Capítulo 2

Sistemas lineales y matrices

2.1. Sistemas lineales

Ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones

Una *ecuación lineal* en las variables $x_1,\ x_2,\dots,x_n$ es de la forma

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n = b$$

donde $a_1,\ a_2,\dots,a_n$ son números reales (que llamamos *coeficientes de la ecuación*) y b es también un número real. Un ejemplo conocido para nosotros es la ecuación implícita de un plano, como puede ser

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 8.$$

Una solución de esta ecuación será una terna $X = (x_1, x_2, x_3)$ para la cual se cumpla la igualdad. Por ejemplo, $(1, 0, 1)$ es una de estas soluciones ya que $3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 8$.

En el caso general, una ecuación con n variables tendrá soluciones que son n-uplas. Así la ecuación en cuatro variables

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$$

tiene soluciones que son 4-uplas, es decir $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Es fácil chequear que $X = (2, 0, 4, 0)$ es una de estas soluciones y que $X = (1, 2, 0, -1)$ no es solución reemplazando los valores en la ecuación: $2 \cdot 2 + 0 - 4 + 3 \cdot 0 = 0$, mientras que $2 \cdot 1 + 2 - 0 + 3 \cdot (-1) = 1 \neq 0$.

Cuando $b = 0$, como en este último caso, se dice que la ecuación es *homogénea*. Para cualquier ecuación homogénea, el punto $(0, \dots, 0)$ satisface la ecuación. Se lo llama la *solución trivial*.

Un *sistema de ecuaciones* reúne varias ecuaciones en las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ y en este caso una n-upla será solución del sistema si satisface cada una de ellas.

Por ejemplo, para el sistema

$$S : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4 \\ & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \end{array} \right. ,$$

vemos que $X = (1, 1, 3, 0)$ es solución, mientras que $X = (2, 0, 4, 0)$ no lo es (ya que no verifica, por ejemplo, la segunda ecuación).

Cuando todas las ecuaciones del sistema son homogéneas diremos que es un *sistema homogéneo*; en caso contrario, diremos que es *no homogéneo*. Como $X = (0, \ldots, 0)$ es solución de cualquier ecuación homogénea, tenemos que:

Un sistema homogéneo siempre tiene (al menos) una solución, la solución trivial.

Sistemas escalonados

En este curso resolver un sistema con n incógnitas quiere decir hallar el conjunto de **todos** los $X \in \mathbb{R}^n$ que lo satisfacen. Algunos sistemas se podrán resolver despejando de la última ecuación alguna variable en función de otras y sustituyendo esta relación en las demás ecuaciones. Estos son los *sistemas escalonados*.

Por ejemplo, el sistema

$$S : \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 5 \\ & & 3x_2 & = & -6 \end{array} \right.$$

es escalonado. De la segunda ecuación despejamos $x_2 = -2$ y, sustituyendo este valor en la primera, nos queda que $x_1 + (-2) = 5$. De aquí despejamos $x_1 = 7$ y concluimos que la única solución del sistema es $(x_1, x_2) = (-2, 7)$.

El mismo procedimiento se aplica para resolver sistemas escalonados con más incógnitas.

Ejemplo 1. Resolver el sistema

$$S : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4 \\ & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \end{array} \right. .$$

Solución. Despejamos la variable x_3 de la última ecuación:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4 \\ & & & & x_3 & & & = & 2x_4 + 3 \end{array} \right. ,$$

y luego sustituimos la expresión para x_3 en función de la variable x_4 en cada una de las ecuaciones de arriba:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & x_2 & - & (2x_4 + 3) & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & (2x_4 + 3) & - & x_4 & = & 4 \\ & & & & x_3 & & & = & 2x_4 + 3 \end{array} \right. .$$

Podemos despejar también (mirando la ecuación central) la variable x_2 en función de x_4:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & x_2 & - & (2x_4 + 3) & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & & & & & = & -x_4 + 1 \\ & & & & x_3 & & & = & 2x_4 + 3 \end{array} \right. .$$

Ahora sustituimos la expresión obtenida para x_2 en función de x_4 en la primera ecuación:

$$\begin{cases} 2x_1 + (-x_4+1) - (2x_4+3) + 3x_4 = 0 \\ x_2 = -x_4+1 \\ x_3 = 2x_4+3 \end{cases}.$$

Por último despejamos la variable x_1:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -x_4+1 \\ x_3 = 2x_4+3 \end{cases}.$$

Esto significa que las 4-uplas que son soluciones de este sistema tienen sus coordenadas restringidas por las 3 ecuaciones obtenidas. El hecho que la variable x_4 no aparezca despejada quiere decir que x_4 está *libre*, es decir, que puede tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$, y con ese valor obtenerse una solución. Escribimos:

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ es solución de } S \quad \Leftrightarrow \quad X = (1, -x_4+1, 2x_4+3, x_4) \text{ con } x_4 \in \mathbb{R}.$$

La expresión final que adoptamos para el conjunto solución es similar a la ecuación paramétrica de una recta. Cambiamos la variable por un parámetro λ y tenemos que:

$$X = (1, -\lambda+1, 2\lambda+3, \lambda) = (0, -\lambda, 2\lambda, \lambda) + (1,1,3,0)$$

$$X = \lambda \cdot (0,-1,2,1) + (1,1,3,0) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Esto quiere decir que para cada valor de λ que elijamos, obtendremos una solución de S:

$$\begin{array}{ll} \lambda = 1 & \Rightarrow X = 1 \cdot (0,-1,2,1) + (1,1,3,0) = (1,0,5,1) \text{ es solución de } S \\ \lambda = -2 & \Rightarrow X = (-2) \cdot (0,-1,2,1) + (1,1,3,0) = (1,3,-1,-2) \text{ es solución de } S \\ \lambda = \cdots & \Rightarrow X = \cdots \end{array}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones; decimos entonces que S es un *sistema compatible indeterminado*, y lo abreviamos S.C.I.

Respuesta: El conjunto solución del sistema es $\{\lambda \cdot (0,-1,2,1) + (1,1,3,0) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Matriz ampliada asociada a un sistema

El método que usaremos para resolver sistemas lineales consiste en transformar el sistema dado en otro que sea escalonado y tenga las mismas soluciones que el original, haciendo ciertas operaciones con las ecuaciones del sistema. Estas operaciones involucrarán únicamente hacer cuentas con los coeficientes de las ecuaciones.
Por este motivo, a un sistema lineal le asociaremos una matriz (esto es, un arreglo rectangular de números) construida a partir de los coeficientes del sistema. Recíprocamente, a cada matriz le asociaremos un sistema de ecuaciones lineales.
Más precisamente, dado un sistema lineal le asociamos una *matriz ampliada*. Esta matriz tiene una fila por cada ecuación del sistema y una columna por cada incógnita, más una columna adicional para los términos constantes de cada ecuación. En cada fila de la matriz se ubican los coeficientes de las incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ en las columnas correspondientes y, en la última columna, se escribe la constante b que aparece a la derecha en la ecuación. Cuando una incógnita no aparece explícitamente en una ecuación, el coeficiente correspondiente es 0.

Por ejemplo, para el sistema

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 8 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

la matriz ampliada del sistema es:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{ecuación 1} \\ \leftarrow \text{ecuación 2} \\ \leftarrow \text{ecuación 3} \\ \leftarrow \text{ecuación 4} \end{array} .$$

Recíprocamente, dada la matriz ampliada de un sistema S_2

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right),$$

reconstruimos el sistema armando una ecuación por cada fila de la matriz:

$$S_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & & - & 2x_3 & & & + & 7x_5 & = & 12 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 10x_3 & + & 6x_4 & + & 12x_5 & = & 28 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 5x_3 & + & 6x_4 & - & x_5 & = & -1 \end{array} \right. .$$

Veamos ejemplos de matrices ampliadas asociadas a algunos sistemas:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Estas matrices tienen más ceros que las de los ejemplos anteriores, más aún, los tienen repartidos de una forma especial: son matrices escalonadas,

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 4 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

En cada fila, el primer número distinto de cero es un 1; este número resaltado se llama el 1 *principal de la fila* (en la práctica no seremos tan estrictos, podemos trabajar con el primer lugar no nulo de cada fila).

