
Comentarios teóricos y ejemplos

"Integrales"

Resolución de ejercicios de la Práctica 6

desde el Ejercicio 1 hasta el 5 inclusive

En esta primera parte sugiero que estudien las siguientes teóricas de integrales propuestas por la cátedra de Mate 51 :

.- integral indefinida.pdf

.- método de sustitución.pdf

.- método de integración por partes.pdf

Para la segunada parte de la Práctica 6 :

.- integral definida.pdf

.- cálculo de áreas.pdf

+-+

Comentarios teóricos previos :

Llamaremos Primitiva ó integral indefinida de una función f (x) a una función F (x) tal que $F'(x) = f(x)$

"la derivada de F grande de x da como resultado f chica de x"

Notación - un nuevo símbolo :

Vamos a usar el símbolo $\int f(x)\,dx$ para hablar de integrales indefinidas ó Primitivas es decir :

$$F(x) = \int f(x)\,dx \quad \text{si y sólo si} \quad F'(x) = f(x)$$

$\int f(x)\,dx$ debe leerse como : "la integral de f(x) diferencial x"

como también se suele decir "integral de f(x) d x"

Ejemplo :

Calcular la primitiva o integral indefinida de $f(x) = x$

problema que se escribe así (reemplazamos f (x) por x) :

$F(x) = \int x\, dx$ si y sólo si $F'(x) = x$

Buscamos una $F(x)$ tal que derivada dé el integrando x

Vemos que hay infinitas primitivas que al ser derivadas dan x

Por ejemplo, $\frac{1}{2}x^2$ es una primitiva de $f(x) = x$ dado que

$$\left[\frac{1}{2}x^2\right]' = x$$

Es más si sumamos un número real constante a $\frac{1}{2}x^2$ también es una primitiva de x

es decir la derivada de $\left[\frac{1}{2}x^2 + C\right]' = x + 0 = x$, también da x.

Entonces el resultado correcto de hallar primitiva de $f(x) = x$ es

$$F(x) = \int x\, dx = \frac{1}{2}x^2 + \underbrace{C}_{co}$$

Este resultado va a pasar siempre que calculemos integrales indefinidas :

Siempre dan como resultado tener una constante $\underbrace{C}_{\text{constante}}$ arbitraria

salvo que nos den un dato adicional para determinar el valor de $\underbrace{C}_{\text{constante}}$ (tipo Ej. 2)

Observación : calcular una integral indefinida de $f(x)$ es el proceso inverso de derivar

Por ejemplo, al derivar, si tenía x^2 , restaba un 1 al exponente y el exponente bajaba como factor : es decir $\left[x^2\right]' = 2 \cdot x^{2-1} = 2 \cdot x^1 = 2x$

Ahora al calcular una integral indefinida de x por ejemplo, debo sumar un 1 al exponente y ajustar el factor que bajará al derivar es decir :

si tengo $x \longrightarrow$ al integrar sumo 1 al exponente y obtengo x^{1+1} que es x^2 y como al derivar me va a bajar un 2 como factor le pongo un $\frac{1}{2}$ a la primitiva $\Longrightarrow \frac{1}{2}x^2$

Otra notación que quizás confunda un poco :

Sea $g(x)$ una función derivable y $g'(x)$ su derivada

entonces se cumple que :

$\int g'(x)\, dx = g(x) + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ por la definición misma de primitiva ó integral indefinida

----

Pasemos a resolver el Ej. 1 de la Práctica 6

PRÁCTICA 6

INTEGRALES

Ejercicio 1.-

a. Hallar una función g tal que

i. $g'(x) = x$ **ii.** $g'(x) = 3$

iii. $g'(x) = \text{sen}(x)$ **iv.** $g'(x) = \cos(x)$

v. $g'(x) = e^x$ **vi.** $g'(x) = x^3$

vii. $g'(x) = x^5 + 2x$ **viii.** $g'(x) = 3 + e^x$

b. Hallar una primitiva de f.

i. $f(x) = 2\,\text{sen}(x)$ **ii.** $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x}$

iii. $f(x) = 3x^2 + \sqrt{x}$ **iv.** $f(x) = -4e^x$

Ej 1 a) hallar una función g (x) tal que :

i) $g'(x) = x$

Buscamos una función g (x) tal que derivada dé x

Por lo que vimos anteriormente, tal $g(x) = \frac{1}{2} x^2 + C$

porque $\left[\frac{1}{2} x^2 + C\right]' = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 0 = x^1 = x$

Escrito en notación complicada para que se vayan acostumbrando :

si $g'(x) = x$ buscamos $g(x) = \int g'(x)\, dx = \int x\, dx = \frac{1}{2} x^2 + C$

Respuesta del 1 a) i) $g(x) = \frac{1}{2} x^2 + C$

----

ii) $g'(x) = 3$

Buscamos una función g (x) tal que derivada dé 3

entonces $g(x) = 3x + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **porque si la derivamos**

$[3x + C]' = [3x]' + [C]' = 3[x]' + 0 = 3 \cdot 1 = 3$

Escrito en notación complicada para que se vayan acostumbrando :

si $g'(x) = 3$ **buscamos** $g(x) = \int g'(x)\, dx = \int 3\, dx = 3x + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

Respuesta del 1 a) ii) $g(x) = 3x + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

+-+-+-+-+-+-+-+-+

De este último resultado podemos observar 2 cosas :

Asi como al derivar, las constantes son transparentes a la derivación también lo son con la integracion :

(quiero decir que al derivar $[3x]' = 3[x]' = 3 \cdot x$ **la constante 3 sale afuera de la derivación)**

En el caso de la integración es similar;

$\int 3\, dx = 3 \int 1\, dx = 3 \cdot x + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

además algo para recordar es que $\int 1\, dx = x + \tilde{C}$

Propiedad 1 :

$$\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx \qquad k \in \mathbb{R}$$

----

iii) $g'(x) = \text{sen}(x)$

Buscamos una función g (x) tal que derivada dé sen (x)

entonces $g(x) = -\cos(x) + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **porque si la derivamos**

$[-\cos(x) + C]' = -[\cos(x)]' + [C]' = -(-\text{sen}(x)) + 0 = \text{sen}(x)$

Escrito en notación complicada para que se vayan acostumbrando :

si $g'(x) = \text{sen}(x)$ **buscamos** $g(x) = \int g'(x)\, dx = \int \text{sen}(x)\, dx \iff$

$g(x) = -\cos(x) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

porque si la derivamos

$[-\cos(x) + C]' = -[\cos(x)]' + [C]' = -(-\text{sen}(x)) + 0 = \text{sen}(x)$

Respuesta del 1 a) iii) $g(x) = -\cos(x) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

----

iv) $g'(x) = \cos(x)$

Buscamos una función $g(x)$ **tal que derivada dé** $\cos(x)$

entonces $g(x) = \text{sen}(x) + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **porque si la derivamos**

$[\text{sen}(x) + C]' = [\text{sen}(x)]' + [C]' = (\cos(x)) + 0 = \cos(x)$

Escrito en notación complicada para que se vayan acostumbrando :

si $g'(x) = \cos(x)$ **buscamos** $g(x) = \int g'(x)\, dx = \int \cos(x)\, dx \iff$

$g(x) = \text{sen}(x) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

porque si la derivamos

$[\text{sen}(x) + C]' = [\text{sen}(x)]' + [C]' = \cos(x) + 0 = \cos(x)$

Respuesta del 1 a) iv) $g(x) = \text{sen}(x) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

----

v) $g'(x) = e^x$

Buscamos una función $g(x)$ **tal que derivada dé** e^x

entonces $g(x) = e^x + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **porque si la derivamos**

