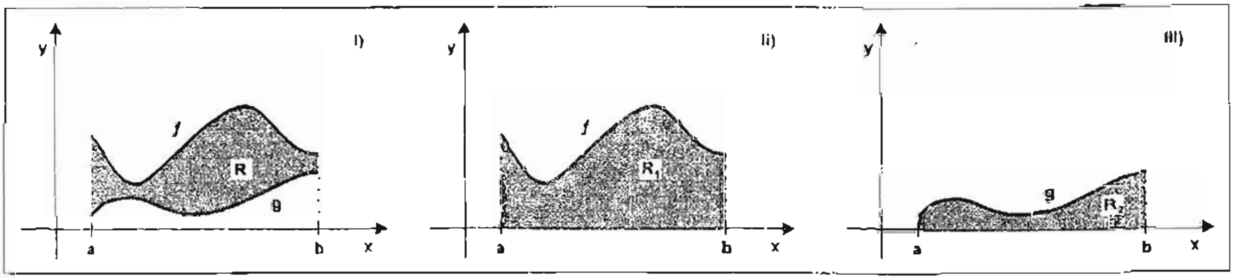
$$A(R) = A(N) + A(P) = -\int_0^1 x^2 - 1\,dx + \int_1^2 x^2 - 1\,dx =$$

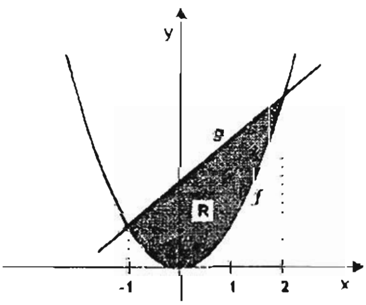
$$= -(-\frac{2}{3}) + [\frac{2}{3} - (-\frac{2}{3})] = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$$

d) Veremos ahora cómo calcular el área de una región R comprendida entre los gráficos de dos funciones.

i) Sean f y g funciones positivas tales que $f(x) \geq g(x)$ para todo x en [a , b], lo que geométricamente significa que el gráfico de f está por encima del gráfico de g, tal como muestra la figura (i).
Si R_1 y R_2 son las regiones comprendidas entre el eje x los gráficos de f y g respectivamente ((ii) y (iii)), entonces es claro que la diferencia entre el área de R_1 y el área de R_2 resulta igual al área de R, es decir, el área entre las curvas definidas por f y g. Resulta entonces:

$$A(R) = A(R_1) - A(R_2) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$





Ejemplo 28

Hallar el área de la región R comprendida entre los gráficos de $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$.

Solución

Buscamos los puntos de intersección de ambas curvas resolviendo la ecuación:

← $$x^2 = x + 2$$

Sus raíces son $x = -1$ y $x = 2$. Dado que en el intervalo [-1 , 2] el gráfico de g se encuentra por encima del de f, debemos integrar la diferencia: g - f.
Luego:

$$A(R) = \int_{-1}^{2} [g(x) - f(x)]\,dx = \int_{-1}^{2} [x + 2 - x^2]\,dx = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

Observación

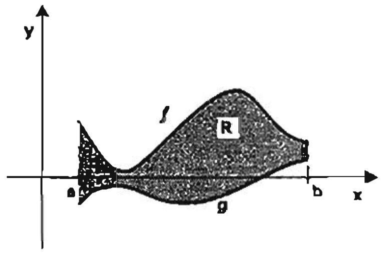
Hemos deducido la fórmula anterior (caso d) utilizando que los gráficos de f y g se encuentran situados sobre el eje x. Veamos que también es válido en el caso en el que alguno de los gráfico o ambos se encuentren en el semiplano inferior.

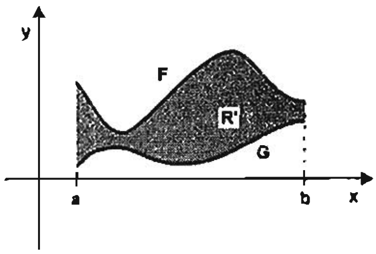
ii) Consideremos ahora dos funciones f y g, no necesariamente positivas, que delimiten una región R tal como muestra la figura que sigue:

Podemos elegir un número M de modo tal que si

$$F(x) = f(x) + M \quad y \quad G(x) = g(x) + M$$

la región R' comprendida entre F y G se encuentre totalmente por encima del eje x.