Al mirar dos filas consecutivas, sus unos principales forman un escalón hacia la derecha (no pueden estar a la misma altura). Es decir, la de abajo debe empezar con más ceros que la de arriba. Si una fila tiene todos sus lugares iguales a cero, se ubica al final de la matriz, como en el tercer ejemplo.

Estas matrices corresponden a sistemas escalonados.

Método de eliminación de Gauss

Vamos a aplicar el método de eliminación de Gauss para llevar un sistema lineal a un sistema equivalente escalonado. Las operaciones que se realizan sobre las ecuaciones de un sistema al aplicar este método, que no cambian su conjunto solución, son operaciones que se reflejan sobre la matriz ampliada. Al hacerlo tendremos matrices ampliadas *equivalentes* entre sí. Las operaciones permitidas sobre una matriz para obtener una matriz equivalente en las filas las abreviamos de la siguiente manera:

(1)	F_i	$\leftrightarrow F_j$		(intercambiar dos filas)
(2)	$F_i + \alpha F_j$	$\to F_i$	$\alpha \in \mathbb{R}$	(a una fila sumarle un múltiplo de otra)
(3)	βF_i	$\to F_i$	si $\beta \neq 0$	(multiplicar una fila por un número $\neq 0$)

Revisamos su significado y notación trabajando con ejemplos.

Ejemplo 2. Resolver el sistema

$$S : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_3 = 2 \\ -2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Solución. Veamos cómo resolver el sistema trabajando con su matriz ampliada

$$S : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_3 = 2 \\ -2x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Esta matriz no está escalonada, pero podemos operar con las filas para conseguir un cero debajo del 1 principal de la primera fila (resaltado debajo). Calculamos lugar a lugar la Fila 2 menos el doble de la Fila 1, y lo reemplazamos en la segunda fila:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) F_2 - 2 \cdot F_1 \to F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

La segunda matriz todavía no está escalonada, pero podemos repetir el procedimiento para conseguir que la tercera fila empiece con más ceros que la segunda. Con la misma notación que antes operamos sobre la tercera fila:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) F_3 + F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Ahora sí, la matriz resulta escalonada (no exigimos un 1 en el lugar principal). Veamos a qué sistema está asociada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}.$$

La última ecuación de este sistema proviene de reconstruir $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1$, que es equivalente a $0 = 1$. Esta ecuación en las incógnitas $x_1,\ x_2,\ x_3$ no tiene solución. Por lo tanto, el sistema S (que es equivalente a éste) no admite solución: ninguna terna (x_1, x_2, x_3) lo satisface. Decimos que es un *sistema incompatible* o S.I. para abreviar.

Respuesta: El sistema no tiene soluciones.

Habíamos mencionado que una ecuación de 3 incógnitas se podía relacionar con la ecuación implícita de un plano. Un sistema de tres de estas ecuaciones, como el del ejemplo anterior, se puede reinterpretar como la intersección de tres planos, ya que buscamos puntos que satisfagan las tres ecuaciones. En este caso, la intersección es vacía.

Ejemplo 3. Resolver el sistema

$$S : \begin{cases} - 2x_3 + 7x_5 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 6x_4 + 12x_5 = 28 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 - 5x_5 = -1 \end{cases}$$

Solución. La matriz ampliada de este sistema es

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right).$$

No está escalonada, pero mejora si intercambiamos sus dos primeras filas. Anotamos esta operación como se muestra:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right) F_1 \leftrightarrow F_2 \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right).$$

Para ir hacia la forma escalonada necesitamos que la última fila empiece con 0, para lograr esto la modificamos "usando"la primera fila:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right) F_3 - F_1 \to F_3 \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{array}\right).$$

Queremos que la última fila empiece con al menos tres 0. Para lograrlo, observamos que debemos recurrir a la fila 2 (si involucramos a la fila 1 arruinamos todo lo hecho).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{array}\right) 2F_3 + 5F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

(Este útimo paso es una combinación de la propiedad (3), $2F_3 \to F_3$, y la propiedad (2), $F_3 + 5F_2 \to F_3$.)

Si bien dijimos que no íbamos a ser tan estrictos, esta vez vamos a buscar cómo llegar a los 1 principales. Podemos cambiar cada fila por un múltiplo de ella misma:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}F_1 & \to & F_1 \\ & & \\ -\frac{1}{2}F_2 & \to & F_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Ahora que tenemos la matriz escalonada, reconstruimos el sistema y lo resolvemos despejando de abajo hacia arriba:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 3x_4 & + & 6x_5 & = & 14 \\ & & & & x_3 & & & - & \frac{7}{2}x_5 & = & -6 \\ & & & & & & & & x_5 & = & 2 \end{array} \right. .$$

Reemplazamos $x_5 = 2$ en las primeras ecuaciones y obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} x_1+ & 2x_2- & 5x_3+ & 3x_4+ & 6\cdot 2 & = & 14 \\ & & x_3- & & \frac{7}{2}\cdot 2 & = & -6 \\ & & & & x_5 & = & 2 \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{cccccccc} x_1+ & 2x_2- & 5x_3+ & 3x_4+ & 12 & = & 14 \\ & & x_3- & & 7 & = & -6 \\ & & & & x_5 & = & 2 \end{array} \right.$$

Después de despejar la variable x_3, también se la puede sustituir en la primera ecuación:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & 5\cdot 1 & + & 3x_4 & + & 12 & = & 14 \\ & & & & x_3 & & & & & = & 1 \\ & & & & & & & & x_5 & = & 2 \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & & = & -2x_2 - 3x_4 + 7 \\ & x_3 & = & 1 \\ & x_5 & = & 2 \end{array} \right.$$

Si bien hubiéramos podido despejar de otras formas, siempre se prodrán despejar en función de las demás, aquellas variables que se corresponden con los unos principales. Las variables x_2 y x_4 que no están despejadas, están *libres*, es decir, pueden tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$. Así, las soluciones de S_2 son de la forma:

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2x_2 - 3x_4 + 7, x_2, 1, x_4, 2) \text{ con } x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Si cambiamos las variables libres por los parámetros s y t, la forma paramétrica del conjunto solución es

$$X = (-2s - 3t + 7, s, 1, t, 2) = s(-2, 1, 0, 0, 0) + t(-3, 0, 0, 1, 0) + (7, 0, 1, 0, 2), \text{ con } s, t \in \mathbb{R}.$$

El sistema tiene infinitas soluciones, es un S.C.I.

Respuesta: El sistema es compatible indeterminado y su conjunto solución es

$$\{s(-2, 1, 0, 0, 0) + t(-3, 0, 0, 1, 0) + (7, 0, 1, 0, 2), \text{ con } s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Ejemplo 4. Resolver el sistema

$$S : \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 8 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Solución. La matriz ampliada asociada a este sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Como en los ejemplos anteriores, para resolver el sistema escalonamos su matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) F_1 \leftrightarrow F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ F_3 - 2F_1 & \to & F_3 \\ F_4 + F_1 & \to & F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

$$F_4 - F_2 \to F_4 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) F_4 + F_3 \to F_4 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ahora volvemos al sistema de ecuaciones

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5 \\ & & x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ & & & - & x_3 & = & -2 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Observemos que la última ecuación (que es la ecuación $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$) no impone ninguna restricción en las variables, y entonces la podemos omitir. En particular, vemos que el sistema de cuatro ecuaciones que vinculaba estas variables contenía información redundante, ya que el sistema resulta equivalente a otro con tres ecuaciones. Además, en este caso, al despejar de abajo hacia arriba no queda ninguna variable libre:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & + & 2x_3 & = & 5 \\ & & x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ & & & - & x_3 & = & -2 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & + & 2 \cdot 2 & = & 5 \\ & & x_2 & + & 4 \cdot 2 & = & 3 \\ & & & & x_3 & = & 2 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & & & = & 1 \\ & x_2 & & = & -5 \\ & & x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

El sistema tiene una única solución, la terna $X = (1, -5, 2)$. Se trata entonces de un *sistema compatible determinado* o S.C.D. para abreviar.