$[e^x + C]' = [e^x]' + [C]' = e^x + 0 = e^x$

Escrito en notación complicada para que se vayan acostumbrando :

si $g'(x) = \cos(x)$ **buscamos** $g(x) = \int g'(x)\, dx = \int e^x\, dx \iff$

$g(x) = e^x + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

porque si la derivamos

$[e^x + C]' = [e^x]' + [C]' = e^x + 0 = e^x$

Respuesta del 1 a) v) $\quad g(x) = e^x + \underset{\text{co}}{C}$

----

vi) $g'(x) = x^3$

Buscamos una función g (x) tal que derivada dé x^3

entonces $g(x) = \frac{1}{4} x^4 + \underset{\text{constante}}{C}$ **porque si la derivamos**

$\left[\frac{1}{4} x^4 + C\right]' = \frac{1}{4}\left[x^4\right]' + [C]' = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot x^3 + 0 = x^3$

Escrito en notación complicada para que se vayan acostumbrando :

si $g'(x) = x^3$ **buscamos** $g(x) = \int g'(x)\, dx = \int x^3\, dx \iff$

$g(x) = \frac{1}{4} x^4 + \underset{\text{co}}{C}$

porque si la derivamos

$\left[\frac{1}{4} x^4 + C\right]' = \frac{1}{4}\left[x^4\right]' + [C]' = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot x^3 + 0 = x^3$

Respuesta del 1 a) vi) $\quad g(x) = \frac{1}{4} x^4 + \underset{\text{cc}}{C}$

Nota; como regla general cuando tenemos que calcular la integral indefinida
de un función de x elevado a una potencia entera o fraccionaria hacemos lo siguiente :

sumamos un 1 al exponente y el resultado del nuevo exponente lo ponemos

como factor en el denominador

Ejemplo : $\int x^p\, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + \underset{\text{constante}}{C}$ **es claro que** $p \neq -1$ **para que valga la igualdad**

$\int x^4\, dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + \underset{\text{constante}}{C} = \frac{x^5}{5} + \underset{\text{constante}}{C} = \frac{1}{5} x^5 + \underset{\text{constante}}{C}$ **porque al derivar** $\frac{1}{5} x^5$ **baja el 5 se simplifica**

con el 5 del denominador y queda x^4 **y la** $\underset{\text{constante}}{C}$ **constante da cero al derivar**

Ejemplo2 :

$$\int \sqrt{x}\ dx = \int x^{\frac{1}{2}}\ dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

constante constante constante co

porque al derivar

$$\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C\right]' = \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]' + [C]' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1} + 0 = 1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

Sigamos con el Ej 1 a) vii) :

Antes escribamos esta otra propiedad :

Así como la derivada de una suma ó resta de funciones era igual a la suma de las derivadas de cada función, esto es

$$[f(x) \pm g(x)]' = [f(x)]' \pm [g(x)]'$$

con las integrales pasa lo mismo

Propiedad 2 :

$$\int \{ f(x) \pm g(x) \}\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

Esta propiedad nos viene bien para las polinómicas :

$$\int (x^3 + 2x^2 - x)\, dx = \int x^3\, dx + \int 2x^2\, dx - \int x\, dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$$

co

Usemos esta propiedad para el Ej 1 a) vii) :

----

vii) $g'(x) = x^5 + 2x$

Buscamos una función g (x) tal que derivada dé $x^5 + 2x$

entonces $g(x) = \frac{1}{6}x^6 + x^2 + C$ **porque si la derivamos**

constante

$$\left[\frac{1}{6}x^6 + x^2 + C\right]' = \frac{1}{6}\left[x^6\right]' + \left[x^2\right]' + [C]' = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot x^5 + 2x + 0 = x^5 + 2x$$

Escrito en notación de integrales para que se vayan acostumbrando :

si $g'(x) = x^5 + 2x$ **buscamos** $g(x) = \int g'(x)\, dx = \int (x^5 + 2x)\, dx \iff$

$$\iff g(x) = \int x^5\, dx + \int 2x\, dx = \frac{1}{6}x^6 + 2\int x\, dx = \frac{1}{6}x^6 + 2\frac{x^2}{2}\, dx + C = \frac{1}{6}x^6 + x^2 + C$$

constante co

porque si la derivamos

$\left[\frac{1}{6}x^6+x^2+C\right]' = \frac{1}{6}\left[x^6\right]' + \left[x^2\right]' + [C]' = \frac{1}{6}\cdot 6\cdot x^5+2x+0 = x^5+2x$

Respuesta del 1 a) vii) $g(x) = \frac{1}{6}x^6 + x^2 + \underbrace{C}_{cc}$

Nota : en este ejercicio aparecerían dos constantes, C_1 de integrar primero $\int x^5\,dx$ y otra C_2 de integrar $\int 2x\,dx$ pero pueden agruparse en una única que terminamos llamando C y sería $C = \underbrace{C_1}_{constante} + \underbrace{C_2}_{constante}$

----

viii) $g'(x) = 3 + e^x$

Buscamos una función g (x) tal que derivada dé $3 + e^x$

entonces $g(x) = 3x + e^x + \underbrace{C}_{constante}$ porque si la derivamos

$[3x+e^x+C]' = 3[x]' + [e^x]' + [C]' = 3\cdot 1 + e^x + 0 = 3 + e^x$

Escrito en notación de integrales para que se vayan acostumbrando :

si $g'(x) = 3 + e^x$ buscamos $g(x) = \int g'(x)\,dx = \int\left(3+e^x\right)dx \iff$

$\iff g(x) = \int 3\,dx + \int e^x\,dx = 3\int 1\,dx + e^x = 3\cdot x + e^x + \underbrace{C}_{constante} = 3x + e^x + \underbrace{C}_{cc}$

porque si la derivamos

$[3x+e^x+C]' = 3[x]' + [e^x]' + [C]' = 3\cdot 1 + e^x + 0 = 3 + e^x$

Respuesta del 1 a) viii) $g(x) = 3x + e^x + \underbrace{C}_{cc}$

+-

Ej 1 b) hallar una primitiva de f (o sea hallar F (x) tal que $F'(x) = f(x)$)

Vean que nos cambiaron la notación, pero es lo mismo que antes

----

i) $f(x) = 2\,\text{sen}(x)$

Buscamos $F(x) = \int f(x)\,dx$

$$F(x) = \int 2\,\mathrm{sen}(x)\,dx = 2\int \mathrm{sen}(x)\,dx = 2(-\cos(x)) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

porque :

$$F'(x) = [2(-\cos(x)) + C]' = 2\left(-1\right)[\cos(x)]' + [C]' =$$

$$= -2(-\mathrm{sen}(x)) + 0 = 2\,\mathrm{sen}(x) = f(x)$$

Respuesta del 1 b) i) $F(x) = -2\cos(x)) + \underbrace{C}_{\text{constante}}$

----

ii) $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x}$

Buscamos $F(x) = \int f(x)\,dx$ **una primitiva de f**

$$F(x) = \int\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)dx = \int x^3\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{4}x^4 + \ln|x| + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

porque :

$$F'(x) = \left[\frac{1}{4}x^4 + \ln|x| + C\right]' = \frac{1}{4}\cdot 4x^3 + \frac{1}{x} + 0 = x^3 + \frac{1}{x}$$

Respuesta del 1 b) ii) $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + \ln|x| + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

Lean debajo la explicación de porqué la primitiva de $\dfrac{1}{x}$ **es el** $\ln|x| + \underbrace{C}_{\text{constante}}$

+-

Nota importante :

Recordemos la función módulo de x :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

