Cálculo de áreas

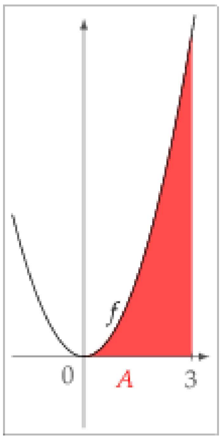
Una de las aplicaciones de la regla de Barrow para el cálculo de integrales definidas es el cálculo de áreas.

Cálculo de área entre el gráfico de una función y el eje x

Ya vimos que, si la función f es positiva o cero en el intervalo $[a;b]$, la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función f entre los límites a y b.

Ejemplo. Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función $f(x) = x^2$ para $0 \le x \le 3$.

El área pedida es la sombreada en el siguiente gráfico:



Como la función f es positiva o cero en el intervalo $[0;3]$ (de hecho, la función f es positiva o cero para todos los reales), el área A pedida está dada por

$$A = \int_0^3 x^2 dx.$$

Para calcular la integral, podemos usar la regla de Barrow. Como $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ es una primitiva de $f(x) = x^2$ tenemos que

$$\int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^3 = \frac{1}{3}3^3 - \frac{1}{3}0^3 = 9$$

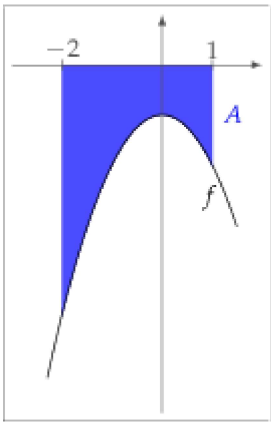
con lo cual

$$\boxed{A = 9.}$$

Si la función f es negativa o cero en el intervalo $[a;b]$, la integral definida da el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función f pero con el signo cambiado. Por lo tanto, para calcular el área, bastará con cambiar el signo de la integral definida.

Ejemplo. Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función $f(x) = -x^2 - 1$ para $-2 \le x \le 1$.

En el siguiente gráfico aparece sombreada la región en cuestión:



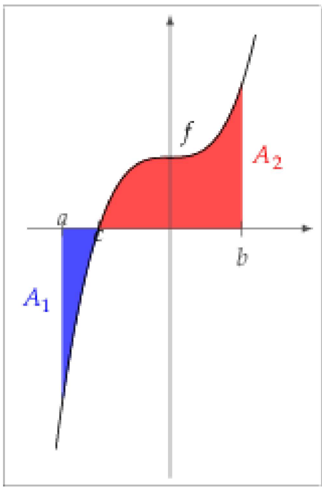
La función f toma valores negativos en todos los reales, con lo cual el área A buscada es

$$A = -\int_{-2}^{1}(-x^2-1)dx = \int_{-2}^{1}(x^2+1)dx = \left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\Big|_{-2}^{1}$$
$$= \left(\frac{1}{3}1^3+1\right) - \left(\frac{1}{3}(-2)^3+(-2)\right) = \frac{4}{3}+\frac{14}{3} = 6.$$

Es decir,

$$\boxed{A = 6.}$$

Si se quiere calcular el área de la región comprendida entre el gráfico de una función f y el eje x para $a \leq x \leq b$, en el caso en que la función f tome valores positivos y negativos en el intervalo $[a;b]$, se deben estudiar los cambios de signo de la función. Por ejemplo, si queremos calcular el área de la región sombreada en la figura



debemos calcular el punto c donde la función corta el eje x (es decir, donde la función vale cero) y calcular la integral definida entre a y c con signo negativo, más la integral definida entre c y b con signo positivo.

Es decir, el área A a calcular será

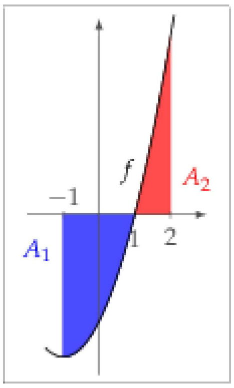
$$A = A_1 + A_2 = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Ejemplo. Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función $f(x) = x^2+2x-3$ para $-1 \leq x \leq 2$.