Respuesta: El sistema es compatible determinado y su única solución es $X = (1, -5, 2)$.

Resolución simultánea de sistemas

Ejemplo 5. Resolver los sistemas lineales asociados a las matrices $(A|b_1)$, $(A|b_2)$ y $(A|b_3)$ con:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \; ; \; b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \; ; \; b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solución. A partir de las matrices ampliadas, construimos los sistemas a resolver:

$$S_I : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$$

$$S_{II} : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$S_{III} : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Si bien estos sistemas son distintos, se resuelven (respectivamente) escalonando las matrices ampliadas dadas por:

$$\begin{array}{ccccc} (A|b_1) & & (A|b_2) & & (A|b_3) \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right) & ; & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) & ; & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right). \end{array}$$

En la tercera matriz, observamos que, como la última columna tiene todos los coeficientes iguales a 0 (el sistema era homogéneo), cualquier operación que hagamos en las filas dará lugar a una matriz cuya última columna tendrá todos 0. Por este motivo, al escalonarla podemos omitir esta última columna y trabajar simplemente con la matriz A. (Esta observación es válida para cualquier sistema homogéneo.)
Para conseguir matrices equivalentes que sean escalonadas, podemos ver que basta hacer las mismas operaciones para las tres matrices anteriores. Por ejemplo:

$$(A|b_1) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right) \quad F_2 - 2F_1 \to F_2 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$(A|b_2) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad F_2 - 2F_1 \to F_2 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad .$$

$$A \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad F_2 - 2F_1 \to F_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Los cambios en las matrices coinciden en los tres casos, excepto por la última columna. Para resumir la resolución de estos tres sistemas anotamos:

$$(A|b_1|b_2) \to \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right),$$

(no escribimos la columna b_3 de resultados que está formada sólo por 0) y llevamos a cabo las operaciones sobre las filas simultáneamente:

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) F_2 - 2F_1 \to F_2 \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$$F_3 - 2F_1 \to F_3 \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -6 & 4 & -2 & -4 & 2 \end{array}\right) F_3 - 2F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right).$$

Finalmente al ver la matriz escalonada se reconstruyen los tres sistemas asociados S'_I, S'_{II} y S'_{III} equivalentes a los sistemas que se quiere resolver:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \to \quad S'_I : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ \quad - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \\ \qquad 0 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \quad \to \quad S'_{II} : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ \quad - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ \qquad 0 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad S'_{III} : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ \quad - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ \qquad 0 = 0 \end{cases},$$

y cada uno de ellos se resuelve sustituyendo de abajo hacia arriba:

$$S'_I : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 = \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3} \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Podemos omitir la última ecuación y sustituir hacia arriba

$$\begin{cases} x_1 + \left(\frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}\right) - x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 = \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3} \end{cases},$$

y al terminar de despejar nos queda

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3} \end{cases}$$

es decir,

$$X = \left(\frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}, \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}, x_3, x_4\right) \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Concluimos escribiendo las soluciones de S_I en función de dos parámetros s y t:

$$X = s\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0\right) + t\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1\right) + \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0\right) \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Al proceder con el segundo sistema,

$$S'_{II}: \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ \quad - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ \qquad 0 = -4 \end{cases}$$

vemos que su última ecuación "$0 = -4$"no se satisface para ninguna 4-upla, y así concluimos que no tiene solución o, dicho de otra forma, que su conjunto de soluciones es vacío. Es decir, el sistema S_{II} es incompatible.
El sistema S'_{III} es homogéneo:

$$S'_{III}: \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ \quad - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ \qquad 0 = 0 \end{cases}.$$

Su última ecuación se puede omitir y tendrá, como en el caso de S_I, infinitas soluciones. Queda como ejercicio hallarlas y verificar que una expresión posible para dichas soluciones es

$$X = s\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0\right) + t\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1\right) \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

2.2. Matrices

Una matriz es un arreglo rectangular de números reales. Consideramos el conjunto $\mathbb{R}^{m\times n}$ de todas las matrices de m filas y n columnas (siempre anotamos $filas \times columnas$ en ese orden). Mostramos algunos ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}\,;\ \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}\,;\ \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 8 & 7 \\ -4 & -5 & -6 & 9 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 6 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}\,.$$

Distinguimos las *matrices fila* y las *matrices columna*:

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 4}\,;\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}\,;\ \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}\,;\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}\,.$$

Las *matrices cuadradas* son aquellas que tienen la misma cantidad de filas que de columnas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & \sqrt{7} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2};\ \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3};\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

En cada conjunto $\mathbb{R}^{m\times n}$, tenemos la *matriz cero*, que notamos $\mathbb{O}_{m\times n}$, con todos sus lugares iguales a 0. En $\mathbb{R}^{n\times n}$, la *matriz identidad*, por ejemplo:

$$\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \mathbb{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \mathbb{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estas matrices cumplirán un papel importante respecto de las operaciones entre matrices.

Para referirnos a los lugares de una matriz, usaremos subíndices dobles: el primero para indicar la fila y el segundo para la columna. Veamos un ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{ll} a_{11} = 2 & \text{coeficiente de la fila 1 y la columna 1} \\ a_{23} = 4 & \text{coeficiente de la fila 2 y la columna 3} \\ a_{35} = 0 & \text{coeficiente de la fila 3 y la columna 5.} \end{array}$$

Operaciones con matrices

Suma y resta. La primera operación que presentamos es la suma (y la resta) de matrices de $\mathbb{R}^{m \times n}$, que se calcula lugar a lugar tal como para vectores.

Por ejemplo: si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ entonces,

$$A + B = \begin{pmatrix} 10+1 & 2+(-2) \\ -2+1 & 0+1 \\ 3+(-2) & 3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 10-1 & 2-(-2) \\ -2-1 & 0-1 \\ 3-(-2) & 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -3 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos que para poder sumar dos matrices A y B, deben tener la misma cantidad de filas y de columnas.
La matriz $\mathbb{O}$ es elemento neutro de la suma de matrices, es decir $M + \mathbb{O} = M$ para cada matriz M.

Producto por un escalar. El producto de una matriz por un número real también se efectúa lugar a lugar, como en el caso de vectores. Por ejemplo, para las matrices A y B anteriores,

$$3A = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 3\cdot(-2) & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -6 & 0 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 10 & \frac{1}{2}\cdot(-2) \\ \frac{1}{2}\cdot 1 & \frac{1}{2}\cdot 1 \\ \frac{1}{2}\cdot(-2) & \frac{1}{2}\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Producto de matrices. El producto $A \cdot B$ de dos matrices A y B está definido únicamente si la cantidad de columnas de A es igual a la cantidad de filas de B.
Por ejemplo, podremos calcularlo para $A \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, una matriz fila por una matriz columna. Recurrimos al producto interno o producto escalar de $\mathbb{R}^3$ para definir este producto de matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (1,2,3)\cdot(-1,0,2) = 1\cdot(-1) + 2\cdot 0 + 3\cdot 2 = 5$$

Caso general:

si $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$ y $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$ podemos calcular $A \cdot B$, que será una matriz de tamaño $m \times n$.

Ejemplo 1. Sean

$$A = \underset{2\times 4}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}} \quad , \quad B = \underset{4\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}} \quad \Rightarrow \quad \text{se puede calcular} \quad \underset{2\times 3}{A \cdot B}.$$

Solución. Para calcular $A \cdot B$, multiplicamos cada fila de A por cada columna de B; más precisamente,

para obtener el lugar ij de $A \cdot B$, multiplicamos la fila i de A por la columna j de B.

Por ejemplo, para obtener

el lugar 11 de $A \cdot B$, multiplicamos la fila 1 de A por la columna 1 de B,
el lugar 12 de $A \cdot B$, multiplicamos la fila 1 de A por la columna 2 de B, etc.