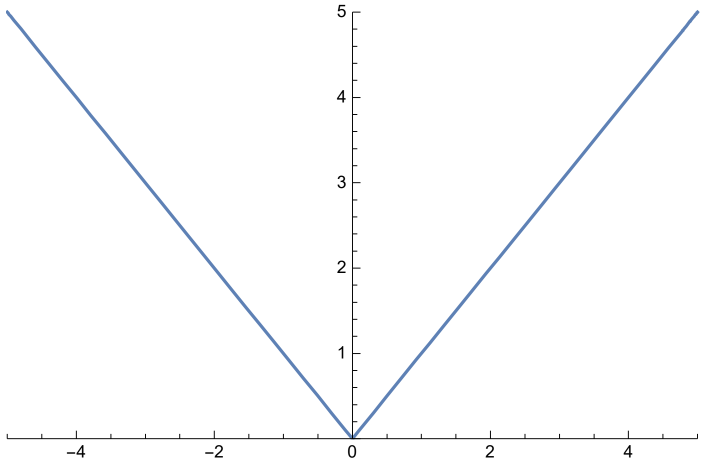
Por esta definición para calcular $|-2|$ **usando la parte de abajo de la fórmula porque** $x = -2$ **es** $-2 < 0$ **da** $-(-x) = -\left(-2\right) = 2 > 0$

Y si $x = 5$ **entonces para calcular** $|5|$ **usamos la parte de arriba de la definición porque** $x = 5$ **es** $5 > 0$ **da** $x = 5 > 0$

Y si $x = 0$ **entonces** $|0| = 0$

La función módulo de $x = |x|$ es derivable en todo x en $\mathbb{R}$ salvo en $x = 0$ porque ahí en $x = 0$ "pincha"

gráfico del $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

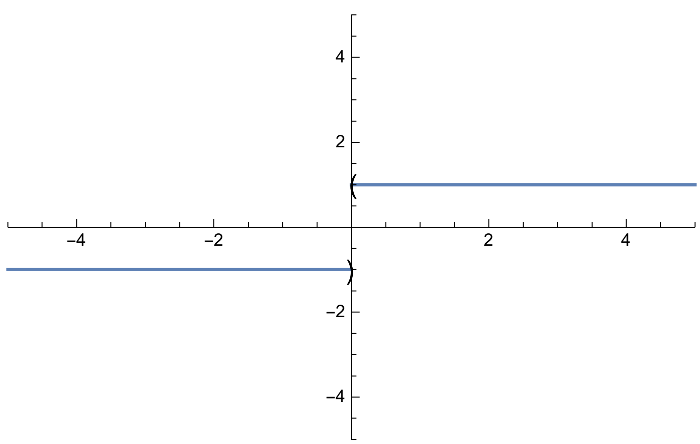


La derivada del módulo es :

$[|x|]' = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

en $x = 0$ la derivada del módulo no está definida

gráfico de $[|x|]' = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$



+-

Observemos cuánto dá la derivada del $\ln |x|$:

$$[\ln |x|]' = \begin{cases} [\ln(x)]' & \text{si } x > 0 \\ [\ln(-x)]' & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{-x}(-1) & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

es decir :

$[\ln|x|]' = \frac{1}{x}$ **si** $x \neq 0$ **pero entonces** $\ln|x|$ **es una primitiva de** $\frac{1}{x}$

para todo $x \neq 0$ **(y no sólo para los** $x > 0$**)**

Éste es un resultado nuevo para Uds !

Lo que deben recordar es :

$[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$ **vale para** $x > 0$ **porque se debe poder sacar el logaritmo**

$[\ln|x|]' = \frac{1}{x}$ **vale para todo** $x \neq 0$ **porque se puede sacar el logaritmo**

Pero entonces :

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **porque debe poder considerar tanto los** $x > 0$ **como** $x < 0$

(Observación : si no tomáramos el $\ln|x|$ **nos estaríamos perdiendo la rama de los x negativos de** $\frac{1}{x}$ **, porque como el logaritmo está definido para argumentos positivos, al poner el módulo, podemos tomar logaritmo a los** $x > 0$ **como a los** $x < 0$**)**

+-

iii) $f(x) = 3x^2 + \sqrt{x}$

Buscamos $F(x) = \int f(x)\,dx$ **una primitiva de f**

$$F(x) = \int \left(3x^2 + \sqrt{x}\right) dx = 3\int x^2\,dx + \int \sqrt{x}\,dx = 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 + \int x^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= x^3 + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = x^3 + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = x^3 + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = x^3 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

porque :

$$F'(x) = \left[x^3 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C\right]' = 3x^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} + 0 = 3x^2 + x^{\frac{1}{2}} = 3x^2 + \sqrt{x}$$

Respuesta del 1 b) iii) $F(x) = x^3 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

----

iv) $f(x) = -4e^x$

Buscamos $F(x) = \int f(x)\,dx$ una primitiva de f

$$F(x) = \int -4\,e^x\,dx = -4 \int e^x\,dx = -4\,e^x + C$$

cc

porque :

$$F'(x) = [-4\,e^x + C]' = -4[e^x]' + [C]' = -4\,e^x + 0 = -4\,e^x$$

Respuesta del 1 b) iv) $F(x) = -4\,e^x + C$

cc

+-

Ejercicio 2.- Hallar la función g tal que

a. $g'(x) = 8x$ y $g(0) = 4$

b. $g'(x) = -x^3$ y $g(1) = 5$

c. $g'(x) = -2\cos(x)$ y $g(\frac{\pi}{2}) = 3$

En este ejercicio 2 el cálculo de g (x) es similar al Ej 1 pero como nos dan el dato adicional de que g evaluada en un x da un resultado podremos determinar el valor de C

constante

Hallar "la" función g tal que :

Ej 2 a) $g'(x) = 8x$ y $g(0) = 4$

Buscamos una función g (x) tal que derivada dé 8 x

entonces $g(x) = 8 \cdot \frac{x^2}{2} + C = 4\,x^2 + C$ **porque si la derivamos**

constante constante

$$[4\,x^2 + C]' = 4[x^2]' + [C]' = 4 \cdot 2 \cdot x + 0 = 8\,x$$

Y como $g(0) = 4$ evaluamos en $x = 0$ para determinar C

cc

$$g(0) = 4 \cdot 0^2 + C = 0 + C = 4 \implies C = 4$$

const⋯ constante constar

Entonces $g(x) = 4\,x^2 + 4$

Escrito en notación de integrales :

si $g'(x) = 8x$ buscamos $g(x) = \int g'(x)\,dx = \int 8x\,dx \iff$

$\iff g(x) = 8\int x\,dx = 8\cdot\frac{1}{2}x^2 + C = 4x^2 + C$

Y como $g(0) = 4$

$g(x) = 4\cdot 0^2 + C = 0 + C = 4 \implies C = 4$

Por lo tanto $g(x) = 4x^2 + 4$

Respuesta del 2 a) $g(x) = 4x^2 + 4$

Hallar "la" función g tal que :

Ej 2 b) $g'(x) = -x^3$ y $g(1) = 5$

Buscamos una función $g(x)$ tal que derivada dé $-x^3$

entonces $g(x) = -\frac{x^4}{4} + C$ porque si la derivamos

$\left[-\frac{x^4}{4} + C\right]' = -\frac{1}{4}\left[x^4\right]' + [C]' = -\frac{1}{4}\cdot 4\cdot x^3 + 0 = -x^3$

Y como $g(1) = 5$ evaluamos en $x = 1$ para determinar C

$g(1) = -\frac{1^4}{4} + C = -\frac{1}{4} + C = 5 \implies C = 5 + \frac{1}{4} = \frac{21}{4}$