Veamos primero si el gráfico de la función $f(x) = x^2+2x-3$ corta al eje x para algún valor entre -1 y 2.

$$x^2+2x-3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4.1.(-3)}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2}$$

es decir, las dos raíces de la cuadrática son 1 y -3. Hagamos un gráfico aproximado para ver cuál es el área pedida:



Entonces, el área a calcular es

$$A = A_1 + A_2 = -\int_{-1}^{1} (x^2 + 2x - 3)dx + \int_{1}^{2} (x^2 + 2x - 3)dx.$$

Para calcular las integrales definidas en cuestión, usamos la regla de Barrow. Primero calculamos las primitivas de $f(x) = x^2 + 2x - 3$:

$$\int (x^2 + 2x - 3)\, dx = \int x^2\, dx + 2\int x\, dx - 3\int 1\, dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 - 3x + C = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + C.$$

Ahora, elegimos una primitiva (por ejemplo, con $C = 0$) y la evaluamos

$$A = -\left(\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x \right) \Big|_{-1}^{1} \right) + \left(\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x \right) \Big|_{1}^{2} \right) =$$

$$= -\left(\left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 + 3\right) \right) + \left(\left(\frac{1}{3}2^3 + 2^2 - 3.2\right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right) \right) = -\left(-\frac{16}{3}\right) + \frac{7}{3}.$$

Es decir, el área pedida es

$$\boxed{A = \frac{23}{3}.}$$

Ejemplo. Calcular el área de la región encerrada entre el eje x y el gráfico de la función $f(x) = x^3 - 4x$.

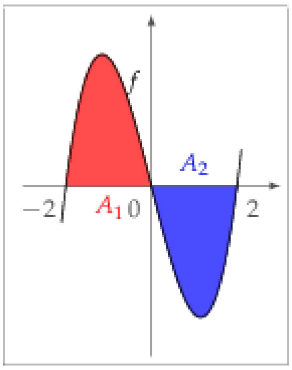
Calculamos los valores de x para los cuales $f(x) = 0$, es decir, donde el gráfico de f corta al eje x.

$$x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x.(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = 2 \text{ ó } x = -2.$$

Para ver qué signos toma la función dada en los intervalos delimitados por las raíces, podemos usar el corolario del Teorema de Bolzano ya que la función es continua:

x	-2	$(-2,0)$	0	$(0,2)$	2
$f(x)$	0	$+$	0	$-$	0
pues		$f(-1) = 3$		$f(1) = -3$	

Luego, en un gráfico aproximado de f sombreamos el área a calcular (en azul el área debajo del eje y en rojo el área arriba del eje):



Es decir, el área a calcular está dada por

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,dx - \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\,dx.$$

Calculamos ahora una primitiva de $x^3 - 4x$ y aplicamos la regla de Barrow, y nos queda

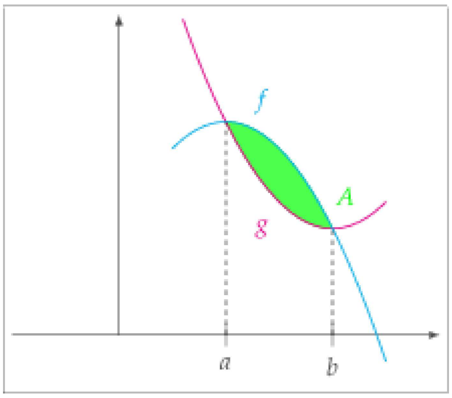
$$A = \left((\frac{1}{4}x^4 - 2x^2)\Big|_{-2}^{0} \right) - \left((\frac{1}{4}x^4 - 2x^2)\Big|_{0}^{2} \right) = \left(0 - (\frac{1}{4}(-2)^4 - 2(-2)^2) \right) - \left((\frac{1}{4}2^4 - 2.2^2) - 0 \right) = 4 - (-4)$$