De esta forma resulta

$$(A \cdot B)_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, -1, 0, 2) \cdot (1, -1, 2, 0) = 2.$$

Continuamos calculando cada uno de los lugares de la matriz $A \cdot B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$(1, -1, 0, 2) \cdot (1, -1, 2, 0) = 2$$

Para obtener el elemento en la fila 1 columna 2 del producto multiplicamos la primera fila de A por la segunda columna de B, y queda

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ & & \end{pmatrix}.$$

$$(1, -1, 0, 2) \cdot (0, 1, 4, 0) = -1$$

Para obtener el elemento de la fila 1 columna 3, calculamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & 8 \\ \hline & & \end{array}\right)$$

$$(1, -1, 0, 2) \cdot (1, 3, 1, 5) = 8$$

Y ahora trabajamos con la segunda fila de A, para calcular similarmente los elementos de la segunda fila de $A \cdot B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & 8 \\ \hline 11 & & \end{array}\right)$$

$$(3, 0, 4, -2) \cdot (1, -1, 2, 0) = 11$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & 8 \\ \hline 11 & 16 & \end{array}\right)$$

$$(3, 0, 4, -2) \cdot (0, 1, 4, 0) = 16$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & 8 \\ \hline 11 & 16 & -3 \end{array}\right)$$

$$(3, 0, 4, -2) \cdot (1, 3, 1, 5) = -3$$

Hemos calculado:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 11 & 16 & -3 \end{pmatrix}.$$

Notemos que en este caso **no se puede calcular** (no está definido) el producto $B \cdot A$, ya que la cantidad de columnas de B no coincide con la cantidad de filas de A.

Observación. Al considerar la primera columna de B como una matriz de 4×1 y multiplicar resulta

$$\underset{2\times 4}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{4\times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}}.$$

De la misma manera, las demás columnas de $A \cdot B$ son el resultado del producto de A por la columna correspondiente de B:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2. Calcular el producto $M \cdot N$ y el producto $N \cdot M$ para

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución. Observemos que

$$\underset{2\times 3}{M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \quad \underset{3\times 2}{N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}} \quad \Rightarrow \quad \text{podemos calcular} \quad \underset{2\times 2}{M \cdot N}.$$

Procedemos como en el ejemplo anterior:

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \\ & \end{pmatrix}$$

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ & \end{pmatrix}$$

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & \end{pmatrix}$$

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Volvemos a copiar las matrices M y N para calcular $N \cdot M$

$$\underset{3\times 2}{N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}, \quad \underset{2\times 3}{M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \Rightarrow \quad \text{podemos calcular} \quad \underset{3\times 3}{N \cdot M}.$$

Repitiendo el procedimiento (agrupamos algunos pasos) tenemos

$$N \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$N \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$N \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Respuesta: $M \cdot N = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ y $N \cdot M = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 3. Calcular el producto $S \cdot T$ y el producto $T \cdot S$ para

$$S = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución. Si S y T son matrices cuadradas de $n \times n$ podemos calcular $S \cdot T$, que será una matriz de $n \times n$, y también $T \cdot S$, que será del mismo tamaño. Haciendo los cálculos obtenemos:

$$S \cdot T = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$T \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Respuesta: $S \cdot T = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $T \cdot S = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Podemos observar que $S \cdot T$ y $T \cdot S$ no son iguales. Como muestra este ejemplo, el producto de matrices **no es conmutativo**.

Para terminar, señalamos la relación entre la matriz identidad y el producto: para cada matriz A se tiene que

$$A \cdot \mathbb{I} = \mathbb{I} \cdot A = A.$$

Decimos que la matriz $\mathbb{I}$ es el *elemento neutro* del producto de matrices (como lo es el número 1 para el producto de números reales).

2.3. Ecuaciones matriciales

En esta sección trabajaremos con ecuaciones donde la incógnita a despejar es una matriz.

Ejemplo 1. Resolver

$$2A - 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3A.$$

Solución. Debemos hallar **todas** las matrices A que satisfacen la ecuación. En primer lugar determinemos qué tamaño debe tener A. Vemos que en el primer miembro se debe poder sumar $2A$ con una matriz de tamaño 3×2 por lo tanto $2A$ también debe ser de tamaño 3×2. Se deduce entonces que $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.
La ecuación planteada para resolver establece una igualdad entre matrices de $\mathbb{R}^{3\times 2}$. Usamos las propiedades conmutativa, asociativa (y otras) de la suma y el producto por escalar, junto con la propiedad distributiva, para despejar.

$$\begin{aligned}
2A - 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3A && \iff \\
2A - \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -3 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3A && \iff \\
2A + 3A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -3 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} && \iff \\
(2+3)A &= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} && \iff \\
\tfrac{1}{5} \cdot 5A &= \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} && \iff \\
A &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Respuesta: La ecuación tiene una única solución $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

Ejemplo 2: Hallar todas las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución. Ya que el enunciado establece que $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, proponemos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y calculamos los productos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -2a+c & -2b+d \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2b & b \\ c-2d & d \end{pmatrix}.$$

Para que estos productos coincidan, debe ser

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -2a+c & -2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2b & b \\ c-2d & d \end{pmatrix},$$

y entonces las matrices deben coincidir lugar a lugar:

$$\left\{\begin{array}{rcll} a & = & a-2b & \text{lugar}_{11} \\ b & = & b & \text{lugar}_{12} \\ -2a+c & = & c-2d & \text{lugar}_{21} \\ d & = & -2b+d & \text{lugar}_{22} \end{array}\right. .$$

Este es un sistema lineal con incógnitas a, b, c, d. Agrupando estas incógnitas en el miembro de la izquierda, resulta ser un sistema homogéneo:

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} & 2b & & & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \\ -2a & & + & 2d & = & 0 \\ & 2b & & & = & 0 \end{array}\right. .$$

Podemos ver (aún sin escalonar) que se trata de un sistema con infinitas soluciones, equivalente al que sigue:

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} -2a & & + & 2d & = & 0 \\ & 2b & & & = & 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} a = d \\ b = 0 \\ c, d \in \mathbb{R} \end{array}\right. .$$

A pesar de haber hallado estos valores mediante la resolución de un sistema, no tendría sentido escribir la solución como una 4-upla dado que la incógnita X es una matriz. Damos la forma paramétrica de la solución recordando que a, b, c, d eran los coeficientes de X. Escribimos

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c, d \in \mathbb{R}$$

para describir todas las soluciones de la ecuación.

Respuesta: La ecuación tiene infinitas soluciones, $X = c\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, con $c, d \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3. Resolver la ecuación

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\2 & 1 & 1 & 3\\0 & -3 & 1 & 5\end{pmatrix} X = \begin{pmatrix}2\\7\\3\end{pmatrix}.$$

Solución. El primer paso es determinar qué tamaño tiene X para que la igualdad tenga sentido:

$$\underset{3\times 4}{\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\2 & 1 & 1 & 3\\0 & -3 & 1 & 5\end{pmatrix}} \quad \underset{m\times n}{X} \quad = \quad \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix}2\\7\\3\end{pmatrix}}.$$

Vemos que m, la cantidad de filas de X, queda determinada para poder calcular el producto y debe ser igual a 4. Obtenemos en el miembro izquierdo de la igualdad una matriz de $3 \times n$ que solo puede ser igual al miembro de la derecha si n, la cantidad de columnas de X, es 1. Es decir, X es una matriz columna (de 4×1). Proponemos

$$X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \quad \text{y calculamos} \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\2 & 1 & 1 & 3\\0 & -3 & 1 & 5\end{pmatrix} \cdot X$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\2 & 1 & 1 & 3\\0 & -3 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 + 2x_2 - x_4\\2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4\\-3x_2 + x_3 + 5x_4\end{pmatrix}.$$

Estamos buscando $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ que cumplan

$$\begin{pmatrix}x_1 + 2x_2 - x_4\\2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4\\-3x_2 + x_3 + 5x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\7\\3\end{pmatrix}.$$

Al igualar estas matrices tenemos que x_1, x_2, x_3, x_4 deben ser soluciones del sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & = & 2\\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 7\\ & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & 3 \end{array}\right..$$

Para resolverlo, pasamos a su matriz ampliada para luego escalonar

$$\left(\begin{array}{rrrr|r}1 & 2 & 0 & -1 & 2\\2 & 1 & 1 & 3 & 7\\0 & -3 & 1 & 5 & 3\end{array}\right).$$