Entonces $g(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{21}{4}$

Escrito en notación de integrales :

si $g'(x) = -x^3$ buscamos $g(x) = \int g'(x)\,dx = \int -x^3\,dx \iff$

$\iff g(x) = -\int x^3\,dx = -\frac{1}{4}x^4 + C$

Y como $g(1) = 5$

$g(1) = -\frac{1}{4}1^4 + C = -\frac{1}{4} + C = 5 \implies C = 5 + \frac{1}{4} = \frac{21}{4}$

Por lo tanto $g(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{21}{4}$

Respuesta del 2 b) $g(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{21}{4}$

Hallar "la" función g tal que :

Ej 2 c) $g'(x) = -2\cos(x)$ **y** $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

Buscamos una función $g(x)$ **tal que derivada dé** $-2\cos(x)$

entonces $g(x) = -2\,\text{sen}(x) + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **porque si la derivamos**

$$[-2\,\text{sen}(x) + C]' = -2[\text{sen}(x)]' + [C]' = -2\cos(x) + 0 = -2\cos(x)$$

Y como $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ **evaluamos en** $x = \frac{\pi}{2}$ **para determinar** $\underbrace{C}_{\text{cons}}$ **:**

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \underbrace{C}_{\text{constante}} = -2\cdot 1 + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 3 \implies \underbrace{C}_{\text{constante}} = 3 + 2 = 5$$

Entonces $g(x) = -2\,\text{sen}(x) + 5$

Escrito en notación de integrales :

si $g'(x) = -2\cos(x)$ **buscamos** $g(x) = \int g'(x)\,dx = \int -2\cos(x)\,dx \iff$

$$\iff g(x) = -2\int \cos(x)\,dx = -2\,\text{sen}(x) + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

Y como $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \underbrace{C}_{\text{constante}} = -2\cdot 1 + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 3 \implies \underbrace{C}_{\text{constante}} = 3 + 2 = 5$$

Por lo tanto $g(x) = -2\,\text{sen}(x) + 5$

Respuesta del 2 b) $g(x) = -2\,\text{sen}(x) + 5$

+-

Ejercicio 3.- Calcular las integrales.

a. $\int x^2 dx$ b. $\int x^{123} dx$

c. $\int (2+\sqrt{x})dx$ d. $\int (6x^2 + \operatorname{sen}(x))dx$

e. $\int (x^3+2)dx$ f. $\int x^2(1+\sqrt{x})dx$

g. $\int (e^x + \frac{1}{x^4})dx$ h. $\int (3\cos(x) - 2\operatorname{sen}(x))dx$

Ej 3 Calcular

Ej 3 a) $\int x^2\, dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + \underset{\text{constante}}{C} = \frac{1}{3}x^3 + \underset{\text{cc}}{C}$

$\left(\text{Verificación}: \left[\frac{1}{3}x^3 + C\right]' = \frac{1}{3}\left[x^3\right]' + [C]' = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^2 + 0 = x^2 \quad, \text{Ok}\right)$

Ej 3 b) $\int x^{123}\, dx = \frac{x^{123+1}}{123+1} + \underset{\text{constante}}{C} = \frac{1}{124}x^{124} + \underset{\text{cc}}{C}$

$\left(\text{Verificación}: \left[\frac{1}{124}x^{124} + C\right]' = \frac{1}{124}\left[x^{124}\right]' + [C]' = \frac{1}{124}\cdot 124\cdot x^{123} + 0 = x^{123} \quad, \text{Ok}\right)$

Ej 3 c) $\int \left(2+\sqrt{x}\right) dx = \int 2\, dx + \int \sqrt{x}\, dx = 2\int 1\, dx + \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = 2x + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \underset{\text{constante}}{C} \quad \Longrightarrow \text{aADD}$

$\Longrightarrow \quad \int \left(2+\sqrt{x}\right) dx = 2x + \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \underset{\text{constante}}{C} = 2x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \underset{\text{cc}}{C}$

Por lo tanto

$\int \left(2+\sqrt{x}\right) dx = 2x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \underset{\text{cc}}{C}$

$\left(\text{Verificación}: \left[2x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C\right]' = [2x]' + \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]' + [C]' = 2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}} + 0 = \right.$

$\left. = 2 + x^{\frac{1}{2}} = 2 + \sqrt{x} \quad, \text{Ok}\right)$

Ej 3 d) $\int \left(6x^2 + \operatorname{sen}(x)\right) dx = \int 6x^2\, dx + \int \operatorname{sen}(x)\, dx = 6\int x^2\, dx + \int \operatorname{sen}(x)\, dx = 6$

$$= 6 \cdot \frac{1}{3}\, x^3 + (-\cos\ (x)) + \underbrace{C}_{\text{constante}} = 2\, x^3 - \cos\ (x) + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

Por lo tanto

$$\int \left(6\, x^2 + \text{sen}\ (x)\right)\, dx = 2\, x^3 - \cos\ (x) + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

$$\left(\text{Verificación: } \left[2\, x^3 - \cos\ (x) + C\right]' = \left[2\, x^3\right]' - [\cos\ (x)]' + [C]' =\right.$$

$$\left. = 2 \cdot 3\, x^2 - (-\text{sen}\ (x)) + 0 = 6\, x^2 + \text{sen}\ (x)\ ,\ \ \text{Ok}\right)$$

Ej 3 e) $$\int \left(x^3 + 2\right)\, dx = \int x^3\, dx + \int 2\, dx = \frac{1}{4}\, x^4 + 2 \int 1\, dx = \frac{1}{4}\, x^4 + 2\, x + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

Por lo tanto

$$\int \left(x^3 + 2\right)\, dx = \frac{1}{4}\, x^4 + 2\, x + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

$$\left(\text{Verificación: } \left[\frac{1}{4}\, x^4 + 2\, x + C\right]' = \frac{1}{4}\left[x^4\right]' + [2\, x]' + [C]' =\right.$$

$$\left. = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot x^3 + 2\, [x]' = x^3 + 2,\ \ \text{Ok}\right)$$

Ej 3 f) $$\int x^2\, \left(1 + \sqrt{x}\right)\, dx = \int \left(x^2 + x^2\, \sqrt{x}\right)\, dx = \int \left(x^2 + x^2\, x^{\frac{1}{2}}\right)\, dx =$$

$$= \int \left(x^2 + x^{2+\frac{1}{2}}\right)\, dx = \int x^2\, dx + \int x^{\frac{5}{2}}\, dx = \frac{1}{3}\, x^3 + \frac{1}{\frac{5}{2} + 1}\, x^{\frac{5}{2}+1} + \underbrace{C}_{\text{cons}} =$$

$$= \frac{1}{3}\, x^3 + \frac{1}{\frac{7}{2}}\, x^{\frac{7}{2}} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{1}{3}\, x^3 + \frac{2}{7}\, x^{\frac{7}{2}} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{1}{3}\, x^3 + \frac{2}{7}\, \sqrt{x^7} + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

Por lo tanto

$$\int x^2\, \left(1 + \sqrt{x}\right)\, dx = \frac{1}{3}\, x^3 + \frac{2}{7}\, \sqrt{x^7} + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

$$\left(\text{Verificación: } \left[\frac{1}{3}\, x^3 + \frac{2}{7}\, \sqrt{x^7} + C\right]' = \frac{1}{3}\left[x^3\right]' + \frac{2}{7}\left[x^{\frac{7}{2}}\right]' + [C]' =\right.$$

$$\left. = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2 + \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{2} \cdot x^{\frac{5}{2}} = x^2 + x^{\frac{5}{2}} = x^2\, \left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right) = x^2\, \left(1 + \sqrt{x}\right),\ \ \text{Ok}\right)$$

Ej 3 g) $\int \left(e^x + \frac{1}{x^4}\right) dx = \int e^x\, dx + \int \frac{1}{x^4}\, dx = \int e^x\, dx + \int x^{-4}\, dx =$