con lo que

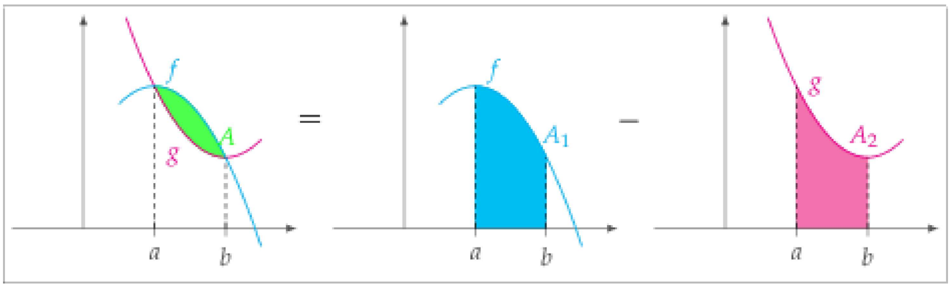
$$\boxed{A = 8.}$$

Cálculo de área entre el gráfico de dos funciones

Supongamos que tenemos dos funciones f y g que toman valores positivos y queremos calcular el área de la región encerrada entre sus gráficos. Veamos primero el caso del siguiente gráfico:



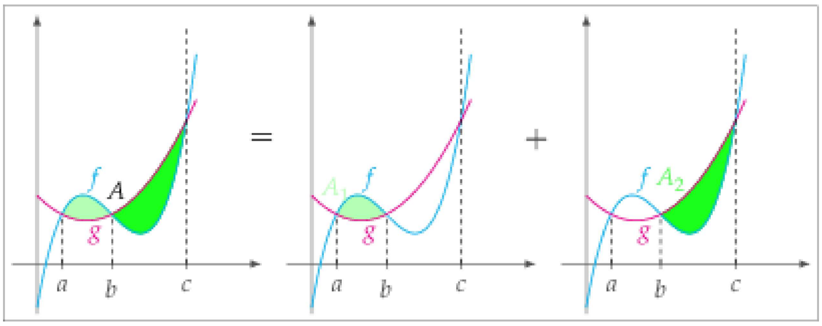
En este caso, $A_1 = \int_a^b f(x)dx$ nos da el área encerrada entre el gráfico de f y el eje x para $a \leq x \leq b$ y $A_2 = \int_a^b g(x)dx$ nos da el área encerrada entre el gráfico de g y el eje x para $a \leq x \leq b$. El área A resulta ser la diferencia entre estas dos áreas:



Por lo tanto, el área A buscada es

$$A = A_1 - A_2 = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Veamos ahora otro ejemplo:



En este caso, el área pedida A es la suma de dos áreas. Usando lo que vimos antes, la primera está dada por $A_1 = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$ y la otra está dada por $A_2 = \int_b^c (g(x) - f(x))\, dx$. Por lo tanto, tenemos que

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx + \int_b^c (g(x) - f(x))\, dx.$$

Para calcular en general el área de la región encerrada entre los gráficos de dos funciones f y g, sin importar si son positivas, negativas o cero, tenemos que buscar los valores de x para los cuales $f(x) = g(x)$. Una vez calculados estos valores, para cada par de valores a y b consecutivos, nos fijamos qué función es mayor en el intervalo $(a; b)$. Si $f(x) > g(x)$ en el intervalo $(a; b)$, el área está dada por $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$. Si $f(x) < g(x)$ en el intervalo $(a; b)$, el área está dada por $\int_a^b (g(x) - f(x))dx$. Una vez calculada el área para cada intervalo, el área total se obtiene sumando las áreas obtenidas.

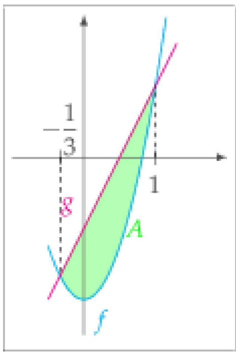
Observamos que determinar si $f(x) > g(x)$ o $f(x) < g(x)$ es equivalente a ver si $f(x) - g(x) > 0$ o $f(x) - g(x) < 0$, es decir, estudiar la positividad o negatividad de la función $f - g$. Entonces, si f y g son funciones continuas en un intervalo $(a; b)$ en el cual sus gráficos no se intersecan (y, por lo tanto, $f(x) - g(x) \neq 0$ para todo $x \in (a; b)$), por el corolario del Teorema de Bolzano, para ver cuál de ellas es mayor en todo el intervalo, bastará comparar los valores que toman en un punto cualquiera de $(a; b)$.

Ejemplo. Calcular el área de la región encerrada entre los gráficos de $f(x) = 3x^2 - 2$ y $g(x) = 2x - 1$.

