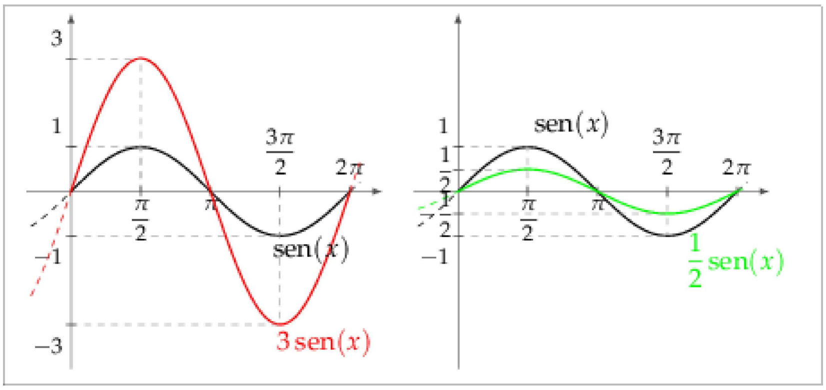
Imagen, amplitud y período

Las funciones trigonométricas que veremos en este curso son de la forma

$$f(x) = a\,\mathrm{sen}(bx + c) + d \quad \text{o bien} \quad f(x) = a\cos(bx + c) + d,$$

con a, b, c y d números reales.

Veamos en algunos ejemplos cómo estos números influyen en el gráfico (y en la imagen) de la función:

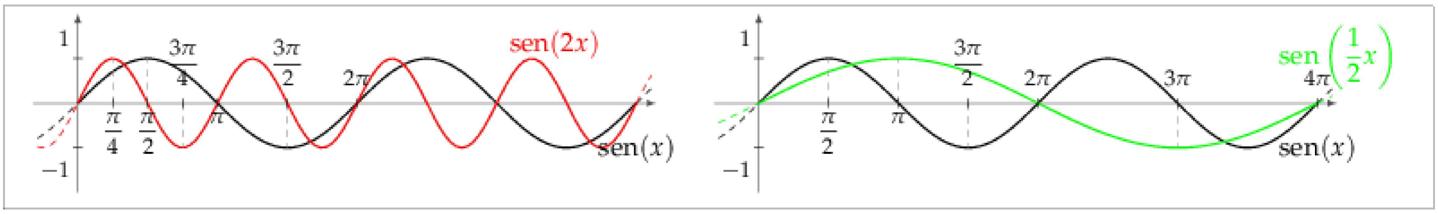


Si $f(x) = a\,\mathrm{sen}(bx + c) + d$ (o $f(x) = a\cos(bx + c) + d$), se llama *amplitud* al número $|a|$. Así, en el primer ejemplo, la amplitud es 3; y en el segundo, la amplitud es $\frac{1}{2}$.

En la siguiente animación puede verse cómo va cambiando el gráfico de la función a medida que cambia la amplitud:

Amplitud de la función seno

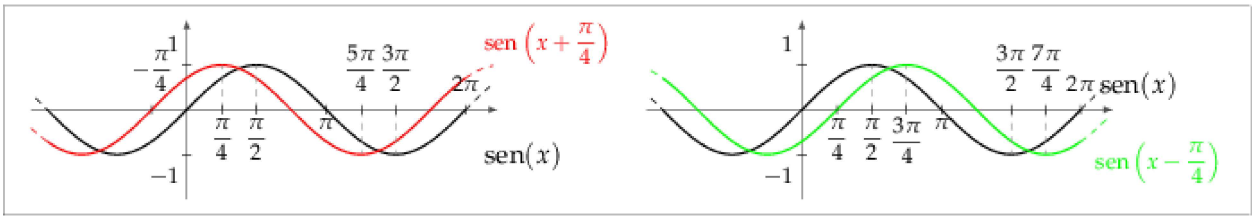
Si el valor del número b cambia, el gráfico de la función también se modifica:



Si $f(x) = a\,\mathrm{sen}(bx + c) + d$ (o $f(x) = a\cos(bx + c) + d$), se llama *período* al número $\frac{2\pi}{|b|}$. Así, en el primer ejemplo, el período es $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$; y en el segundo, el período es $\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$. La siguiente animación muestra cómo cambia el período al modificarse el valor de b.