$= e^x + \frac{1}{(-4+1)} x^{-4+1} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = e^x - \frac{1}{3} x^{-3} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = e^x - \frac{1}{3\,x^3} + \underbrace{C}_{\text{co}}$

Por lo tanto

$\int \left(e^x + \frac{1}{x^4}\right) dx = e^x - \frac{1}{3\,x^3} + \underbrace{C}_{\text{co}}$

$\left(\textbf{Verificación}: \left[e^x - \frac{1}{3\,x^3} + C\right]' = [e^x]' - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x^3}\right]' + [C]' =\right.$

$\left.= e^x - \frac{1}{3}(-3)\, x^{-3-1} + 0 = e^x + x^{-3-1} = e^x + x^{-4} = e^x + \frac{1}{x^4},\ \text{Ok}\right)$

Ej 3 h) $\int (3\cos(x) - 2\,\text{sen}(x))\, dx = \int 3\cos(x)\, dx - \int 2\,\text{sen}(x)\, dx =$

$= 3\int \cos(x)\, dx - 2\int \text{sen}(x)\, dx = 3\,\text{sen}(x) - 2\,(-\cos(x)) + \underbrace{C}_{\text{cons}} =$

$= 3\,\text{sen}(x) + 2\cos(x) + \underbrace{C}_{\text{co}}$

Por lo tanto

$\int (3\cos(x) - 2\,\text{sen}(x))\, dx = 3\,\text{sen}(x) + 2\cos(x) + \underbrace{C}_{\text{co}}$

$(\textbf{Verificación}: [3\,\text{sen}(x) + 2\cos(x) + C]' = [3\,\text{sen}(x)]' + [2\cos(x)]' + [C]' =$

$= 3[\text{sen}(x)]' + 2[\cos(x)]' + [C]' = 3\cos(x) + 2\,(-\text{sen}(x)),\ \text{Ok})$

+-

Comentario teórico :

Ya hemos visto que si a una igualdad aplicamos en ambos miembros la misma función la igualdad se mantiene

Esta afirmación sólo vale si la función que se aplica en ambos miembros es creciente

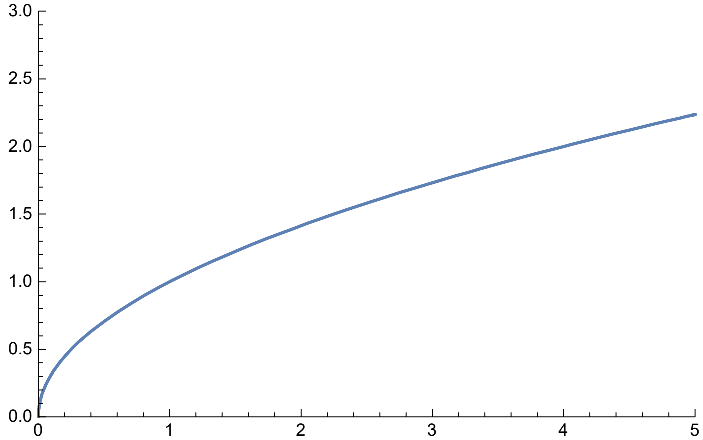
Por ejemplo, si $x^2 = 9$ **sabemos que las soluciones son** $x = -3$ **ó** $x = 3$

Esto es así porque si aplicamos en ambos miembros la raíz cuadrada :

$\sqrt{x^2} = \sqrt{9} \implies |x| = 3 \implies x = -3$ ó $x = 3$ ok

pasar de $x^2 = 9$ **a** $\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$ **sigue manteniendo la igualdad porque la raíz cuadrada es una función creciente**

Gráfico de $\sqrt{x}$: se muestra que es estrictamente creciente



Es más, las funciones estrictamente crecientes preservan las desigualdades !

Sabemos que $4 \leq 16$ si aplicamos la raíz cuadrada a ambos miembros :

$\sqrt{4} \leq \sqrt{16}$ vemos que la desigualdad se mantiene porque $2 \leq 4$

Lo mismo sucede con el símbolo mayor ó mayor ó igual

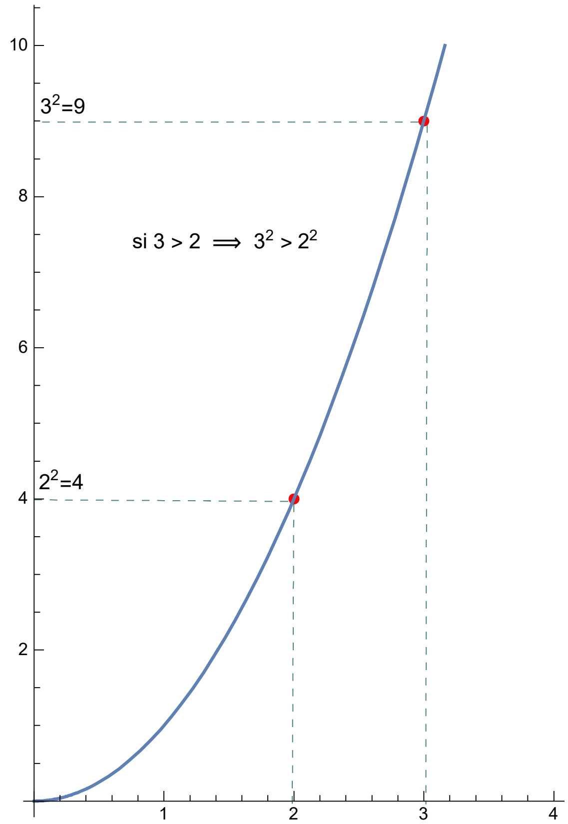
Por ejemplo si tenemos $3 > 2$ qué sucede si aplicamos a ambos miembros de la desigualdad la función elevar al cuadrado?

como $3 > 2 \implies 3^2 > 2^2 \implies 9 > 4$ sigue manteniendo la desigualdad

porque la función que aplicamos en ambos miembros de la desigualdad es la raíz cuadrada

que es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$

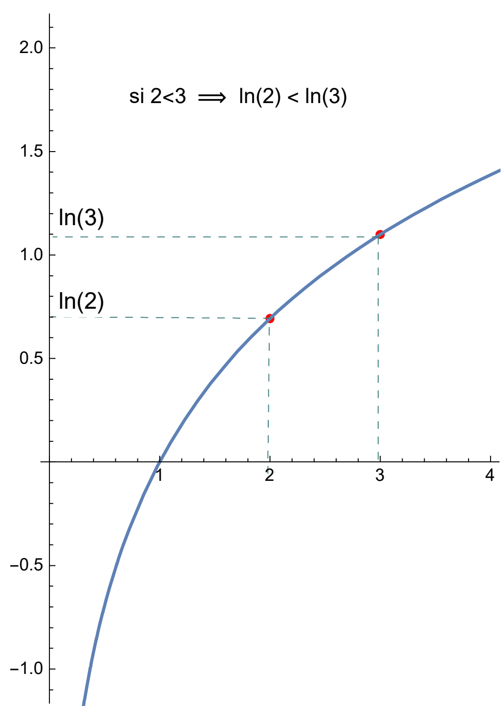
Gráfico de x^2 : se muestra que es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$



Lo mismo sucede con el logaritmo natural ln (x) y todos los logaritmos de base a > 1

Como 2 < 3 es cierto que ln (2) < ln (3) (se mantiene la desigualdad)

