
Comentarios teóricos y ejemplos

Resolución de Ejercicios Adicionales 14

Integrales y Cálculo de áreas - Práctica 6

desde el Ejercicio 14.1 hasta el 14.4 inclusive

+-+

EJERCICIOS ADICIONALES 14

14.1) Calcular el área de la región comprendida entre el gráfico de $f(x) = x^2 - 9$ y el eje x para $0 \leq x \leq 6$.

Ej Adic 14.1

Área de la región comprendida entre $f(x) = x^2 - 9$ y el eje x para $0 \leq x \leq 6$

Para graficar :

puntos de $f(x) = x^2 - 9$:

si $x = 0 \implies 0^2 - 9 = -9 \implies (0, 9) \in$ gráf (f)

si $x = 1 \implies 1^2 - 9 = -8 \implies (1, -8) \in$ gráf (f)

si $x = 6 \implies 6^2 - 9 = 27 \implies (6, 27) \in$ gráf (f)

puntosf = {{0, 9}, {1, -8}, {6, 27}}

Determinemos los puntos de intersección entre f y el eje x

que serán aquellos en donde $f(x) = 0$

$f(x) = 0 \implies x^2 - 9 = 0 \implies x^2 = 9 \implies \sqrt{x^2} = \sqrt{9} \implies |x| = 3$

entonces $x = -3$ ó $x = 3$

por lo tanto el conjunto de ceros de f es :

$C^0 = \{-3, 3\}$

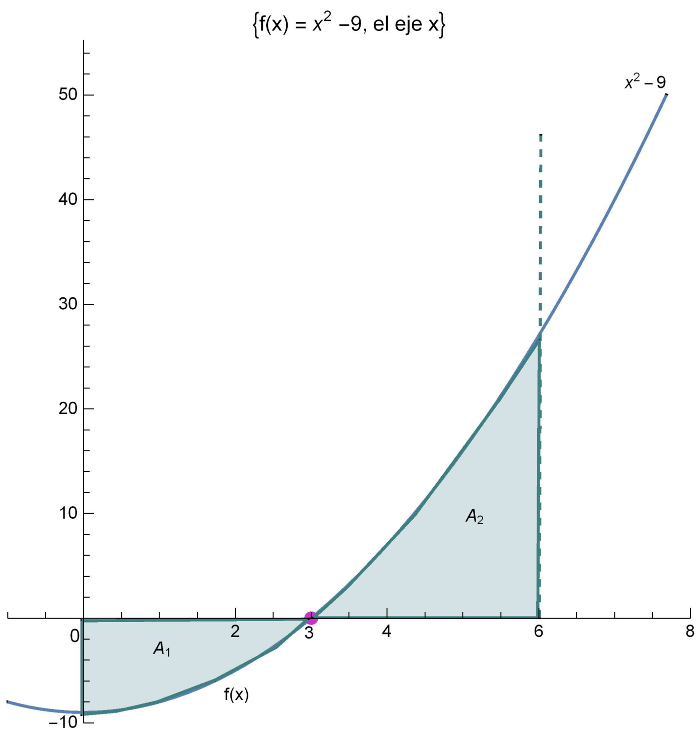
Hasta ahora sabemos que f corta al eje x en

$x = -3$ y en $x = 3$ pero nos piden calcular el área encerrada para $0 \leq x \leq 6$

------0----- [-----x-----] ----------

-3 0 3 6

Gráfico de f (x) para ver cuál es el área encerrada entre f (x) = $x^2 - 9$ y el eje x para $0 \le x \le 6$



Área de la región comprendida entre f (x) = $x^2 - 9$ y el eje x para $0 \le x \le 6$

está formada de dos áreas A_1 y A_2 tal que $A = A_1 + A_2$

Cálculo de A_1 :

Como f (x) < 0 entre x = 0 y x = 3

A_1 se obtiene como :

$$A_1 = \int_0^3 -f(x)\,dx = \int_0^3 -\left[x^2 - 9\right] dx = -\int_0^3 \left(x^2 - 9\right) dx =$$

$$= -\left(\frac{1}{3}x^3 - 9x\right)\Big|_0^3 =$$

$$= -\left\{\frac{1}{3}\cdot 3^3 - 9\cdot 3 - \left(\frac{1}{3}\cdot 0^3 - 9\cdot 0\right)\right\} =$$

$$= -\left\{9 - 27 - (0)\right\} = -\{-18\} = 18$$

Entonces :

