Funciones polinomiales

Funciones polinómicas

Hasta ahora, hemos trabajado con funciones lineales ($f(x) = mx + b$ con m y b números fijos) y funciones cuadráticas ($f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b y c números fijos, $a \neq 0$). Las **funciones polinómicas** generalizan a estas funciones, en el sentido que la fórmula de cualquier función polinomial está dada por una suma en la que cada término es un número fijo por una potencia de x con exponente un número natural o cero.

Por ejemplo, $f(x) = 5x^3 - 3x^2 - 2$, $g(x) = 7x^7 - 3x^4 + 5x - 9$ y $h(x) = x^{132} - 4x^{76} + \frac{3}{4}x^4 - 56x$ son funciones polinómicas.

Se llama **grado de una función polinómica** a la máxima potencia de x que aparece en su fórmula acompañada de un número **distinto de cero**. En los ejemplos anteriores, el grado de f es 3 (y aunque la escribamos $f(x) = 0x^5 + 0x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 4$ el grado sigue siendo 3 porque los coeficientes 0 no cuentan), el grado de g es 7 y el grado de h es 132. El grado de una función lineal no constante es 1, el grado de una función constante no nula es 0 y el grado de una función cuadrática es 2.

Se dice que un valor fijo r_0 es una **raíz o cero** de una función polinómica f si vale que $f(r_0) = 0$ (es decir si $r_0 \in C^0(f)$). Por ejemplo, como la función g de los ejemplos anteriores cumple que $g(1) = 7.1^7 - 3.1^4 + 5.1 - 9 = 7 - 3 + 5 - 9 = 0$, resulta que 1 es una raíz de g.

Propiedad: Una función polinómica de grado n tiene a lo sumo n raíces reales.

(Notar que esta propiedad generaliza lo que ya sabíamos para funciones lineales y cuadráticas.)

Al igual que con las funciones cuadráticas, si conocemos las n raíces reales $r_1, r_2, \ldots, r_n$ de una función polinomial f de grado n, resulta que la fórmula de la función es

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n).$$

Ejemplo: Si sabemos que la función polinomial f tiene grado 3 y tiene por raíces a 5, -2 y 8, resulta que

$$f(x) = a(x - 5)(x - (-2))(x - 8)$$

para algún valor de a. Si además sabemos que $f(3) = 200$, entonces evaluando en $x = 3$, tenemos

$$200 = a.(-2)(5)(-5) \iff 200 = a.(50) \iff a = 4$$

con lo que la función resulta

$$f(x) = 4(x - 5)(x + 2)(x - 8).$$