Si nos tomamos un momento para releer la ecuación que queremos resolver, vemos que tiene la forma $A \cdot X = b$ y que para hallar X vamos a escalonar la matriz ampliada $(A|b)$. Es decir, si b es una matriz columna entonces

$$A \cdot X = b \text{ se resuelve escalonando la matriz } (A|b).$$

Hagámoslo para este caso:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_2 \to F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Hemos terminado de escalonar; ahora reconstruimos el sistema para despejar:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ -3x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ x_2 = -1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2(-1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4) - x_4 = 2 \\ x_2 = -1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 \end{cases}.$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 4 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{7}{3}x_4 \\ x_2 = -1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 \end{cases}$$

Para expresar la solución recordamos que la incógnita X era una matriz columna:

$$X = \begin{pmatrix} 4 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{7}{3}x_4 \\ -1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Respuesta: Tenemos infinitas soluciones, $X = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 4. Hallar todas las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que satisfacen

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución. Proponemos $X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$. Antes de reemplazar manipulamos la ecuación tratando de que la incógnita X aparezca en un solo miembro de la igualdad (como haríamos en una ecuación de números reales):

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \\
\text{(prop. del producto de matrices)} \quad \left[\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right] \cdot X &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \\
\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ahora sí, escribimos $X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ y entonces debe valer

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 & 2y_1 + y_2 \\ -2x_1 - x_2 & -2y_1 - y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nuevamente esta igualdad de matrices conduce a un sistema (de incógitas x_1, x_2, y_1, y_2)

$$\begin{cases}
2x_1 + x_2 = -2 \\
2y_1 + y_2 = 1 \\
-2x_1 - x_2 = 2 \\
-2y_1 - y_2 = 1
\end{cases}.$$

Vemos que las variables x_1, x_2 (que corresponden a la primera columna de X) aparecen ”separadas”de las variables y_1, y_2 (que corresponden a la segunda columna de X). Podemos aprovechar esta característica para considerar dos sistemas independientes

$$S_x : \begin{cases} 2x_1 + x_2 = -2 \\ -2x_1 - x_2 = 2 \end{cases}, \quad S_y : \begin{cases} 2y_1 + y_2 = 1 \\ -2y_1 - y_2 = 1 \end{cases}.$$

Pasamos a las matrices ampliadas asociadas y vemos que

$$S_x \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{array}\right), \quad S_y \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Al estar asociadas a la misma matriz podemos resolver simultáneamente:

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Notar que para resolver la ecuación $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ tenemos que escalonar la matriz $\left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$. En en el caso general

$A \cdot X = B$ se resuelve escalonando $(A|B)$.

Volviendo a la resolución, escalonamos:

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad F_2 + F_1 \to F_2 \quad \left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Recordemos que despejamos cada columna de la solución X según la columna correspondiente que amplía el sistema,

$$S'_x \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad S'_y \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

El sistema S'_x tiene infinitas soluciones (es decir, hay infinitas posibilidades para la primera columna de X), pero el sistema S'_y es incompatible (no existe segunda columna para X). Concluimos que:

Respuesta: La ecuación no tiene solución.

2.4. Inversa de una matriz

En esta sección trabajaremos únicamente con matrices cuadradas. Hemos mencionado que la matriz identidad $\mathbb{I}_n$ es el elemento neutro del producto en $\mathbb{R}^{n\times n}$. Ahora queremos averiguar si una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene *inversa*, es decir, si existe una matriz $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que cumpla

$$B \cdot A = A \cdot B = \mathbb{I}_n.$$

En caso afirmativo, en lugar de B escribimos A^{-1} para notar a la inversa de A, y decimos que A es *inversible*. Para ver si existe y, en caso afirmativo hallarla, planteamos la ecuación $A \cdot X = \mathbb{I}_n$ y buscamos resolverla.

Ejemplo 1. Hallar, si existe, la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución. Planteamos

$$A \cdot X = \mathbb{I}_2 \quad \iff \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Según lo estudiado en la sección anterior hallamos (las columnas de) X escalonando la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad 3F_2 - 2F_1 \to F_2 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right) \quad 2F_1 + F_2 \to F_1 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

procurando llegar al 1 principal en cada fila:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \frac{1}{6}F_1 \to F_1 \\ -\frac{1}{2}F_2 \to F_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\dfrac{3}{2} \end{array}\right).$$

La ecuación tiene (una única) solución. La solución $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tiene primera columna $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y segunda columna $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Verificamos que esta matriz X también cumple que $X \cdot A = \mathbb{I}_2$ y, por lo tanto, es la inversa de A. Concluimos que:

Respuesta: La matriz A es inversible y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Observación. Se puede demostrar (aunque no lo haremos) que, para una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, si existe una solución de $A \cdot X = \mathbb{I}_n$, la matriz solución tambien es solución de $X \cdot A = \mathbb{I}_n$, es decir, es la inversa de A. En este caso A resulta equivalente a $\mathbb{I}_n$ y su inversa puede hallarse escalonando

$$(A \mid \mathbb{I}_n) \quad \rightsquigarrow \quad (\mathbb{I}_n \mid A^{-1}).$$

Ejemplo 2. Mostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ no es inversible.

Solución. Planteamos la ecuación $A \cdot X = \mathbb{I}_3$ y escalonamos la matriz ampliada $(A|\mathbb{I}_3)$ hasta reducir,

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} F_2 + F_1 \to F_2 \\ F_3 + F_1 \to F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$2F_3 - F_2 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Para hallar cada columna de la solución X debemos estudiar las matrices ampliadas

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

que corresponden a sistemas incompatibles. No es posible hallar X: esto implica que A no es inversible.

Rango de una matriz

El *rango de una matriz* M, que notamos $\text{rg}(M)$, es la cantidad de filas no nulas de una matriz escalonada a la que es equivalente M. Recordemos que dos matrices son equivalentes si se puede llegar de una a la otra aplicando las operaciones entre filas con las que hemos trabajado. Para las matrices de los Ejemplos 1 y 2 de la sección anterior:

$$\text{rg}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix} = 2, \quad \text{ya que } \begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix} \text{ es equivalente a } \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\text{rg}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 9\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix} = 2, \quad \text{ya que } \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 9\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix} \text{ es equivalente a } \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 10\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3. Hallar la matriz inversa de $C = \begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y verificar que $\text{rg}(C) = 4$.

Solución. Escalonamos la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3F_3 + F_2 \to F_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0 & -2 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Vemos que la matriz está escalonada y podemos afirmar que $\text{rg}(C) = 4$. Para reducir, ahora vamos a conseguir ceros arriba de los lugares principales:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0 & -2 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{6F_1 + 4F_2 \to F_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc}6 & 0 & 6 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0 & -2 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 - F_3 \to F_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc}6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0\\ 0 & -6 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0 & -2 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{6}F_3 \to F_3]{\frac{1}{6}F_1 \to F_1,\ -\frac{1}{6}F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Hemos calculado

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos ver en los ejemplos que una matriz $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible si y solo si $\mathrm{rg}(M) = n$. Observamos que si M es inversible, la ecuación $M \cdot \mathbf{x} = b$ tiene una **única** solución. Despejamos dicha solución multiplicando ambos miembros de la ecuación por la inversa de M (por izquierda),

$$\begin{aligned} M \cdot \mathbf{x} &= b \\ M^{-1} \cdot M \cdot \mathbf{x} &= M^{-1} \cdot b \\ \mathbb{I}_n \cdot \mathbf{x} &= M^{-1} \cdot b \\ \mathbf{x} &= M^{-1} \cdot b\,. \end{aligned}$$

A su vez, si para una matriz cuadrada M, cada sistema $M \cdot \mathbf{x} = b$ tiene (única) solución, entonces M resulta inversible.
Resumimos las propiedades de las matrices cuadradas respecto de su inversa:

Propiedad.