Primero calculamos valores de x para los cuales $f(x) = g(x)$:

$$3x^2 - 2 = 2x - 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ó } x = -\frac{1}{3}.$$

Es decir, los valores de x que delimitan el área son $x = -\frac{1}{3}$ y $x = 1$. Para ver qué función es mayor en el intervalo $(-\frac{1}{3}; 1)$, por el corolario del Teorema de Bolzano, basta ver qué función es mayor en un punto del intervalo. Por ejemplo, tomemos el valor 0: $f(0) = -2$ y $g(0) = -1$, por lo que $f(x) < g(x)$ en el intervalo $(-\frac{1}{3}; 1)$. Un gráfico aproximado de la situación es el siguiente:



Entonces, el área a calcular es

$$A = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} \left(2x - 1 - (3x^2 - 2)\right) dx =$$

$$= \int_{-\frac{1}{3}}^{1} \left(-3x^2 + 2x + 1\right) dx = \left(-x^3 + x^2 + x\right)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{1} = (-1 + 1 + 1) - \left(-(-\frac{1}{3})^3 + (-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{1}{3})\right)$$

con lo que

$$\boxed{A = \frac{32}{27}.}$$

Ejemplo. Calcular el área de la región encerrada entre los gráficos de $f(x) = 4x^3$ y $g(x) = 4x$.

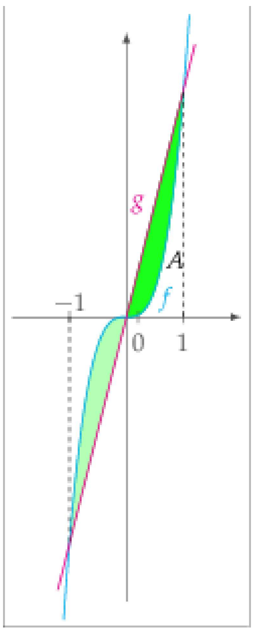
Primero calculamos los valores de x donde los gráficos de las funciones se cortan:

$$4x^3 = 4x \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = 1 \text{ ó } x = -1.$$

Ahora vamos a usar el corolario del Teorema de Bolzano para hacer una tabla que muestre qué pasa con f y g en cada intervalo delimitado por estos valores de x:

x	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1
f	-4	$f(-0,5) = -0,5$	0	$f(0,5) = 0,5$	4
g	-4	$g(-0,5) = -2$	0	$g(0,5) = 2$	4
luego		$f > g$		$f < g$	

Podemos hacer ahora un gráfico aproximado de la situación:



Entonces, el área de la región encerrada entre los gráficos resulta ser

$$A = \int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))\,dx + \int_{0}^{1} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{-1}^{0} \left(4x^3 - 4x\right) dx + \int_{0}^{1} \left(4x - 4x^3\right) dx$$
$$= (x^4 - 2x^2)\Big|_{-1}^{0} + (2x^2 - x^4)\Big|_{0}^{1} = 0 - (1 - 2) + (2 - 1) - 0$$

con lo que

$$\boxed{A = 2.}$$

Usando integrales definidas podemos calcular también áreas delimitadas por gráficos funciones pero entre dos valores de la abscisa x.

Ejemplo. Calcular el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 2x^2$ para $0 \leq x \leq 2$.

Como siempre, primero calculamos los valores de x donde los gráficos de las funciones se cortan:

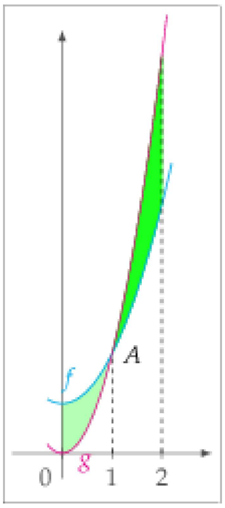
$$x^2 + 1 = 2x^2 \Leftrightarrow -x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ó } x = 1.$$

Como el área que nos interesa está dada por los valores de x entre 0 y 2, de los valores obtenidos sólo nos interesa $x = 1$.

