Adicionales Clase 6 – Mate 51 – Sede Pilar
Funciones cuadráticas y Funciones polinómicas

++

ADICIONALES 6

6.1) Sea f la función lineal tal que $f(0) = -1$ y cuyo gráfico es una recta de pendiente 4, y sea g la función dada por $g(x) = x^2 + 2x - 4$. Encontrar analíticamente los puntos en que se cortan los gráficos de f y g.

Ej 6.1 f es la función lineal de pendiente 4 y que pasa por el punto $P = (0, -1)$

Pero entonces la ordenada al origen es -1

Entonces la fórmula de f es : $f(x) = 4x - 1$

g es la función cuadrática $g(x) = x^2 + 2x - 4$

Encontrar los puntos de intersección de f y g

Igualamos f con g para obtener las abscisas de los puntos de intersección :

$$f(x) = g(x)$$

$$4x - 1 = x^2 + 2x - 4 \implies 0 = x^2 + 2x - 4 - 4x + 1 \implies 0 = x^2 - 2x - 3$$

Veamos de obtener las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 - 2x - 3 = 0$

con $a = 1$ $b = -2$ $c = -3$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \quad \text{entonces}$$

$$x_1 = \frac{2 + 4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{2 - 4}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

$x_1 = 3$ **y** $x_2 = -1$

Hemos obtenido las abscisas de dos puntos de intersección

Reemplazando en la fórmula de f (x) obtenemos las ordenadas de los puntos de intersección

$y_1 = 4\,x_1 - 1 = 4 \cdot 3 - 1 = 12 - 1 = 11 \implies y_1 = 11$

$y_2 = 4\,x_2 - 1 = 4 \cdot (-1) - 1 = -4 - 1 = -5 \implies y_2 = -5$

Los puntos de intersección entre f y g son :

$P_{\cap 1} = (x_{\cap 1}, y_{\cap 1}) = (3, 11)$ **y** $P_{\cap 2} = (x_{\cap 2}, y_{\cap 2}) = (-1, -5)$

In[113]:=

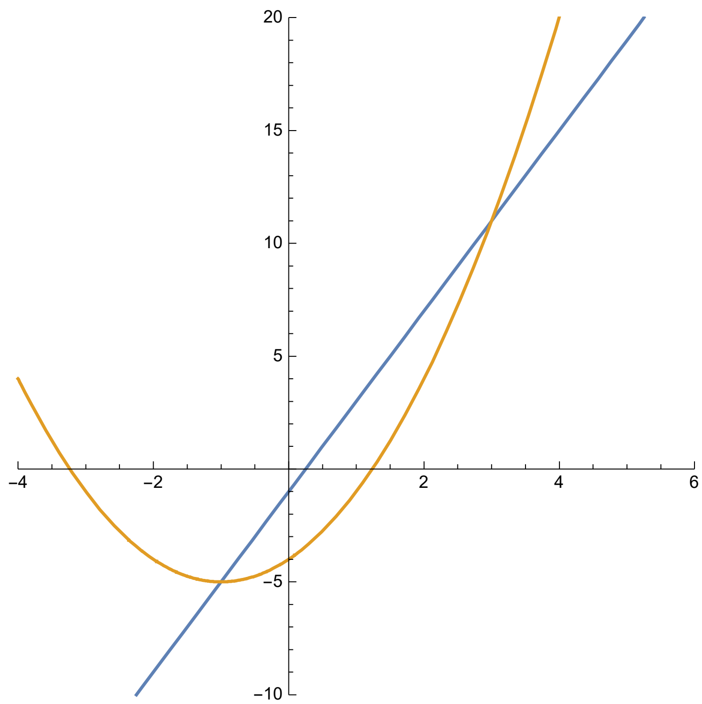
```
grafPlotAdic61 = Plot[{4 x - 1, x^2 + 2 x - 4},
  {x, -4, 6}, PlotRange → {{-4, 6}, {-10, 20}}, AspectRatio → 1]
```

representación gráfica

rango de representación

cociente de aspecto

Out[113]=



++

6.2) Sea f la función polinómica de grado 3 cuyo gráfico pasa por los puntos $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $(-3, 0)$ y $(0, -2)$. Hallar $f(x)$ y dar los conjuntos de positividad y de negatividad de f.

Ej 6.2 f es la función polinómica de grado 3 que pasa por los puntos :

$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $(-3, 0)$ y por el $(0, -2)$

Encontremos f (x)

que pase por los puntos $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $(-3, 0)$ **quiere decir que** $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -3$

son raíces o ceros de f (x)

Si escribimos la forma factorizada de f (x)

$f(x) = a\,(x - \text{raíz1})\,(x - \text{raíz2})\,(x - \text{raíz3})$ **tenemos :**

$f(x) = a\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x + 3)$

Obtenemos "a" pidiendo que las coordenadas del $(0, -2)$

satisfagan la fórmula factorizada de f (x)

$-2 = a\left(0 - \frac{1}{2}\right)\left(0 + \frac{1}{2}\right)(0 + 3) \quad \Longrightarrow \quad -2 = a\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot 3 \quad \Longrightarrow \quad -2 = a\left(-\frac{3}{4}\right)$

Sale $a = \frac{8}{3}$

Entonces $f(x) = \frac{8}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x + 3)$

Desarrollando : $f(x) = \frac{8}{3}x^3 + 8x^2 - \frac{2}{3}x - 2$

Calculemos ahora los conjuntos de positividad y negatividad de f (x)

Dado que f (x) es polinómica y por lo tanto continua, ordenamos
los intervalos de análisis del signo de f (x) (**o sea si** $f(x) > 0$ ó $f(x) < 0$)
entre ceros consecutivos
para aplicar el resultado complementario del Teorema de Bolzano