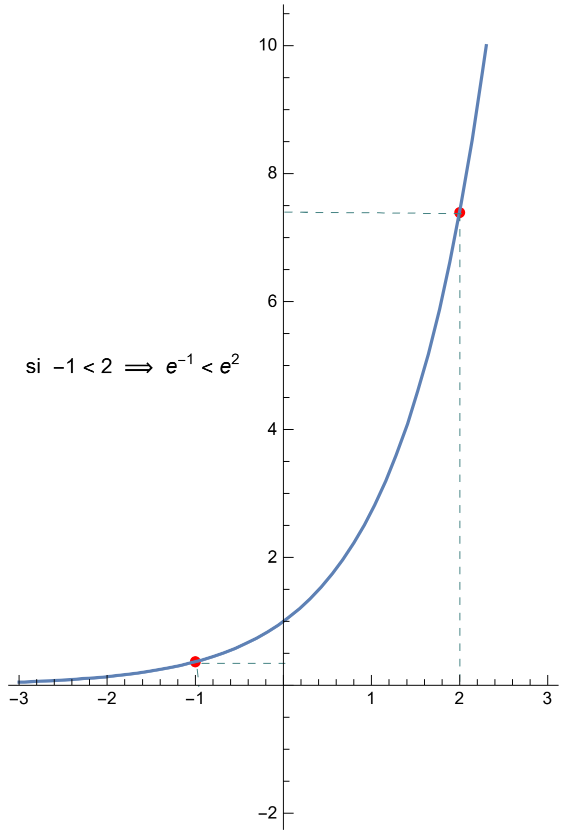
Gráfico de ln (x) : se muestra que es estrictamente creciente en (0, +∞)



Similar con la función exponencial e^x y todos las exponenciales base $a > 1$ (a^x)

como $-1 < 2$ es cierto que $e^{-1} < e^2$ (se mantiene la desigualdad)

Gráfico de e^x : se muestra que es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$



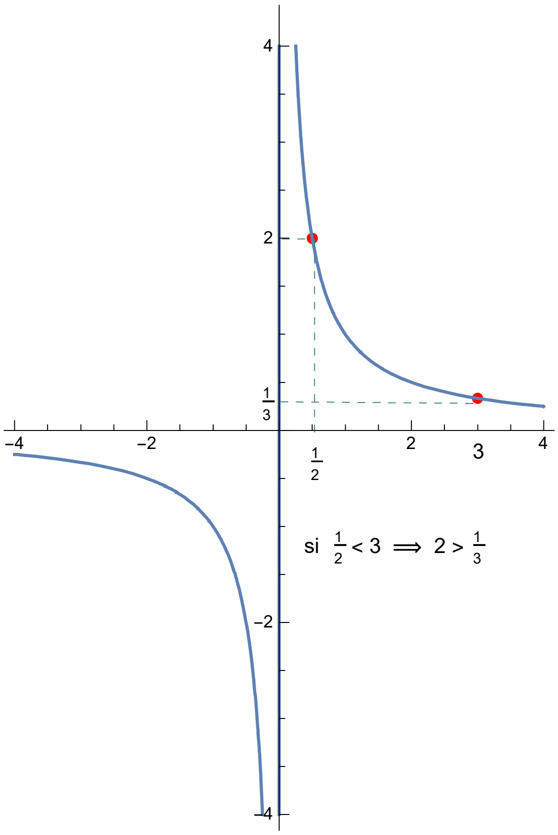
No pasa lo mismo con la función $\frac{1}{x}$ porque es estrictamente decreciente

Aplicar la función $\frac{1}{x}$ a una desigualdad es dar vuelta los números

Por ejemplo, si $\frac{1}{2} < 3 \implies 2 > \frac{1}{3}$ (no se mantiene la desigualdad)

El cambio en la desigualdad se debe al decrecimiento de la función $\frac{1}{x}$

Gráfico de $\frac{1}{x}$: se muestra que es estrictamente decreciente en todo $\mathbb{R}$



Qué sucede si aplicamos la derivada a ambos miembros de una igualdad ?

Veámoslo con un ejemplo :

sea $f(x) = e^x$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$

y $f^{-1}(x) = \ln(x)$, $f^{-1} : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$

Por la propiedad $f^{-1} \circ f(x) = x$ **como también** $f \circ f^{-1}(x) = x$

tomemos la 1 era identidad $f^{-1} \circ f(x) = x$

$x = f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) \quad (*)$

Qué pasará si derivamos a ambos miembros ?

$[x]' = ?\ [f^{-1} \circ f(x)]' = ?\ [f^{-1}(f(x))]'$

Por un lado del lado izquierdo de la igualdad derivamos x **que da** $[x]' = 1$

por otro lado derivamos el lado derecho usando la regla de la cadena $[f^{-1}(f(x))]'$

$[f^{-1}(f(x))]' = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) \quad (**)$

Con $f = e^x$ **y** $f^{-1} = \ln(x)$ **tenemos que**

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x} \implies (f^{-1})' f(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{e^x}$$

el otro factor $f'(x) = e^x$

Si multiplicamos como pide (**) tenemos :

$$\left[f^{-1}(f(x))\right]' = \left(f^{-1}\right)'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{e^x} \cdot e^x = 1$$

Es decir que derivando a ambos lados de la igualdad (*) da 1

en ambos lados de la igualdad

Por lo tanto no cambia la igualdad al derivar en ambos miembros

Esto no es una prueba y no era la intención demostrar que la igualdad no cambia
al derivar ambos miembros de una igualdad

Sin embargo, podemos estar tramquilos de que al derivar ambos miembros de una igualdad

seno

la igualdad no cambia

Derivada de la función inversa $f^{-1'}(x)$:

Resultado interesante que surge de la 2 da identidad

partimos de la 2 da identidad de f compuesta con su inversa f^{-1} :

$f \circ f^{-1}(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x$

Si derivamos ambos miembros tenemos :

$\left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right]' = [x]'$ $\Longrightarrow$ aplicando la regla de la cadena al derivar el lado izquierdo

$\Longrightarrow\ f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot f^{-1'}(x) = 1 \quad (***)$

el lado izquierdo es la derivada de f evaluada en $f^{-1}(x)$ multiplicada

por la derivada de f^{-1} que escribimos como $f^{-1'}(x)$

Despejando $f^{-1'}(x)$ de (***) queda :

$$f^{-1'}(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \qquad (\&\&)$$

Ejemplo :

Sea $f(x) = x^2$ definida como $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

nos quedamos con la rama derecha de la parábola para que tenga inversa

entonces

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ **definida como** $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ **es la función inversa de f**

Queremos aplicar la fórmula de la derivada de la función inversa (&&) :

$$f^{-1'}(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

si f es $x^2 \longrightarrow f' = 2x \longrightarrow f'\left(f^{-1}(x)\right) = f'\left(\sqrt{x}\right) = 2 \cdot \sqrt{x}$

reemplacemos en la fórmula :

$$f^{-1'}(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{f'\left(\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Efectivamente, por un camino independiente podemos obtener la derivada de f^{-1} **:**

ya que $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \left[\sqrt{x}\right]' = \left[x^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

La fórmula que da la derivada de la función inversa (&&) es muy útil cuando f es algo complicada

----

Qué sucede si aplicamos la integral a ambos miembros de una igualdad ?

Podemos quedarnos tranquilos que la igualdad no cambia

Es decir si :

$$f(x) = g(x) \implies \int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx$$

Estudien el Método de sustitución, teoría sugerida por la cátedra de Mate 51

Método de sustitución

Método de integración por sustitución

Recordemos cómo se calcula la derivada de la composición (Regla de la cadena):

Si F y g son funciones derivables, entonces

$$(F \circ g(x))' = (F(g(x)))' = F'(g(x)).g'(x).$$

Nos queda entonces que la derivada de F compuesta con g en un valor x es F' evaluada en $g(x)$ multiplicada por la derivada de g en x.