$A_1 = 18$

Calculemos A_2

Como $f(x) > 0$ entre $x = 3$ y $x = 6$

A_2 se obtiene como :

$$A_2 = \int_3^6 f(x)\,dx = \int_3^6 \left[x^2 - 9\right] dx =$$

$$= \left(\frac{1}{3} x^3 - 9x\right)\Big|_3^6 =$$

$$= \left(\frac{1}{3} \cdot 6^3 - 9 \cdot 6\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 - 9 \cdot 3\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 36 - 54\right) - (9 - 27) =$$

$$= (2 \cdot 36 - 54) - (-18) =$$

$$= 72 - 54 + 18 = 36$$

Entonces :

$A_2 = 36$

Por lo tanto

Área de la región comprendida entre $f(x) = x^2 - 9$ y el eje x para $0 \le x \le 6$ es :

$A = A_1 + A_2 = 18 + 36 = 54$

$A = 54$

+-+

14.2) Hallar el área de la región encerrada por los gráficos de $f(x) = \dfrac{5}{x}$ y $g(x) = -x + 6$.

Ej Adic 14.2

Área de la región comprendida entre $f(x) = \dfrac{5}{x}$ y $g(x) = -x + 6$

Para graficar :

puntos de $f(x) = \dfrac{5}{x}$; $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$:

si $x = 1 \implies \dfrac{5}{1} = 5 \implies (1, 5) \in$ gráf (f)

si $x = -1 \implies \dfrac{5}{-1} = -5 \implies (-1, -5) \in$ gráf (f)

si $x = 5 \implies \dfrac{5}{5} = 1 \implies (5, 1) \in$ gráf (f) si $x = -5 \implies \frac{5}{-5} = -1 \implies (-5, -1) \in$ gráf (f)

puntosf = {{1, 5}, {-1, -5}, {5, 1}, {-5, -1}}

----

puntos de $g(x) = -x + 6$; Dom (f) = $\mathbb{R}$:

si $x = 0 \implies -0 + 6 = 6 \implies (0, 6) \in$ gráf (g)

si $x = 6 \implies -6 + 6 = 0 \implies (6, 0) \in$ gráf (g)

puntosg = {{0, 6}, {6, 0}}

Determinemos los puntos de intersección entre f y g

que serán aquellos en donde $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x) \implies \frac{5}{x} = -x + 6 \implies 5 = x(-x + 6) \implies$

$\implies x^2 - 6x + 5 = 0$

resolvemos la ecuación cuadrática $x^2 - 6x + 5 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2} \implies x_1 = \frac{6 + 4}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ ó } x_2 = \frac{6 - 4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$\implies x_1 = 5$ ó $x_2 = 1$

Calculemos las ordenadas de los puntos de intersección entre f y g
reemplazando x_1 y x_2 en $g(x) = -x + 6$:

Con x_1 :

