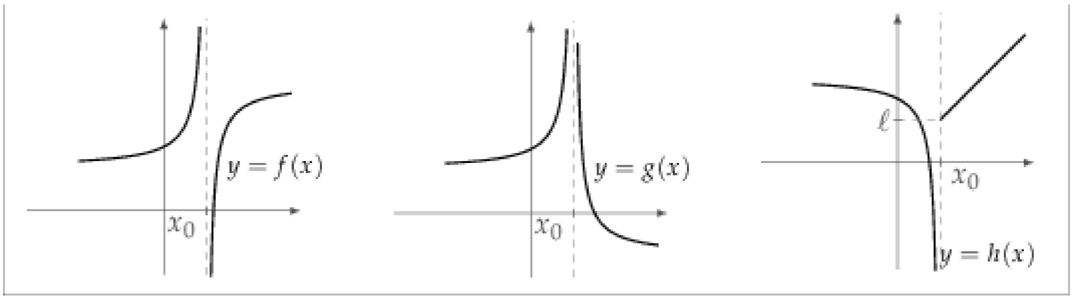
Límites puntuales

Consideremos los siguientes gráficos de funciones:



En el gráfico de la función f observamos que, cuando x se acerca a x_0 por la izquierda (es decir, considerando sólo valores x tales que $x < x_0$), la función toma valores positivos arbitrariamente grandes. En este caso, decimos que el *límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* x_0 *por izquierda es* $+\infty$ y escribimos

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$$

(el signo $-$ en x_0^- indica que la variable se acerca a x_0 por *izquierda*).

Asimismo, a medida que x se acerca a x_0 por la derecha (es decir, considerando sólo valores x tales que $x > x_0$), la función toma valores negativos arbitrariamente grandes en valor absoluto. En este caso, decimos que el *límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* x_0 *por derecha es* $-\infty$ y escribimos

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

(el signo $+$ en x_0^+ indica que la variable se acerca a x_0 por *derecha*).

Algo similar puede observarse en el gráfico de g: para x suficientemente cercano a x_0, acercándonos ya sea por la izquierda o por la derecha, se obtienen valores de $g(x)$ que son tan grandes como uno quiera; es decir,

$$\lim_{x \to x_0^-} g(x) = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to x_0^+} g(x) = +\infty$$

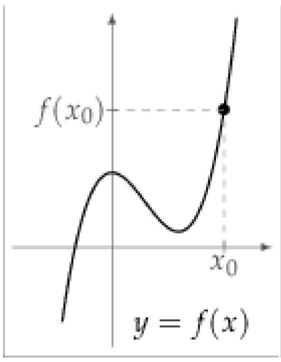
Un comportamiento parecido se observa en el gráfico de h cuando x se acerca a x_0 por la izquierda:

$$\lim_{x \to x_0^-} h(x) = -\infty$$

Sin embargo, cuando x se acerca a x_0 por la derecha, vemos en el gráfico que se obtienen valores de $h(x)$ tan cercanos al número ℓ como se quiera. Decimos entonces que el *límite de* $h(x)$ *cuando* x *tiende a* x_0 *por la derecha es* ℓ y escribimos

$$\lim_{x \to x_0^+} h(x) = \ell$$

Cuando una función es continua, como la función f del siguiente gráfico,



dado un valor de x_0, si x está suficientemente cerca de x_0 (ya sea a la derecha o a la izquierda), entonces los valores de $f(x)$ están arbitrariamente cerca del número $f(x_0)$; es decir,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(la notación $x \to x_0$ significa que x se acerca a x_0 tanto por la derecha como por la izquierda).

Ejemplos

Calcularemos a continuación algunos límites de funciones dadas por sus fórmulas.

1) $\lim\limits_{x \to 1}(-3x+1)$

Como la función $f(x) = -3x+1$ es continua, tenemos que

$$\lim_{x \to 1} -3x+1 = -3.1+1 = -2$$

2) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-3x+1}{x-1}$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{-3x+1}{x-1}$

En este caso, $x = 1$ no pertenece al dominio de la función, puesto que en ese punto se anula el denominador.