$(-\infty, -3) \quad \left(-3, -\frac{1}{2}\right) \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

sea $x = -4$ **que pertenece al** $(-\infty, -3)$

$$f(-4) = -42 < 0$$

In[116]:= $\frac{8}{3}x^3 + 8x^2 - \frac{2}{3}x - 2 \;/.\; x \to -4$

Out[116]= -42

sea $x = -1$ **que pertenece al** $\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$

$$f(-1) = 4 > 0$$

In[117]:= $\frac{8}{3}x^3 + 8x^2 - \frac{2}{3}x - 2$ /. $x \to -1$

Out[117]= 4

sea $x = 0$ que pertenece al $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$f(0) = -2 < 0$

In[118]:= $\frac{8}{3}x^3 + 8x^2 - \frac{2}{3}x - 2$ /. $x \to 0$

Out[118]= -2

sea $x = 1$ que pertenece al $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

$f(1) = 8 > 0$

In[119]:= $\frac{8}{3}x^3 + 8x^2 - \frac{2}{3}x - 2$ /. $x \to 1$

Out[119]= 8

Resumimos el comportamiento de f (x) en este esquema

x	$(-\infty, -3)$	$\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
f (x)	< 0	> 0	< 0	> 0

Entonces

$C^+ = \left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

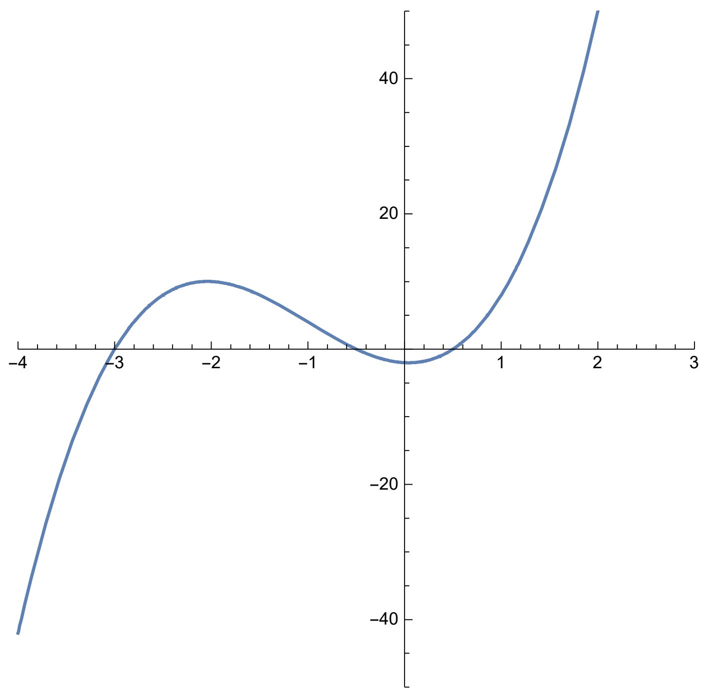
$C^- = (-\infty, -3) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

In[125]:= grafPlotAdic62 =

$\text{Plot}\left[\frac{8}{3}x^3 + 8x^2 - \frac{2}{3}x - 2, \{x, -4, 3\}, \text{PlotRange} \to \{\{-4, 3\}, \{-50, 50\}\}, \text{AspectRatio} \to 1\right]$

representación gráfica   rango de representación   cociente de aspecto

Out[125]=



++

6.3) Sea $f(x) = (x^3 + 3x^2)(x-4)$. Hallar los conjuntos de ceros, de positividad y de negatividad de f.

Ej 6.3 $f(x) = (x^3 + 3x^2)(x-4)$. Hallar C^0, C^+, C^-

Seguimos factorizando f (x) : para ello sacamos factor común x^2

$f(x) = x^2 (x+3)(x-4)$

De acá se ve que las raíces o ceros son : 0, -3 y 4

$C^0 = \{-3, 0, 4\}$ con 0 raíz doble de f (x)

Calculemos ahora los conjuntos de positividad y negatividad de f (x)

Dado que f (x) es polinómica y por lo tanto continua, ordenamos
los intervalos de análisis del signo de f (x) (o sea si $f(x) > 0$ ó $f(x) < 0$)
entre ceros consecutivos
para aplicar el resultado complementario del Teorema de Bolzano

$(-\infty, -3)$ $(-3, 0)$ $(0, 4)$ $(4, +\infty)$

sea $x = -4$ que pertenece al $(-\infty, -3)$

$f(-4) = 128 > 0$

In[127]:= $x^4 - x^3 - 12x^2$ /. $x \to -4$

Out[127]= 128

sea $x = -1$ que pertenece al $(-3, 0)$

$f(-1) = -10 < 0$

In[128]:= $x^4 - x^3 - 12x^2$ /. $x \to -1$

Out[128]= -10

sea $x = 2$ que pertenece al $(0, 4)$

$f(2) = -40 < 0$

In[130]:= $x^4 - x^3 - 12x^2$ /. $x \to 2$

Out[130]= -40

sea $x = 5$ que pertenece al $(4, +\infty)$

$f(5) = 200 > 0$

In[129]:= $x^4 - x^3 - 12x^2$ /. $x \to 5$

Out[129]= 200

Resumimos el comportamiento de $f(x)$ en este esquema

x	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 4)$	$(4, +\infty)$
$f(x)$	> 0	< 0	< 0	> 0

Entonces

$C^+ = (-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$

$C^- = (-3, 0) \cup (0, 4)$

In[132]:= **grafPlotAdic63 =**

Plot[x^4 - x^3 - 12 x^2, {x, -4, 5}, PlotRange → {{-4, 5}, {-100, 100}}, AspectRatio → 1]

representación gráfica | rango de representación | cociente de aspecto

Out[132]=