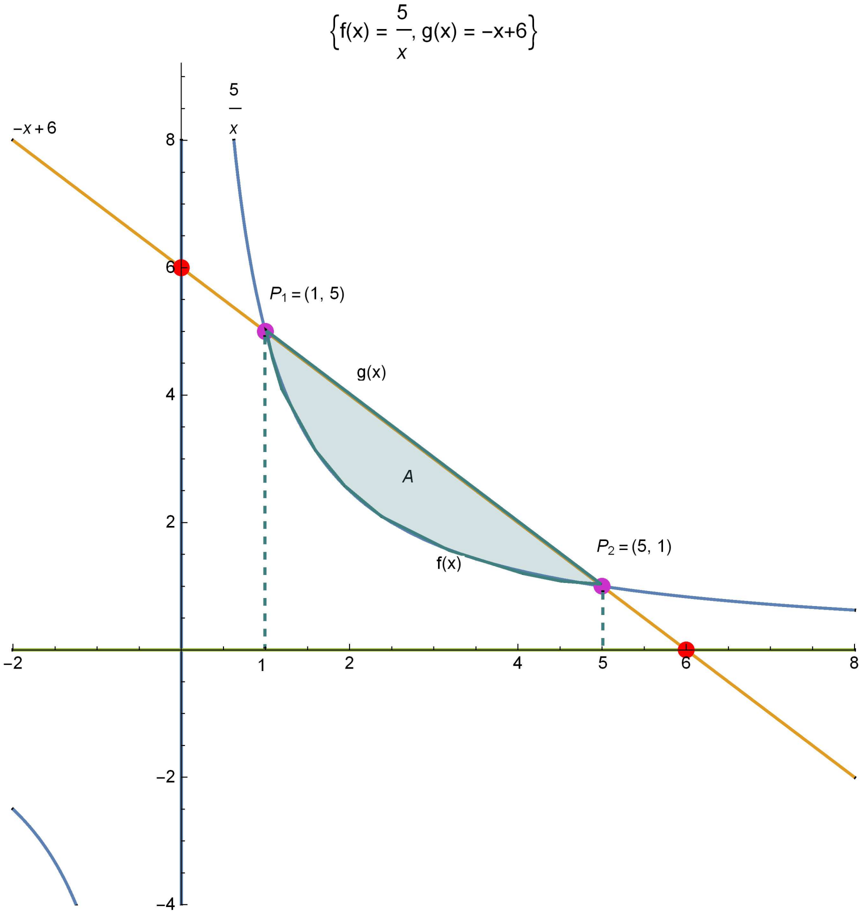
$y_1 = -5 + 6 = 1 \implies P_1 = (5, 1)$

ahora con x_2 :

$y_2 = -1 + 6 = 5 \implies P_2 = (1, 5)$

puntosinterseccion = {{5, 1}, {1, 5}}

Gráfico para ver cuál es el área encerrada entre $f(x) = \frac{5}{x}$ y $g(x) = -x + 6$



Área de la región comprendida entre $f(x) = \frac{5}{x}$ **y** $g(x) = -x + 6$

está formada por el área encerrada entre $g(x)$ **y** $f(x)$ **entre** $x = 1$ **y** $x = 5$

Cálculo de A :

Como $g(x) > f(x)$ **entre** $x = 1$ **y** $x = 5$

A se obtiene como :

$$\color{red}{A} = \int_1^5 [g(x) - f(x)]\, dx = \int_1^5 \left[-x + 6 - \frac{5}{x}\right] dx =$$

$$= -\int_1^5 x\, dx + 6 \int_1^5 dx - 5 \int_1^5 \frac{1}{x}\, dx = -\frac{1}{2} x^2 \Big|_1^5 + 6\, x \Big|_1^5 - 5 \ln |x| \Big|_1^5 =$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \cdot x^2 + 6 \cdot x - 5 \cdot \ln |x|\right) \Big|_1^5 =$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \cdot 5^2 + 6 \cdot 5 - 5 \cdot \ln |5|\right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 5 \cdot \ln |1|\right) =$$

$$= \left(-\frac{25}{2} + 30 - 5 \ln |5|\right) - \left(-\frac{1}{2} + 6 - 5 \cdot 0\right) =$$

$$= \left(\frac{35}{2} - 5\ \ln\ |5|\right) - \left(\frac{11}{2} - 0\right) =$$

$$= \frac{35}{2} - 5\ \ln\ |5| - \frac{11}{2} = \frac{24}{2} - 5\ \ln\ |5| = 12 - 5\ \ln\ (5) \quad \text{aprox. } 3.952 > 0$$

Por lo tanto :

el Área de la región comprendida entre $f\ (x) = \frac{5}{x}$ **y** $g\ (x) = -x + 6$ **es :**

A = 12 - 5 ln (5) $\left(\text{aprox. } 3.952 > 0\right)$

+-+

14.3) Hallar el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x) = x$ y $g(x) = x(x-3)$ para $0 \le x \le 5$.