Hagamos una tabla para ver cómo se comportan f y g en el intervalo $[0;2]$:

x	$[0;1)$	1	$(1;2]$
f	$f(0) = 1$	$f(1) = 2$	$f(2) = 5$
g	$g(0) = 0$	$g(1) = 2$	$g(2) = 8$
luego	$f > g$		$f < g$

Podemos ver esta situación en el siguiente gráfico:



Luego, el área total pedida será:

$$A = \int_0^1 \left(-x^2 + 1\right) dx + \int_1^2 \left(x^2 - 1\right) dx.$$

Calculando primitivas para $-x^2 + 1$ y $x^2 - 1$ y usando la regla de Barrow, tenemos que

$$A = \left(-\frac{1}{3}x^3 + x\right) \Big|_0^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right) \Big|_1^2 = -\frac{1}{3}1^3 + 1 - 0 + \frac{1}{3}2^3 - 2 - (\frac{1}{3}1^3 - 1) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - (-\frac{2}{3})$$

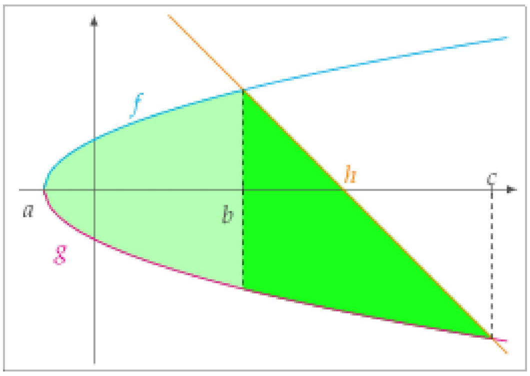
con lo que el área pedida será

$$\boxed{A = 2.}$$

Con las herramientas que contamos ahora, podemos calcular áreas de regiones delimitadas por gráficos de funciones en otras situaciones.

Ejemplo. Calcular el área de la región delimitada por los gráficos de $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = -\sqrt{x+1}$ y $h(x) = -x + 5$.

En este caso conviene hacer un gráfico primero para entender la situación:



Para calcular esta área, podemos pensar en partirla en dos: primero, calcular el área encerrada por los gráficos de f y g desde la abscisa a del punto en que se cortan hasta b donde f y h valen lo mismo; luego, calcular el área desde ese valor b hasta c, que es la abscisa del punto donde se cortan los gráficos de h y g y finalmente, sumar estas dos áreas.

Primero busquemos los valores de a, b y c en cuestión.

El valor a es la abscisa del punto donde f y g coinciden:

$$\sqrt{x+1} = -\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

El valor b es la abscisa del punto donde el gráfico de f se corta con el de h:

$$\sqrt{x+1} = -x+5 \Leftrightarrow x+1 = (-x+5)^2 \text{ y } -x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x+1 = x^2-10x+25 \text{ y } 5 \geq x$$
$$\Leftrightarrow 0 = x^2-11x+24 \text{ y } 5 \geq x \Leftrightarrow (x=3 \text{ o } x=8) \text{ y } 5 \geq x \Leftrightarrow x=3.$$

El valor c es la abscisa del punto donde el gráfico de h se corta con el de g:

$$-\sqrt{x+1} = -x+5 \Leftrightarrow x+1 = (-x+5)^2 \text{ y } -x+5 \leq 0 \Leftrightarrow x+1 = x^2-10x+25 \text{ y } 5 \leq x$$
$$\Leftrightarrow 0 = x^2-11x+24 \text{ y } 5 \leq x \Leftrightarrow (x=3 \text{ o } x=8) \text{ y } 5 \leq x \Leftrightarrow x=8.$$

Con todo esto, tenemos que el área buscada será

$$A = \int_{-1}^{3} (f(x)-g(x))\,dx + \int_{3}^{8} (h(x)-g(x))\,dx =$$
$$\int_{-1}^{3} \left(\sqrt{x+1} - (-\sqrt{x+1})\right) dx + \int_{3}^{8} \left(-x+5-(-\sqrt{x+1})\right) dx$$
$$= \int_{-1}^{3} 2\sqrt{x+1}\,dx + \int_{3}^{8} \left(-x+5+\sqrt{x+1}\right)\,dx$$

Calculando las primitivas correspondientes (¡queda como ejercicio para el lector!) y aplicando la regla de Barrow tenemos que

$$A = \left(\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{-1}^{3} + \left(-\frac{1}{2}x^2+5x+\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{3}^{8} = \frac{32}{3} - 0 + 26 - \frac{95}{6}$$

con lo que el área buscada es

$$\boxed{A = \frac{125}{6}.}$$