Integremos a un lado y al otro:

$$\int (F \circ g(x))' dx = \int F'(g(x)).g'(x) dx.$$

Obtenemos:

$$F \circ g(x) + C = \int F'(g(x)).g'(x) dx.$$

Luego, si queremos integrar $F'(g(x)).g'(x)$, nos basta con calcular F porque ya conocemos g.

El ***método de sustitución*** nos ayuda a integrar una función que proviene de haber derivado una composición de funciones, simplificando la notación a través de la sustitución de $g(x)$ por una nueva variable u, y $g'(x)dx$ por du

$$\int F'\Big(\overbrace{g(x)}^{u}\Big)\,\overbrace{g'(x)dx}^{du} = F\Big(\overbrace{g(x)}^{u}\Big) + C.$$

Nos sugiere que nos "olvidemos" de g y de g' y nos concentremos en hallar F.

Para comprender en qué consiste este método, veamos unos ejemplos:

Ejemplo 1. Calcular $\int 2x\sqrt{x^2+1}\, dx$.

La función $h(x) = 2x\sqrt{x^2+1}$ no está en tabla, y no es ni una suma ni una resta de funciones. Podríamos sacar el 2 que está multiplicando, pero esto no nos facilitaría la tarea.

Lo que podemos apreciar es que hay una composición: la función $g(x) = x^2 + 1$ está "adentro" de la función raíz cuadrada. Y, más aún, también vemos que está la derivada de g multiplicando: $g'(x) = 2x$. Si la función que está dentro de la integral viniera de la derivada de una composición, tenemos identificadas muchas partes:

$$(F \circ g(x))' = F'(g(x)).g'(x).$$

Nos faltaría identificar F' y deducir quién es F. Este método nos ayuda a simplificar la notación para poder finalizar el cálculo de la integral.

Vamos a sustituir $g(x)$ por una nueva variable que llamaremos u. Y sustituiremos $g'(x)dx$ por du.

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx \underset{\substack{u=x^2+1\\ du=(x^2+1)'dx\\ =2xdx}}{=} \int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}}du \underset{\substack{\text{integral}\\ \text{por tabla}}}{=} \frac{1}{\frac{1}{2}+1}u^{\frac{1}{2}+1}+C$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}}u^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C = \boxed{\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C}$$

Cuando terminamos de integrar, volvemos a la variable original (que en este caso es x).

Verifiquemos que realmente llegamos a la solución buscada. Para esto, tenemos que derivar y ver si nos da la función de adentro de la integral:

$$\left[\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C\right]' = \left[\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]' + [C]' = \frac{2}{3}\left[(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]' + 0 =$$
$$= \frac{2}{3}.\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{3}{2}-1}(x^2+1)' = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}.\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}.2x = \sqrt{x^2+1}.2x = 2x\sqrt{x^2+1}$$

como queríamos.

Ejemplo 2. Calcular $\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+7}\,dx$.

La función a integrar no está en tabla, no hay sumas ni restas, ni constantes que podamos "sacar afuera". A diferencia del ejemplo anterior, la composición aquí no es tan evidente. Pero el hecho de que haya una función polinómica de grado 3 y otra de grado 2 podría hacernos sospechar que la segunda puede estar relacionada con la derivada de la primera. Propongamos $u = x^3-3x^2+7$. Entonces $du = (x^3-3x^2+7)'dx = (3x^2-6x)dx = 3(x^2-2x)dx$. Y esta última expresión es el numerador, salvo por un 3 que está multiplicando. Para poder utilizar el método de sustitución, vamos a agregar este 3 de la siguiente manera:

$$\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+7}\,dx = \int 1.\frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+7}\,dx = \int \frac{3}{3}.\frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+7}\,dx = \int \frac{1}{3}.\frac{3(x^2-2x)}{x^3-3x^2+7}\,dx.$$

Ahora "sacamos afuera" el $\frac{1}{3}$ y aplicamos sustitución como antes:

$$\frac{1}{3}\int \frac{3(x^2-2x)}{x^3-3x^2+7}\,dx \underset{\substack{u=x^3-3x^2+7\\ du=(x^3-3x^2+7)'dx\\ =3(x^2-2x)dx}}{=} \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du \underset{\substack{\text{integral}\\ \text{por tabla}}}{=} \frac{1}{3}\ln(u)+C = \boxed{\frac{1}{3}\ln(x^3-3x^2+7)+C}$$

Pasemos a resolver el Ejercicio 4 de la Pràctica 6

+-

Ejercicio 4.- Calcular aplicando el método de sustitución.

a. $\int \frac{x}{x^2+1}dx$ **b.** $\int 4\,\text{sen}(4x)dx$

c. $\int \cos(4x)dx$ **d.** $\int \frac{1}{x+3}dx$

e. $\int x\sqrt{x^2+3}dx$ **f.** $\int \frac{dx}{(3x+1)^2}$

g. $\int \frac{\ln(x)}{x}dx$ **h.** $\int \frac{\cos(x)}{\text{sen}^5(x)}dx$

i. $\int e^{-6x}dx$ **j.** $\int \frac{\ln^3(x)}{x}dx$

k. $\int x^2\cos(x^3)dx$ **l.** $\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}dx$

m. $\int \frac{\ln(-2x+3)}{-4x+6}dx$ **n.** $\int \frac{4x^3+6x^2}{3x^4+6x^3-9}dx$

o. $\int x\sqrt{x+2}dx$ **p.** $\int x(3x+1)^5dx$

q. $\int xe^{x^2+5}dx$ **r.** $\int e^{\cos(x)}\,\text{sen}(x)dx$

Ej 4 Aplicando método de sustitución calcular las siguientes integrales

Ej 4 a)

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

el método de sustitución nos sugiere encontrar en el integrando una función u (x) y su derivada u' (x) a menos de alguna constante que pueda arreglarse

Si ello sucede bastará con sustituir la función de x por u y llamar a su diferencial

du = u' dx

La idea es tranformar la $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$ **en otra integral** $\int g(u)\,du$

en una nueva variable u que sea sencilla de resolver

fíjense que si elegimos $u = x^2+1 \implies du = u'\,dx = 2x\,dx$

pero en el integrando no aparece 2 x sino x

Entonces hacemos aparecer el 2 que falta multiplicando y dividiendo por 2 y arreglando el integrando convenientemente

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} =$$

llamando entonces $u = x^2 + 1$ y $du = 2\,x\,dx$ sustituyendo en la nueva variable u :

$$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} =$$

Pero esta integral tiene primitiva inmediata que es $\frac{1}{2} \ln |u| + \underbrace{C}_{\text{constante}}$

$$= \frac{1}{2} \ln |u| + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

volviendo a la variable x y como $u = x^2 + 1$ me quedará :

$$= \frac{1}{2} \ln \left|x^2 + 1\right| + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

por lo tanto :

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left|x^2 + 1\right| + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

Verificación :

Si derivamos $\frac{1}{2} \ln \left|x^2 + 1\right| + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ como resultado tenemos que obtener

el integrando $\frac{x}{x^2 + 1}$

Veamos :

$$\left[\frac{1}{2} \ln \left|x^2 + 1\right| + C\right]' = \left[\frac{1}{2} \ln \left|x^2 + 1\right|\right]' + [C]' = \frac{1}{2}\left[\ln \left|x^2 + 1\right|\right]' + 0 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2\,x = \frac{x}{x^2 + 1} \quad , \text{ ok}$$

Ej 4 b)

$$\int 4 \operatorname{sen}(4\,x)\,dx$$

en este caso llamamos

$u = 4\,x \implies$ y como $du = u'\,dx \implies du = u'\,dx = 4\,dx$

sustituyendo quedará :

$$\int 4 \operatorname{sen}(4\,x)\,dx = \int \operatorname{sen}(4\,x)\,4\,dx = \int \operatorname{sen}(u)\,du = -\cos(u) + \underbrace{C}_{\text{constante}} = -\cos(4\,x) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

por lo tanto :

$$\int 4 \operatorname{sen}(4x)\,dx = -\cos(4x) + \underset{\text{cc}}{C}$$

Verificación :