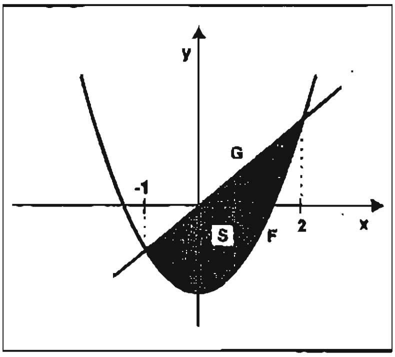




Concluimos entonces que:

$$A(R) = A(R') = \int_a^b [F(x) - G(x)]\, dx = \int_a^b [(f(x) + M) - (g(x) + M)]\, dx =$$

$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$



Ejemplo 29

Hallar el área de la región encerrada entre las curvas $F(x) = x^2 - 2$ y $G(x) = x$.

Solución

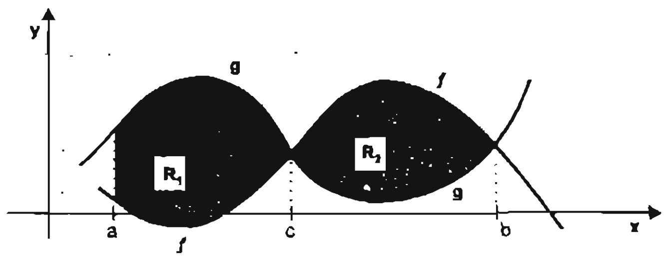
Buscamos los puntos de intersección de ambas curvas resolviendo la ecuación $x^2 - 2 = x$, o equivalentemente: $x^2 - x - 2 = 0$. Sus raíces son $x = -1$ y $x = 2$. Los puntos de intersección son entonces $(-1, -1)$ y $(2, 2)$. Vemos que en el intervalo $[-1, 2]$ la gráfica de $y = x$ se encuentra por encima de la de $x^2 - 2$, por lo cual deberemos integrar la diferencia $x - (x^2 - 2)$ a lo largo del intervalo $[-1, 2]$.

$$A(S) = \int_{-1}^{2} [F(x) - G(x)]\, dx = \int_{-1}^{2} [x - (x^2 - 2)]\, dx = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\, dx = \frac{9}{5}$$

Observemos que: $F(x) = f(x) - 2$ y $G(x) = g(x) - 2$, siendo f y g las funciones definidas en el ejemplo 28; por lo cual debe ser:

$$A(R) = A(S)$$

e) **Veamos otro caso.** Se trata de calcular el área de la región R **comprendida entre los gráficos de** f y g. Como muestra la figura, no siempre **ocurre que** el **gráfico de** f **se** encuentra todo por encima del gráfico de g, ni viceversa.



Acá vemos que en un intervalo el gráfico de g está por encima del de f ($g(x) \geq f(x)$ para $x \in [a, c]$), y luego, al revés cambia ($f(x) \geq g(x)$ para $x \in [c, b]$).

Esto nos sugiere partir la región R en dos regiones R_1 y R_2, de modo que cada una de ellas corresponda a un caso como el estudiado en d).

Como $g(x) \geq f(x)$ para $x \in [a, c] \Rightarrow A(R_1) = \int_a^c [g(x) - f(x)]\, dx$

Como $f(x) \geq g(x)$ para $x \in [c, b] \Rightarrow A(R_2) = \int_c^b [f(x) - g(x)]\, dx$

El área buscada es la suma de ambas áreas:

$$A(R) = \int_a^c [g(x) - f(x)]\, dx + \int_c^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Ejemplo 30

Calcular el área de la región encerrada por los gráficos de f y g siendo $f(x) = x^3$ y $g(x) = 2x$

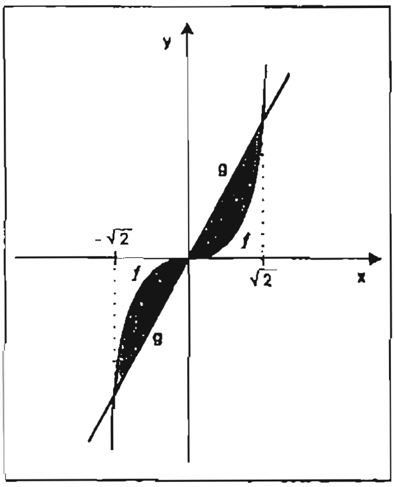
Solución

Para determinar cuál es la región que encierran, hay que ver dónde se cortan los gráficos de f y g.
Resolvemos $f(x) = g(x)$:

$$x^3 = 2x \Rightarrow x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ó } x^2 = 2 \Rightarrow x = 0 \text{ ó } |x| = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = \sqrt{2} \text{ ó } x = -\sqrt{2}$$