Si $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, son equivalentes:

- M es inversible.
- $M \cdot \mathbf{x} = b$ es un sistema compatible determinado.
- $M \cdot \mathbf{x} = 0$ tiene única solución trivial.
- M es equivalente a $\mathbb{I}_n$.
- El rango de M es n.

2.5. Sistemas lineales asociados a una matriz A

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, considerar la ecuación $A \cdot X = b$ es equivalente a considerar el sistema asociado a la matriz ampliada $(A|b)$, un sistema de m ecuaciones en n incógnitas. Identificamos las soluciones de la ecuación, que son matrices columna de $\mathbb{R}^{n\times 1}$ y las soluciones del sistema, que son n-uplas.
Usando la notación matricial para sistemas lineales, vamos a deducir algunas propiedades que relacionan soluciones de $A \cdot X = b$ con soluciones del sistema homogéneo asociado $A \cdot X = \mathbf{0}$.

Ejemplo 1. Sean $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ y $b \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, $b \neq 0$. Se sabe que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ son soluciones de $A \cdot X = b$, y que $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es solución de $A \cdot X = 0$. Verificar que:

(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es solución de $A \cdot X = 0$,

(b) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ es solución de $A \cdot X = 0$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es solución de $A \cdot X = b$,

(d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es solución de $A \cdot X = 0$.

Solución. En cada caso, para ver que la matriz columna dada es una solución de la ecuación, reemplazamos X por dicha matriz y vemos que se cumple la igualdad.

(a) $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = A \cdot 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3. A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ es solución de $A \cdot X = \mathbf{0}$.

Observar que en la penúltima igualdad usamos que $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es solución de $A \cdot X = \mathbf{0}$.

De la misma manera se puede deducir que:

Los múltiplos de una solución de un sistema *homogéneo* $A \cdot X = \mathbf{0}$ son también soluciones del sistema homogéneo.

(b) $A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = A \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = b - b = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es solución de $A \cdot X = \mathbf{0}$.

Observar que usamos que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ son dos soluciones de $A \cdot X = b$.

En forma similar a lo hecho en este ejemplo, se puede verificar que:

La diferencia entre dos soluciones de un sistema $A \cdot X = b$ es una solución del sistema *homogéneo* asociado $A \cdot X = 0$.

(c) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = A \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = b + \mathbf{0} = b.$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es solución de $A \cdot X = b$.

En este caso usamos que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es solución de $A \cdot X = b$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es solución de $A \cdot X = \mathbf{0}$.

De la misma manera se puede mostrar, en general, que:

Al sumar una solución del sistema $A \cdot X = b$ con una del sistema homogéneo asociado $A \cdot X = \mathbf{0}$ se obtiene una solución de $A \cdot X = b$.

(d) $A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = A \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ es solución de $A \cdot X = \mathbf{0}$.

En esta verificación usamos que $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ son soluciones de $A \cdot X = 0$ (lo sabemos por los incisos (a) y (c) respectivamente).

Con una verificación similar, se puede probar que:

La suma de dos soluciones de un sistema *homogéneo* $A \cdot X = \mathbf{0}$ es una solución del mismo sistema homogéneo.

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Para cada $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, anotamos como S_b al conjunto de las soluciones del sistema $A \cdot X = b$; en particular, escribimos S_0 para el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado a A. Resumimos las relaciones entre los elementos de estos conjuntos vistas a partir del ejemplo:

(I) $\mathbf{v} \in S_0,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot \mathbf{v} \in S_0$

(II) $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in S_0 \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in S_0$

(III) $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in S_b \Rightarrow \mathbf{v} - \mathbf{w} \in S_0$

(IV) $\mathbf{v} \in S_b,\ \mathbf{w} \in S_0 \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in S_b$

De estas propiedades se deduce que si $\mathbf{v}$ es una solución particular de $A \cdot X = b$, entonces:

$$S_b = S_0 + \mathbf{v} = \{\mathbf{h} + \mathbf{v} \mid \mathbf{h} \in S_0\}$$

es decir, que todas las soluciones del sistema $A \cdot X = b$ son las soluciones del sistema homogéneo asociado sumadas con una solución particular.

Resolvamos algunos ejercicios para familiarizarnos con estas propiedades.

Ejemplo 2. Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ y $b \in \mathbb{R}^{3\times1}$. Si $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ son soluciones de $A \cdot X = b$, hallar:

(a) Tres soluciones del sistema homogéneo asociado a A.

(b) Tres soluciones, distintas de las dadas, del sistema $A \cdot X = b$.

Solución.

(a) Por la propiedad (III), la resta de dos soluciones del sistema $A \cdot X = b$ será solución del sistema homogéneo asociado $A \cdot X = 0$:

$$\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} \in S_0.$$

Según la propiedad (I), cualquier múltiplo de $\mathbf{h}_1$ será otra solución del sistema homogéneo. Proponemos

$$\mathbf{h}_2 = 2 \cdot \mathbf{h}_1 = 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-4\\-2\end{pmatrix} \in S_0$$

$$\mathbf{h}_3 = (-4) \cdot \mathbf{h}_1 = (-4) \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\8\\4\end{pmatrix} \in S_0\ .$$

Más aún, podemos hallar infinitas soluciones del sistema $A \cdot X = 0$:

$$\mathbf{h} = \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) Por la propiedad (IV), para obtener una solución de $A \cdot X = b$ podemos sumar una solución de ese sistema con una solución del sistema homogéneo $A \cdot X = 0$. Considerando $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in S_b$ y las soluciones $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$ del inciso (a), proponemos:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v} + \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \in S_b$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v} + \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \in S_b$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v} + \mathbf{h}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \in S_b$$

De hecho, a partir de las infinitas soluciones de $A \cdot X = 0$ que hallamos en el inciso anterior, podemos exhibir infinitas soluciones del sistema $A \cdot X = b$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como en el ejemplo anterior, a partir de dos soluciones distintas $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ del sistema $A \cdot X = b$, podemos dar infinitas soluciones:

$$X = \mathbf{v} + \lambda \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \ \in S_b \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Algunas veces se hace referencia a este conjunto como una *recta de soluciones* del sistema $A \cdot X = b$ aunque X no sea de $\mathbb{R}^2$ ni de $\mathbb{R}^3$ (porque su expresión recuerda la ecuación paramétrica de la recta que pasa por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$).

Ejemplo 3. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Se sabe que $(1, 1, -4)$ es solución del sistema $2AX = b$ y $(0, 1, 4)$ es solución del sistema $AX = -b$. Hallar una recta de soluciones del sistema $AX = b$ y, si es posible, alguna solución con última coordenada nula.

Solución. Como vimos, podemos formar una recta de soluciones del sistema $AX = b$ si conocemos dos soluciones distintas de dicho sistema. En este ejercicio las soluciones que conocemos **no** son soluciones del sistema $AX = b$. Sin embargo podremos trabajar a partir de la información dada:

$$(1, 1, -4) \text{ es solución del sistema } 2AX = b \quad \Longleftrightarrow \quad 2A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = b$$

$$(0, 1, 4) \text{ es solución del sistema } AX = -b \quad \Longleftrightarrow \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = -b$$

En la primera identidad podemos reescribir el producto $2A.X = A.2X$ y obtener

$$2A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = A \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = b \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = (2, 2, -8) \in S_b.$$

En la segunda identidad podemos multiplicar ambos miembros por -1 y obtener

$$(-1)A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = (-1) \cdot (-b) \quad \Rightarrow \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = b \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w} = (0, -1, -4) \in S_b.$$

Podemos afirmar que la recta que pasa por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ está contenida en el conjunto solución S_b:

$$\lambda[(2, 2, -8) - (0, -1, -4)] + (2, 2, -8) = \lambda(2, 3, -4) + (2, 2, -8), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Buscamos entre estas soluciones un valor del parámetro λ de modo que la coordenada x_3 resulte ser nula:

$$x_3 = 0 \iff -4\lambda - 8 = 0 \iff \lambda = -2.$$

Luego,

$$X = (-2)(2, 3, -4) + (2, 2, -8) = (-2, -4, 0)$$

es una solución del sistema con última coordenada nula.

Respuesta: $\lambda(2, 3, -4) + (2, 2, -8)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, es una recta de soluciones del sistema y $(-2, -4, 0)$ es una solución con última coordenada nula.