Período de la función seno

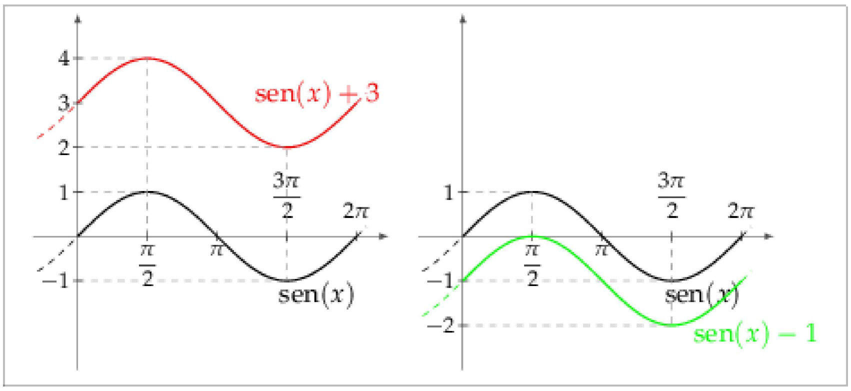
Observemos ahora lo que ocurre al sumar una constante al argumento de la función:



En estos gráficos vemos que al sumar un valor positivo a x, el gráfico se desplaza hacia la izquierda la cantidad que sumamos; mientras que si lo restamos, se desplaza hacia la derecha esa misma cantidad. La siguiente animación muestra estos desplazamientos:

Corrimientos en el eje x

Finalmente, observemos qué ocurre si sumamos un valor d a la función:



En estos ejemplos observamos que, si sumamos un valor positivo a $\text{sen}(x)$, el gráfico se desplaza hacia arriba; y al restarlo, se desplaza hacia abajo.

La siguiente animación muestra cómo se desplaza el gráfico a medida que cambia el valor que sumamos o restamos:

Corrimientos en el eje y

Resolvamos ahora un ejercicio en el que hallamos la imagen de una función trigonométrica.

Ejemplo. Sea $f(x) = -4\cos(3x) - 2$. Determinar la imagen de f.

Para determinar la imagen de f, primero notemos que $-1 \leq \cos(z) \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{R}$. Así, tenemos que

$$-1 \leq \cos(3x) \leq 1.$$

Multipliquemos los tres miembros por -4. Como -4 es un número negativo, al multiplicar por él, cambia el sentido de la desigualdad:

$$(-4).(-1) \geq -4\cos(3x) \geq (-4).1\ .$$

$$4 \geq -4\cos(3x) \geq -4.$$

Y ahora restemos 2 en todos los miembros:

$$4 - 2 \geq -4\cos(3x) - 2 \geq -4 - 2.$$

Tenemos entonces

$$2 \geq f(x) \geq -6,$$

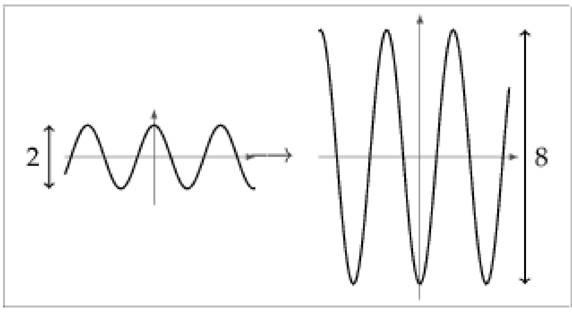
y esto vale para todo x.

Observemos que $f(0) = -4\cos(3.0) - 2 = -4\cos(0) - 2 = -4.1 - 2 = -6$ y $f(\pi) = -4\cos(3.\pi) - 2 = -4.(-1) - 2 = 2$. Es decir, existen valores de x en donde f alcanza sus valores mínimo y máximo, respectivamente. Y como f es continua, podemos deducir que

$$\boxed{\text{Im} f = [-6;2]}$$

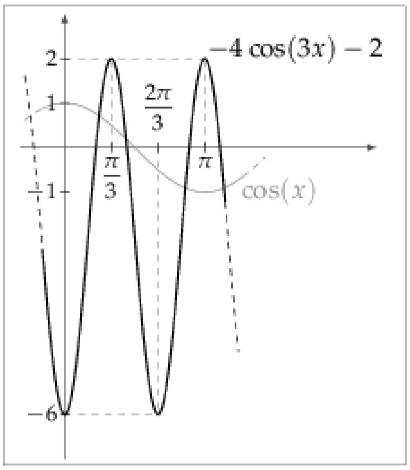
Veámoslo ahora gráficamente.

Si $f(x) = -4\cos(3x) - 2$, la amplitud es $|-4| = 4$. Como vimos en los ejemplos de arriba, esto implica que el gráfico se ``estira" verticalmente 4 veces. (El signo negativo va a reflejar el gráfico respecto del eje x.)



Al restar 2, la imagen se desplaza dos unidades hacia abajo. Esto nos lleva, como vimos analíticamente, a que la imagen es $[-6, 2]$.

Además, el período es $\frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$, y no hay desplazamiento horizontal. Con todos estos datos llegamos al gráfico:


$-4\cos(3x) - 2$
2
1
-1
-6
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{2\pi}{3}$
π
$\cos(x)$