En cada uno de los intervalos $[-\sqrt{2}, 0]$ y $[0, \sqrt{2}]$, hay que determinar cuál de los dos gráficos está por encima del otro. Tratándose de funciones continuas, bastará analizar qué ocurre en un punto cualquiera del mismo (esta situación se mantendrá en todo el intervalo).
Tomamos, por ejemplo
$-1 \in (-\sqrt{2}, 0)$, dado que $f(-1) = -1$ y $g(-1) = -2$; y $g(-1) < f(-1)$, entonces en el intervalo $(-\sqrt{2}, 0)$ será: $g(x) \leq f(x)$;
$1 \in (0, \sqrt{2})$, dado que $f(1) = 1$ y $g(1) = 2$; y $f(1) < g(1)$, entonces en todo el $(0, \sqrt{2})$ será $f(x) \leq g(x)$.
El área buscada es
←



$$A(R) = \int_{-\sqrt{2}}^{0} [f(x) - g(x)]\, dx + \int_0^{\sqrt{2}} [g(x) - f(x)]\, dx =$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{0} [x^3 - 2x]\, dx + \int_0^{\sqrt{2}} [2x - x^3]\, dx = \frac{x^4}{4} - x^2 \Big|_{-\sqrt{2}}^{0} + x^2 - \frac{x^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= 0 - \left[\frac{1}{4}(-\sqrt{2})^4 - (-\sqrt{2})^2\right] + \left[(\sqrt{2})^2 - \frac{1}{4}(\sqrt{2})^4\right] - 0 = 2$$

Ejemplo 31

Calcular el área de la región limitada por los gráficos de $f(x) = x^2 + 2$; $g(x) = -x^2 + 4x$; $x = 0$ y $x = 2$.

Solución

Los gráficos de f y g son dos parábolas. Las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$ limitan lateralmente la región. Debemos determinar dónde es $f \leq g$ y dónde es $g \leq f$ en el intervalo $[0, 2]$.

Buscamos para esto dónde es $f = g$.

$$f(x) = g(x) \iff x^2 + 2 = -x^2 + 4x \iff x = 1$$

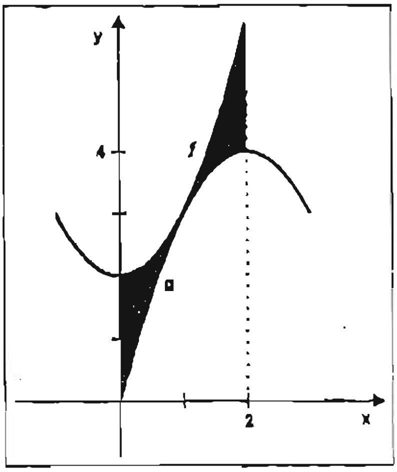
Como $1 \in [0\,,2]$ debemos partir el intervalo en $[0\,,1]$ y $[1\,,2]$ y ver qué pasa en el interior de cada uno.
Analizando como en el ejemplo anterior en cada intervalo resulta que:

$$f(x) \geq g(x) \quad \forall\ x \in (0\,,1)$$
$$f(x) \geq g(x) \quad \forall\ x \in (1\,,2)$$

Juntando los dos análisis, llegamos a la conclusión de que:

$$\forall\ x \in [0\,,2] \text{ es } f(x) \geq g(x)$$

Gráficamente la situación es la que se muestra en el dibujo ➔



Calculamos el área:

$$A = \int_0^2 [f(x) - g(x)]\, dx = \int_0^2 [2x^2 - 4x + 2]\, dx = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 2x \Big|_0^2 =$$

$$= \frac{2}{3}(2)^3 - 2(2)^2 + 2.2 = \frac{16}{3} - 8 + 4 - 0 = \frac{4}{3}$$

Ejemplo 32

Calcular el área de la región R delimitada por el eje y ($x = 0$); el gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$; la recta de ecuación $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y la recta de ecuación $x = 2\pi$.

Solución

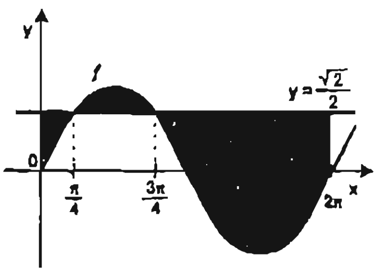
La región R está limitada a los costados por las rectas $x = 0$ y $x = 2\pi$, y arriba y abajo, por los gráficos de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Debemos analizar qué comportamiento tienen los gráficos de estas funciones en el intervalo $[0\,,2\pi]$.