Ejemplo 4. Sean $A \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ y $b, c \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ tales que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ son soluciones de } AX = b \text{ y } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ es solución de } AX = c.$$

Hallar tres soluciones del sistema $AX = b + 2c$.

Solución. Comencemos hallando una solución de $AX = b + 2c$. Para esto, observamos que si

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b \quad \text{y} \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = c,$$

entonces

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\,A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = b + 2c.$$

Como

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\,A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = A \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},$$

deducimos que

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = b + 2c,$$

es decir, que $(1, 2, 4, 7)$ es una solución del sistema $AX = b + 2c$.
Podemos obtener otra solución de $AX = b + 2c$ repitiendo este procedimiento con la otra solución que conocemos de $AX = b$. Pero necesitamos hallar tres soluciones.

Otra forma de construir más soluciones de $AX = b + 2c$ es hallando soluciones del sistema homogéneo asociado a A. Para esto, restamos las dos soluciones que conocemos del sistema $AX = b$ y tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_0 \; \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Concluimos que $X = \lambda(1, 1, -1, -1) + (1, 2, 4, 7) \in S_{b+2c}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, conseguimos tres soluciones del sistema asignándole distintos valores a λ. Por ejemplo,

- $\lambda = 0 \Rightarrow X = (1, 2, 4, 7) \in S_{b+2c}$
- $\lambda = 1 \Rightarrow X = (2, 3, 3, 6) \in S_{b+2c}$
- $\lambda = -2 \Rightarrow X = (-1, 0, 6, 9) \in S_{b+2c}$

2.6. Sistemas con parámetros

Llamamos *sistemas con parámetros* a aquellos sistemas donde algunos de los coeficientes dependen de uno o más parámetros. Por ejemplo,

$$S : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & & (k^2 - 1)x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ & & & & (k-2)x_3 & = & -3 \end{array} \right. .$$

es un sistema con un parámetro $k \in \mathbb{R}$.

Usamos esta expresión para describir muchos sistemas, uno para cada valor de $k \in \mathbb{R}$. Por ejemplo para $k = 0$, el sistema es

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & - & x_2 & & 3x_3 & = & 3 \\ & & & - & 2x_3 & = & -3 \end{array} \right.$$

y, para $k=-2$, resulta

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ & & & - & 4x_3 & = & -3 \end{array}\right. .$$

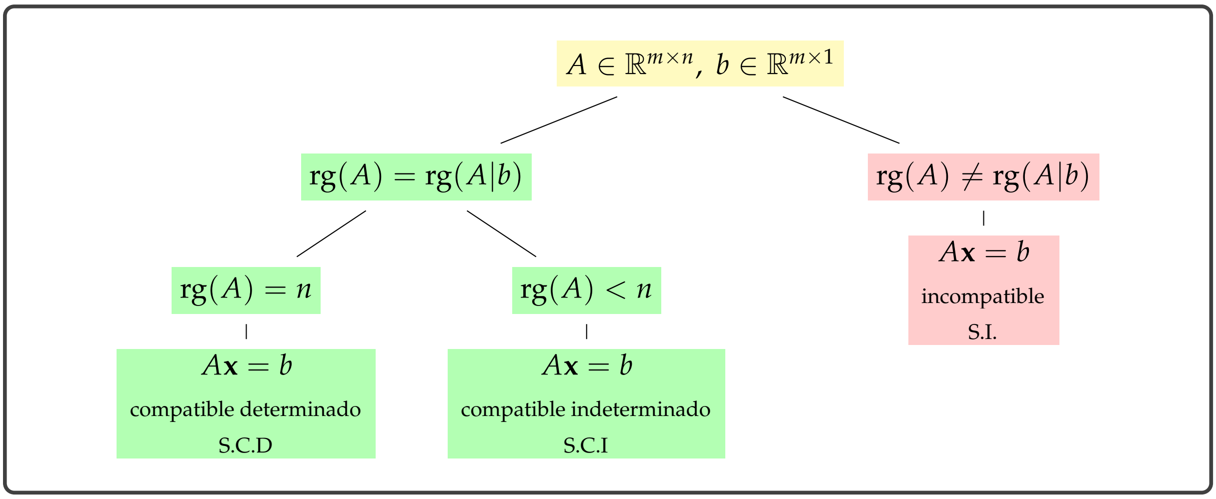
Cada uno de estos sistemas tiene su correspondiente conjunto solución. Buscamos clasificar estos sistemas, para cada valor del parámetro k, respecto de sus conjuntos solución como: sistema incompatible, sistema compatible indeterminado o sistema compatible determinado.

Tendremos como herramienta primordial el **Teorema de Rouché-Frobenius** y sus consecuencias:

Teorema

El sistema lineal de matriz ampliada $(A|b)$ es compatible si y solo si el rango de $(A|b)$ es igual al rango de A. Además, el sistema es compatible determinado si y sólo si los rangos de $(A|b)$ y de A son ambos iguales a la cantidad de incógnitas (que coincide con la cantidad de columnas de A).

Podemos visualizar las posibilidades en el siguiente diagrama:



Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Clasificar el sistema para cada valor de $k \in \mathbb{R}$:

$$S: \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & & (k^2-1)x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ & & & & (k-2)x_3 & = & -3 \end{array}\right. .$$

Solución. Para cada valor de k, debemos estudiar $\text{rg}(A)$ y $\text{rg}(A|b)$, es decir debemos escalonar estas matrices para determinar la cantidad de filas no nulas en una matriz escalonada equivalente. Trabajamos sobre el ejemplo, pasando a la matriz ampliada $(A|b)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & k^2-1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & k-2 & -3 \end{array}\right).$$

Esta matriz parece estar escalonada; sin embargo, esto no es cierto para algunos valores de k. Solo podemos afirmar que si $k^2 - 1 \neq 0$ y $k - 2 \neq 0$, la matriz está escalonada y $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$. Entonces, el sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ (k^2-1)x_2 + 3x_3 = 3 \\ (k-2)x_3 = -3 \end{cases}$$

es compatible determinado si $k^2 - 1 \neq 0$ y $k - 2 \neq 0$.

Falta analizar $\text{rg}(A)$ y $\text{rg}(A|b)$ para los casos en que $k^2 - 1 = 0$ ó $k - 2 = 0$.

$k = -1$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+F_2 \to F_3]{\text{no está escalonada}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ está escalonada.}$$

Como $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2$, se trata de un sistema compatible indeterminado.

$k = 1$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[3F_3+F_2 \to F_3]{\text{no está escalonada.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \text{ está escalonada.}$$

Podemos afirmar que $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A|b) = 3$, luego se trata de un sistema incompatible.

$k = 2$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \text{ está escalonada,}$$

entonces $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A|b) = 3$. El sistema es incompatible.

Hemos clasificado este sistema para cada posible valor del parámetro k, según sus posibles conjuntos solución.

Respuesta:

S es un sistema
- $\nearrow$ compatible determinado $\forall k \in \mathbb{R} - \{-1, 1, 2\}$.
- $\rightarrow$ incompatible si $k = 1$ ó $k = 2$.
- $\searrow$ compatible indeterminado si $k = -1$.

Ejemplo 2. Clasificar, para cada valor de $a \in \mathbb{R}$, el sistema asociado a la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 & a & -5 \\ 6 & 5 & -3 & 5 & 10 \\ a & 0 & a & -(3a+2) & -1 \end{array}\right),$$

y resolverlo para aquellos valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que resulte ser un sistema compatible indeterminado.