Ej Adic 14.3

Área de la región comprendida entre $f\ (x) = x$ **y** $g\ (x) = x\ (x - 3)$ **para** $0 \le x \le 5$

Para graficar :

puntos de $f\ (x) = x$ **;** $\text{Dom}\ (f) = \mathbb{R}$ **:**

si $x = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (0,\ 0) \quad \in$ gráf (f)

si $x = 5 \quad \Longrightarrow \quad 5 = 5 \quad \Longrightarrow \quad (5,\ 5) \quad \in$ gráf (f)

puntosf = {{0, 0}, {5, 5}}

----

puntos de $g\ (x) = x\ (x - 3)$ **;** $\text{Dom}\ (f) = \mathbb{R}$ **:**

si $x = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \cdot (0 - 3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (0,\ 0) \quad \in$ gráf (g)

si $x = 5 \quad \Longrightarrow \quad 5 \cdot (5 - 3) = 10 \quad \Longrightarrow \quad (5,\ 10) \quad \in$ gráf (g)

Vértice de la parábola $g\ (x) = x\ (x - 3) = x^2 - 3\ x$ **:**

$V = (x_v,\ y_v)$

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y_v = f\ (x_v) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - 3\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}$$

Entonces

$V = (x_v, y_v) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

puntosg = $\left\{\{0, 0\}, \{5, 10\}, \left\{\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right\}\right\}$

Determinemos los puntos de intersección entre f y g

que serán aquellos en donde f (x) = g (x)

$f(x) = g(x) \implies x = x^2 - 3x \implies 0 = x^2 - 3x - x \implies 0 = x^2 - 4x \implies$

$\implies 0 = x(x - 4) \implies x = 0$ ó $x = 4$

son las abscisas de los puntos de intersección de f y g

$\implies x^2 - 6x + 5 = 0$

Calculemos las ordenadas de los puntos de intersección entre f y g
reemplazando x_1 y x_2 en f (x) = x :

Con $x_1 = 0$:

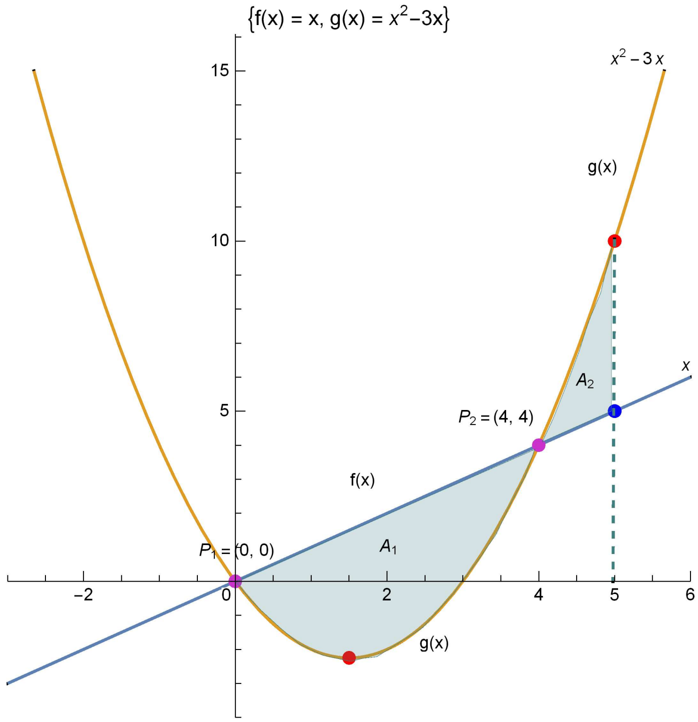
$y_1 = 0 \implies P_1 = (0, 0)$

ahora con $x_2 = 4$:

$y_2 = 4 \implies P_2 = (4, 4)$

puntosinterseccion = {{0, 0}, {4, 4}}

Gráfico para ver cuál es el área encerrada entre f (x) = x y g (x) = $x^2 - 3x$
para $0 \le x \le 5$



Área de la región comprendida entre $f(x) = x$ y $g(x) = x(x-3) = x^2 - 3x$
para $0 \le x \le 5$ está formada por dos áreas A_1 y A_2 tal que $A = A_1 + A_2$

Cálculo de A_1 :

Como $f(x) > g(x)$ entre $x = 0$ y $x = 4$

A_1 se obtiene como :

$$A_1 = \int_0^4 [f(x) - g(x)]\, dx = \int_0^4 \left[x - \left(x^2 - 3x\right)\right] dx =$$

$$= \int_0^4 \left[-x^2 + 4x\right] dx = -\int_0^4 x^2\, dx + 4 \int_0^4 x\, dx = -\frac{1}{3} x^3 \Big|_0^4 + 4 \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^4 =$$

$$= \left(-\frac{1}{3} x^3 + 2x^2\right) \Big|_0^4 =$$

$$= \left(-\frac{1}{3} \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2\right) - \left(-\frac{1}{3} \cdot 0^3 + 2 \cdot 0^2\right) =$$

$$= -\frac{64}{3} + 32 - 0 = \frac{-64 + 96}{3} = \frac{32}{3} > 0$$

Entonces :

$$A_1 = \frac{32}{3}$$

Cálculo de A_2 :