Veamos cuándo es $f = g$ en $[0\,,2\pi]$. Es $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = \frac{\pi}{4}$ ó $x = \frac{3}{4}\pi$.

Comparando f y g entre dos puntos de intersección consecutivos, obtenemos:

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in (0\,, \tfrac{\pi}{4})$$
$$f(x) \geq g(x) \quad \forall\, x \in (\tfrac{\pi}{4}\,, \tfrac{3}{4}\pi)$$
$$f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in (\tfrac{3}{4}\pi\,, 2\pi)$$

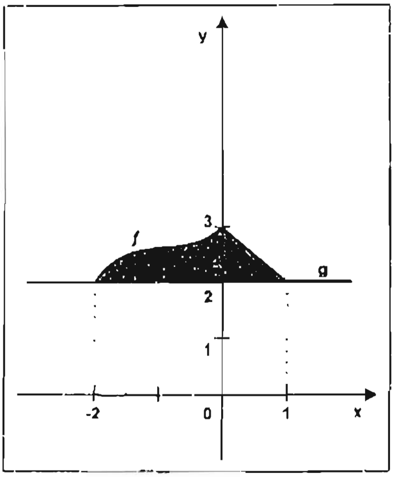
Gráficamente, la región es ➔



El área está dada por:

$$A(R) = \int_0^{\pi/4} [\frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{sen} x]\, dx + \int_{\pi/4}^{(3/4)\pi} [\operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{2}}{2}]\, dx + \int_{(3/4)\pi}^{2\pi} [\frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{sen} x]\, dx =$$

$$= [\frac{\sqrt{2}}{2}x + \cos x]\Big|_0^{\pi/4} + [-\cos - \frac{\sqrt{2}}{2}x]\Big|_0^{2} + [\frac{\sqrt{2}}{2}x + \cos x]\Big|_{\pi/4}^{(3/4)\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi + 2\sqrt{2}$$



Ejemplo 33

Sabiendo que el área de la región sombreada vale $\frac{13}{2}$, calcular $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$.

←

Solución

La región sombreada R está limitada inferiormente por el gráfico de g(x) = 2 y superiormente:

en el intervalo [-2 , 0], por el gráfico de $f(x)$
en el intervalo [0 , 1] por la recta que pasa por (0 , 3) y (1 , 2)

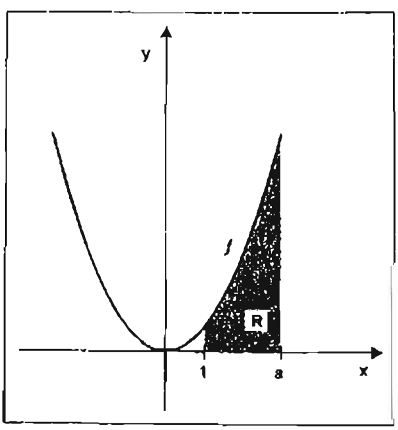
$$\text{Así: } A(R) = \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx + \left\{ \begin{array}{l} \text{área del triángulo de} \\ \text{base 1 y altura 1} \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{-2}^{0} f(x)\,dx - \int_{-2}^{0} g(x)\,dx + \frac{1}{2} = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx - \int_{-2}^{0} 2\,dx + \frac{1}{2} =$$

$$= \int_{-2}^{0} f(x)\,dx - 2x\Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{2} = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx - (0 - 2.(-2)) + \frac{1}{2} =$$

$$= \int_{-2}^{0} f(x)\,dx - \frac{7}{2} \Rightarrow \text{ Como } A(R) = \frac{13}{2} = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx - \frac{7}{2}, \text{ resulta}$$

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \frac{13}{2} + \frac{7}{2} = 10$$



Ejemplo 34

Dada $f(x) = x^2$, hallar $a \in \mathbf{R}$ de modo que el área de la región R comprendida entre el eje x y el gráfico de f para $1 \leq x \leq a$, resulte igual a $\frac{7}{3}$.

←

Solución

$$A(R) = \int_{1}^{a} f(x)\,dx = \int_{1}^{a} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{1}^{a} = \frac{a^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \Rightarrow a = 2$$

MATEMATICA Teórica

ISBN 978-950-807-006-7

Agradecemos la colaboración de los profesores del Ciclo Básico Común y de todos aquellos que han hecho posible la realización de la presente obra.

Se terminó de imprimir en el mes de febrero de 2010
En los talleres Gráficos de CCCEDUCANDO (Centro De Copiado La Copia SRL) Con una tirada de 2200 Ejemplares. Av Warnes 2361/5. Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Argentina.