Solución. Para clasificar el sistema debemos hallar el rango de la matriz ampliada (en función del parámetro a). Tendremos que escalonar la matriz. Recordamos que las operaciones permitidas para obtener una matriz equivalente en las filas son

$$\begin{array}{lrll} (1) & F_i & \leftrightarrow F_j & \\ (2) & F_i + \alpha F_j & \to F_i & \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ (3) & \beta F_i & \to F_i & \text{si } \beta \neq 0 \end{array}$$

Al escalonar procuramos usar la propiedad (2) antes que la propiedad (3) ya que esta última tiene la restricción $\beta \neq 0$ (hay que tener cuidado de no multiplicar una fila por cero). Comenzamos

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 & a & -5 \\ 6 & 5 & -3 & 5 & 10 \\ a & 0 & a & -(3a+2) & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2 + 3F_1 \to F_2 \\ F_3 - 6F_1 \to F_3 \\ F_4 - aF_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & a+3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -a & 2a & -4a-2 & -1-2a \end{array}\right).$$

Observamos que la operación $F_4 - aF_1 \to F_4$ es lícita ya que sigue la forma de la propiedad (2). Continuamos escalonando:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & a+3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -a & 2a & -4a-2 & -1-2a \end{array}\right) \begin{array}{c} F_3 + F_2 \to F_3 \\ F_4 + aF_2 \to F_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & a+3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a+2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{a^2-a-2}_{-4a-2+a(a+3)} & \underbrace{-1-a}_{-1-2a+a\cdot 2} \end{array}\right).$$

La matriz está escalonada. Como en el ejemplo anterior, analizamos primero el caso en que $a^2 - a - 2 \neq 0$: para los valores de a que cumplen esto, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 4$.

Concluimos que $(A|b)$ resulta ser un sistema compatible determinado si $a \neq 2, -1$ (soluciones de la ecuación $a^2 - a - 2 = 0$).

Estudiamos los casos $a = 2$ y $a = -1$ por separado volviendo a la matriz escalonada

$a = 2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & a+3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a+2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-a-2 & -1-a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 3,\ \operatorname{rg}(A|b) = 4.$$

Para $a = 2$ el sistema es incompatible.

$a = -1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & a+3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a+2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-a-2 & -1-a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b) = 3 < 4.$$

Para $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado. Hallamos sus soluciones despejando del sistema escalonado

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & -1 \end{array}\right. .$$

De la tercera ecuación despejamos la variable $x_3 = -1 - x_4$ y reemplamos esta expresión en las ecuaciones superiores

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & (-1-x_4) & + & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & - & 2(-1-x_4) & + & 2x_4 & = & 1 \\ & & & & & & x_3 & = & -1-x_4 \end{array}\right.$$

Reescribimos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 4x_4 & = & -1 \\ & & & & x_3 & = & -1-x_4 \end{array}\right. .$$

De la segunda ecuación despejamos la variable $x_2 = -1 - 4x_4$, la reemplazamos en la primera ecuación

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & (-1-4x_4) & + & 2x_4 & = & 1 \\ & & & & x_2 & = & -1-4x_4 \\ & & & & x_3 & = & -1-x_4 \end{array}\right. .$$

y, finalmente, despejamos x_1 en función de x_4:

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_1 & = & 2+2x_4 \\ x_2 & = & -1-4x_4 \\ x_3 & = & -1-x_4 \end{array}\right. \Rightarrow \quad X = (2+2x_4, -1-4x_4, -1-x_4, x_4).$$

Escribimos las soluciones del sistema correspondiente a $a = -1$ en forma paramétrica

$$S: \quad X = \lambda(2,-4,-1,1) + (2,-1,-1,0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Resumimos la clasificación del sistema para los distintos valores de $a \in \mathbb{R}$:

Respuesta:

$$S \text{ es un sistema} \begin{array}{l} \nearrow \text{ compatible determinado } \forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}. \\ \rightarrow \text{ incompatible si } a = 2. \\ \searrow \text{ compatible indeterminado si } a = -1. \end{array}$$

Para el valor $a = -1$, para el cual es compatible indeterminado, las soluciones del sistema son $X = \lambda(2, -4, -1, 1) + (2, -1, -1, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3. Hallar todos los a y $b \in \mathbb{R}$ tales que $(-3, 1, 0)$ es una de las infinitas soluciones del sistema

$$S : \begin{cases} -2x - ay + 2z = 4 \\ -x + y - bz = 4 \\ 2y + 5z = 2 \end{cases}$$

Solución. En primer lugar veamos cómo tienen que ser a y b para que $(-3, 1, 0)$ sea solución de este sistema, es decir, que cumpla todas las ecuaciones

$$\begin{cases} -2 \cdot (-3) - a \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 4 \\ -(-3) + 1 - b \cdot 0 = 4 \\ 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 2 \end{cases} \iff a = 2.$$

Entonces, $(-3, 1, 0)$ es solución para $a = 2$ y para cualquier valor de b. Ahora sí, con $a = 2$ analizamos para qué valores de b resulta ser un sistema compatible indeterminado (con infinitas soluciones). Lo hacemos buscando que el rango de la matriz del sistema sea menor que 3 (es decir, que se anule alguna fila al escalonar),

$$S : \begin{cases} -2x - 2y + 2z = 4 \\ -x + y - bz = 4 \\ 2y + 5z = 2 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -b & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

$$2F_2 - F_1 \rightarrow F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -2b-2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right) 2F_3 - F_2 \rightarrow F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -2b-2 & 4 \\ 0 & 0 & 12+2b & 0 \end{array}\right)$$

Para que el rango de $(A|b)$ sea igual al de A y menor que 3, la única posibilidad es que la tercera fila sea nula; esto solo ocurre si $b = -6$.
Por lo tanto,

Respuesta: $(-3, 1, 0)$ es una de las infinitas soluciones del sistema si y solo si $a = 2$ y $b = -6$.

Ejemplo 4. Clasificar el sistema para cada $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} c & -1 & 1 & 1 \\ 0 & c^2-1 & c+1 & -1 \\ c & c^2-1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Solución. Pasamos a la matriz ampliada para estudiar su rango

$$\left(\begin{array}{cccc|c} c & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & c^2-1 & c+1 & -1 & 0 \\ c & c^2-1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) F_3 - F_1 \to F_3 \left(\begin{array}{cccc|c} c & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & c^2-1 & c+1 & -1 & 0 \\ 0 & c^2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Para seguir escalonando, si $c^2 - 1 \neq 0$, podríamos hacer

$$(c^2-1)F_3 - c^2 F_2 \to F_3$$

y conseguir un 0 en el lugar 32 de la matriz. Observemos que ésta es una combinación de la operación (3) con $\beta = c^2 - 1$ (para aplicarla es necesario que $c^2 - 1 \neq 0$) y la operación (2) con $\alpha = -c^2$. Si procedemos de este modo, tendríamos que analizar, separadamente, los valores de c tales que $c^2 - 1 = 0$, para los cuales la operación anterior no es válida.
Mostramos una alternativa que, si bien en el primer paso no logra escalonar la matriz, en el segundo sí. Procuramos que el parámetro no aparezca en el lugar principal de la segunda fila

$$\left(\begin{array}{cccc|c} c & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & c^2-1 & c+1 & -1 & 0 \\ 0 & c^2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) F_2 - F_3 \to F_2 \left(\begin{array}{cccc|c} c & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & c+1 & 0 & -1 \\ 0 & c^2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

y ahora sí operamos usando la propiedad (2) para escalonar

$$F_3 + c^2 F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{cccc|c} c & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & c+1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & c^3+c^2 & -1 & 1-c^2 \end{array}\right).$$

Podemos asegurar que la matriz está escalonada si $c \neq 0$ y $c^3 + c^2 \neq 0$. Para estos valores de c tenemos que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3$ y así el sistema resulta compatible indeterminado.
Los valores que nos resta analizar por separado son $c = 0$ y $c = -1$ (las soluciones de $c = 0$ y de $c^3 + c^2 = 0$).

$c = -1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \text{ está escalonada } \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3.$$

Entonces, para $c = -1$ el sistema es compatible indeterminado.

$c = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c}\text{no está escalonada} \\ F_2 - F_1 \to F_2\end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$F_3 - F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Para $c = 0$ resulta $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A|b) = 3$; luego, el sistema es incompatible.

Resumimos la clasificación completa del sistema:

Respuesta:

$$S \text{ es un sistema} \begin{array}{l} \nearrow \text{ compatible indeterminado } \forall c \in \mathbb{R} - \{0\}. \\ \\ \searrow \text{ incompatible si } c = 0. \end{array}$$