Como g (x) > f (x) entre x = 4 y x = 5

A_2 se obtiene como :

$$A_2 = \int_4^5 [g(x) - f(x)]\, dx = \int_4^5 \left[x^2 - 3x - x\right] dx =$$

$$= \int_4^5 \left[x^2 - 4x\right] dx = \int_4^5 x^2\, dx - 4\int_4^5 x\, dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_4^5 - 4 \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_4^5 =$$

$$= \left(\frac{1}{3} \cdot x^3 - 2 \cdot x^2\right) \Big|_4^5 =$$

$$= \left(\frac{1}{3} \cdot 5^3 - 2 \cdot 5^2\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 4^3 - 2 \cdot 4^2\right) =$$

$$= \left(\frac{125}{3} - 50\right) - \left(\frac{64}{3} - 32\right) =$$

$$= \frac{125 - 150}{3} - \left(\frac{64 - 96}{3}\right) = -\frac{25}{3} - \left(\frac{-32}{3}\right) = -\frac{25}{3} + \frac{32}{3} = \frac{7}{3} > 0$$

Entonces :

$$A_2 = \frac{7}{3}$$

Por lo tanto :

el Área de la región comprendida entre f (x) = x y g (x) = x (x - 3) = x^2 - 3 x
para $0 \le x \le 5$ es $A = A_1 + A_2$:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = \frac{39}{3} = 13$$

A = 13

+-+

14.4) Calcular el área de la región encerrada por las curvas $y = x^2$; $y = \frac{8}{x}$; $x = 5$.

Ej Adic 14.4

Área de la región encerrada por las curvas : $y = x^2$; $y = \frac{8}{x}$; $x = 5$

(x = 5 es la recta vertical)

Llamemos $f(x) = x^2$; $g(x) = \frac{8}{x}$; $x = 5$

Para graficar :

puntos de $f(x) = x^2$; $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$:

si $x = -2 \Longrightarrow (-2)^2 = 4 \Longrightarrow (-2, 4) \in$ **gráfico de f**

si $x = 5 \Longrightarrow 5^2 = 25 \Longrightarrow (5, 25) \in$ **gráfico de f**

Vértice de la parábola $y = x^2$:

$V = (x_v, y_v) = (0, 0)$

puntosf = {{-2, 4}, {0, 0}, {5, 25}}

----

puntos de $g(x) = \frac{8}{x}$; $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{0\}$:

si $x = 1 \Longrightarrow \frac{8}{1} = 8 \Longrightarrow (1, 8) \in$ **gráfico de g**

si $x = 8 \Longrightarrow \frac{8}{8} = 1 \Longrightarrow (8, 1) \in$ **gráfico de g**

si $x = -1 \Longrightarrow \frac{8}{-1} = -8 \Longrightarrow (-1, -8) \in$ **gráfico de g**

si $x = -8 \Longrightarrow \frac{8}{-8} = -1 \Longrightarrow (-8, -1) \in$ **gráfico de g**

puntosg = {{1, 8}, {8, 1}, {-1, -8}, {-8, -1}}

$g(x) = \frac{8}{x}$ **tiene AV en** $x = 0$ **y la recta horizontal** $y = 0$ **es AH**

Determinemos los puntos de intersección entre las dos curvas

que son aquellos para los que $f(x) = g(x)$:

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 = \frac{8}{x} \Longrightarrow x^3 = 8 \Longrightarrow \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{8} \Longrightarrow x = 2$$

es la abscisa del punto de intersección entre las dos curvas

Calculemos la ordenada del punto de intersección entre las dos curvas
reemplazando $x = 2$ **en por ejemplo** $f(x) = x^2$:

$y = 2^2 = 4 \implies P = (2, 4)$

Calculemos los puntos de interseccin entre $f(x) = x^2$ y la recta vertical $x = 5$

ponemos $x = 5$ en $f(x) = x^2$ sale que $y = 5^2 = 25$

Entonces la recta vertical $x = 5$ con $f(x) = x^2$ se cortan en el punto $Q = (5, 25)$

Ahora con $g(x) = \frac{8}{x}$

ponemos $x = 5$ en $g(x) = \frac{8}{x}$ sale que $y = \frac{8}{5}$

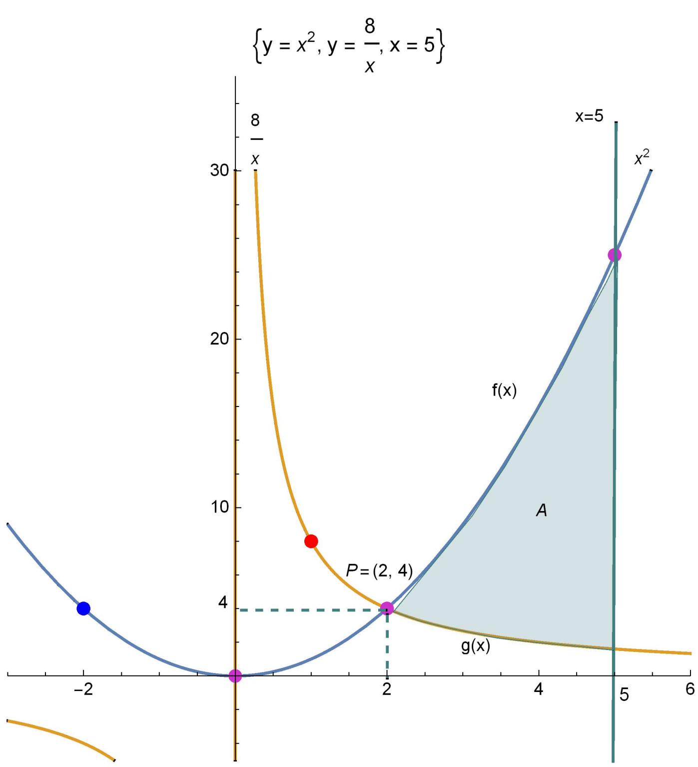
Entonces la recta vertical $x = 5$ con $g(x) = \frac{8}{x}$ se cortan en el punto $R = \left(5, \frac{8}{5}\right)$

----

puntosinterseccion $= \left\{\{2, 4\}, (5, 25), \left(5, \frac{8}{5}\right)\right\}$

Gráfico para ver cuál es el Área de la región encerrada por las curvas :

$f(x) = x^2$; $g(x) = \frac{8}{x}$; $x = 5$



A es el área de la región encerrada por las curvas

$f(x) = x^2$; $g(x) = \frac{8}{x}$; $x = 5$

Cálculo de A :

Como $f(x) > g(x)$ **entre** $x = 2$ **y** $x = 5$

A se obtiene como :

$$A = \int_2^5 [f(x) - g(x)]\, dx = \int_2^5 \left[x^2 - \frac{8}{x}\right] dx =$$

$$= \int_2^5 x^2\, dx - 8\int_2^5 \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_2^5 - 8\cdot \ln|x|\Big|_2^5 =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\cdot x^3 - 8\cdot\ln|x|\right)\Big|_2^5 =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\cdot 5^3 - 8\cdot\ln|5|\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 - 8\cdot\ln|2|\right) =$$

$$= \left(\frac{125}{3} - 8\cdot\ln|5|\right) - \left(\frac{8}{3} - 8\cdot\ln|2|\right) =$$

$$= \frac{125}{3} - 8\cdot\ln|5| - \frac{8}{3} + 8\cdot\ln|2| =$$

$$= \frac{125}{3} - \frac{8}{3} - 8\cdot\ln(5) + 8\cdot\ln(2) =$$

$$= \frac{117}{3} - 8(\ln(5) - \ln(2)) =$$

$$= 39 - 8\cdot\ln\left(\frac{5}{2}\right) > 0 \qquad (\text{aprox. } 31.667)$$

Por lo tanto :

el Área de la región encerrada por las curvas

$f(x) = x^2$; $g(x) = \frac{8}{x}$; $x = 5$ **es :**

$$A = 39 - 8\cdot\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

+-+