Observar que cuando $x \to 1^-$ se tiene que $x < 1$ y, por lo tanto, $x-1<0$; así, $x-1$ tiende a 0, pero toma siempre valores negativos. Escribiremos $\to 0^-$ para indicar que la función que precede la flecha tiende a 0 tomando siempre valores menores que 0. Tenemos entonces una fracción tal que, cuando $x \to 1^-$, el numerador $-3x+1$ toma valores arbitrariamente cercanos a -2 (ver ejemplo anterior) y el denominador $x-1$ se hace arbitrariamente chico en valor absoluto, pero siempre negativo; en consecuencia, la fracción toma valores positivos arbitrariamente grandes:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\overbrace{-3x+1}^{\to -2}}{\underbrace{x-1}_{\to 0^-}} = +\infty$$

Cuando $x \to 1^+$ se tiene que $x > 1$ y, por lo tanto, $x-1>0$; así, $x-1$ tiende a 0, pero toma siempre valores positivos (en este caso, escribiremos $\to 0^+$). Dado que, cuando $x \to 1^+$, el numerador $-3x+1$ tiende a -2 y teniendo en cuenta que el denominador $x-1$ toma valores arbitrariamente chicos y positivos, resulta que la fracción toma valores negativos arbitrariamente
grandes en valor absoluto. Concluimos entonces que

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\overbrace{-3x+1}^{\to -2}}{\underbrace{x-1}_{\to 0^+}} = -\infty$$

Resumiendo nuestros resultados:

$$\boxed{\lim_{x \to 1^-} \frac{-3x+1}{x-1} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{-3x+1}{x-1} = -\infty}$$

3) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x^2+2x}{x^2}$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-x^2+2x}{x^2}$

Observamos que, tanto el numerador como el denominador de la función $f(x) = \dfrac{-x^2+2x}{x^2}$ se anulan en $x = 0$ (donde queremos calcular el límite). Se dice entonces que hay una *indeterminación del tipo* $\dfrac{0}{0}$; esto significa que no podemos determinar el valor del límite solamente a partir de esta información (veremos que funciones que presentan este mismo comportamiento tienen distintos límites). Sin embargo, podemos *salvar la indeterminación* haciendo operaciones algebraicas (en este caso, factorizando el numerador de la fracción y simplificando), y así obtener el límite que queremos calcular:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2+2x}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{x}(-x+2)}{x^{\cancel{2}}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{-x+2}^{\to 2}}{\underbrace{x}_{\to 0^-}} = -\infty$$

Al calcular el límite cuando x tiende a 0 (por la izquierda, en este caso), los valores de x que consideramos son cercanos a 0, pero *distintos de* 0; es por esto que en el segundo paso podemos simplificar un factor x en el numerador y en el denominador.

Procedemos en forma análoga para calcular el segundo límite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2+2x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}(-x+2)}{x^{\cancel{2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{-x+2}^{\to 2}}{\underbrace{x}_{\to 0^+}} = +\infty$$

Resumiendo, hemos obtenido que:

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2+2x}{x^2} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2+2x}{x^2} = +\infty}$$

4) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

En este caso también tenemos una indeterminación, ya que tanto el numerador como el denominador de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ se anulan en $x = 1$. Para calcular el límite factorizamos el numerador y simplificamos la expresión:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\overbrace{x^2-1}^{\to 0}}{\underbrace{x-1}_{\to 0}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1^-} x+1 = 2$$

Cuando $x \to 1$, los valores que consideramos son cercanos a 1, pero $x \neq 1$; es por esto que en el segundo paso podemos simplificar el factor $x-1$.

De la misma manera se ve que $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$ (queda como ejercicio para el lector).

Resumiendo:

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = 2}$$

Así, cuando x se acerca a 1, sin importar si es por la derecha o por la izquierda, los valores de la función se acercan a un mismo número (en este caso, a 2). Decimos entonces que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1 es 2 y escribimos

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

5) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-x}$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-x}$

Nuevamente se trata de una indeterminación: el numerador y el denominador de la función se anulan en $x = 1$. Para calcular el límite, procedemos entonces de forma análoga a lo hecho en el ejemplo anterior: buscando las raíces de x^2+x-2 y x^2-x podemos factorizar numerador y denominador y luego simplificar

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{x^2+x-2}^{\to 0}}{\underbrace{x^2-x}_{\to 0}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{x\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{x+2}^{\to 3}}{\underbrace{x}_{\to 1}} = 3$$

De la misma manera se ve que $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = 3$ (queda como ejercicio para el lector).

Concluimos entonces que:

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = 3 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = 3}$$

En este caso, cuando x se acerca a 1, ya sea por la derecha o por la izquierda, los valores de $f(x)$ se hacen arbitrariamente cercanos a 3, es decir,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = 3$$

Comparando los ejemplos 3, 4 y 5, podemos ver que en todos los casos se trata de indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ (es decir, tales que el numerador y el denominador de la función tienden ambos a 0), pero los resultados de los límites son distintos: en el ejemplo 3, obtuvimos límites infinitos, mientras que en los ejemplos 4 y 5, los límites son números y distintos.