Si derivamos $-\cos(4x) + \underset{\text{constante}}{C}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $4 \operatorname{sen}(4x)$

Veamos :

$[-\cos(4x) + C]' = [-\cos(4x)]' + [C]' = -[\cos(4x)]' + 0 =$

$= -(-\operatorname{sen}(4x)) \cdot 4 = 4 \operatorname{sen}(4x)$, ok

----

Ej 4 c)

$\int \cos(4x)\,dx$

si llamamos $u = 4x$ **y como** $du = u'\,dx \implies du = 4\,dx \implies \frac{1}{4} du = dx$

sustituyendo quedará :

$\int \cos(4x)\,dx = \int \cos(u) \frac{1}{4} du = \frac{1}{4} \int \cos(u)\,du = \frac{1}{4} \operatorname{sen}(u) + \underset{\text{constante}}{C} = \frac{1}{4} \operatorname{sen}(4x) + \underset{\text{cc}}{C}$

por lo tanto :

$$\int \cos(4x)\,dx = \frac{1}{4} \operatorname{sen}(4x) + \underset{\text{cc}}{C}$$

Verificación :

Si derivamos $\frac{1}{4} \operatorname{sen}(4x) + \underset{\text{constante}}{C}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $\cos(4x)$

Veamos :

$\left[\frac{1}{4} \operatorname{sen}(4x) + C\right]' = \frac{1}{4} [\operatorname{sen}(4x)]' + [C]' = \frac{1}{4} \cos(4x) \cdot 4 + 0 =$

$= \cos(4x)$, ok

Ej 4 d)

$$\int \frac{1}{x+3}\,dx$$

llamemos $u = x + 3$ **y como** $du = u'\,dx \implies du = 1\,dx = dx$

sustituyendo quedará :

$$\int \frac{1}{x+3}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + \underset{\text{constante}}{C} = \ln|x+3| + \underset{\text{cc}}{C}$$

por lo tanto :

$$\int \frac{1}{x+3}\,dx = \ln|x+3| + \underset{\text{cc}}{C}$$

Verificación :

Si derivamos $\ln|x+3| + \underset{\text{constante}}{C}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $\dfrac{1}{x+3}$

Veamos :

$$[\ln|x+3| + C]' = [\ln|x+3|]' + [C]' = \frac{1}{x+3} + 0 = \frac{1}{x+3} \quad , \text{ ok}$$

Ej 4 e)

$$\int x\sqrt{x^2+3}\,dx$$

llamemos $u = x^2 + 3$ **y como** $du = u'\,dx \implies du = 2\,x\,dx \implies \frac{1}{2}\,du = x\,dx$

sustituyendo quedará :

$$\int x\sqrt{x^2+3}\,dx = \int \sqrt{x^2+3}\;x\,dx = \int \sqrt{u}\;\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+1\right)}\,u^{\frac{1}{2}+1} + \underset{\text{constante}}{C} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}\,u^{\frac{3}{2}} + \underset{\text{constante}}{C} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\,u^{\frac{3}{2}} + \underset{\text{cons}}{C} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{u^3} + \underset{\text{constante}}{C} = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+3\right)^3} + \underset{\text{cc}}{C}$$

por lo tanto :

$$\int x\sqrt{x^2+3}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+3\right)^3} + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

Verificación :

Si derivamos $\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+3\right)^3} + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $x\sqrt{x^2+3}$

Veamos :

$$\left[\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+3\right)^3}+C\right]' = \left[\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+3\right)^3}\right]' + [C]' = \frac{1}{3}\left[\left(x^2+3\right)^{\frac{3}{2}}\right]' + 0 =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\left(x^2+3\right)^{\frac{3}{2}-1}\cdot 2x = \frac{1}{2}\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x = x\sqrt{x^2+3} \qquad \text{, ok}$$

Ej 4 f)

$$\int \frac{dx}{(3x+1)^2}$$

llamemos $u = 3x+1$ **y como** $du = u'\,dx \implies du = 3\,dx \implies \frac{1}{3}du = dx$

sustituyendo quedará :

$$\int \frac{dx}{(3x+1)^2} = \int \frac{1}{3}\frac{du}{u^2} = \frac{1}{3}\int u^{-2}\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(-2+1)}u^{-2+1} + \underbrace{C}_{\text{cons}} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(-1)}u^{-1} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{u} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = -\frac{1}{3(3x+1)} + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

por lo tanto :

$$\int \frac{dx}{(3x+1)^2} = -\frac{1}{3(3x+1)} + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

Verificación :

Si derivamos $-\frac{1}{3(3x+1)} + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $\dfrac{1}{(3x+1)^2}$

Veamos :

$$\left[-\frac{1}{3\,(3x+1)}+C\right]' = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(3x+1)}\right]' + [C]' = -\frac{1}{3}\left[(3x+1)^{-1}\right]' + 0 =$$

$$= -\frac{1}{3}\,(-1)\,(3x+1)^{-2}\cdot 3 = -\frac{1}{3}\,(-1)\,3\,(3x+1)^{-2} = \frac{1}{(3x+1)^2} \qquad \text{, ok}$$

Ej 4 g)

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$$

como $\dfrac{1}{x}$ **es la derivada del** $\ln(x)$ **conviene llamar**

$$u = \ln(x) \quad \text{y como} \quad du = u'\,dx \implies du = \frac{1}{x}\,dx$$

sustituyendo quedará :

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int \ln(x)\,\frac{1}{x}\,dx = \int u\,du = \frac{1}{2}\,u^2 + \underset{\text{cons}}{C} =$$

$$= \frac{1}{2}\,(\ln(x))^2 + \underset{\text{constante}}{C} = \frac{1}{2}\,\ln^2(x) + \underset{\text{cc}}{C}$$

por lo tanto :

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\,\ln^2(x) + \underset{\text{cc}}{C}$$

Verificación :

Si derivamos $\dfrac{1}{2}\ln^2(x) + \underset{\text{constante}}{C}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $\dfrac{\ln(x)}{x}$

Veamos :

$$\left[\frac{1}{2}\ln^2(x) + C\right]' = \frac{1}{2}\left[\ln^2(x)\right]' + [C]' = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \ln(x)\,.\,\frac{1}{x} + 0 =$$

$$= \frac{\ln (x)}{x} \quad , \text{ ok}$$

Ej 4 h)

$$\int \frac{\cos (x)}{\text{sen}^5 (x)} dx$$

como cos (x) es la derivada del sen (x) conviene llamar

$u = \text{sen}(x)$ y como $du = u' dx \implies du = \cos(x)\, dx$

sustituyendo quedará :

$$\int \frac{\cos (x)}{\text{sen}^5 (x)} dx = \int \frac{1}{\text{sen}^5 (x)} \cos (x)\, dx = \int \frac{1}{u^5} du =$$

$$= \int u^{-5} du = \frac{1}{(-5+1)} u^{-5+1} + \underset{\text{constante}}{C} = \frac{1}{(-4)} u^{-4} + \underset{\text{cons}}{C} =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{u^4} + \underset{\text{constante}}{C} = -\frac{1}{4\, \text{sen}^4 (x)} + \underset{\text{cc}}{C}$$

por lo tanto :

$$\int \frac{\cos (x)}{\text{sen}^5 (x)} dx = -\frac{1}{4\, \text{sen}^4 (x)} + \underset{\text{cc}}{C}$$

Verificación :

Si derivamos $-\frac{1}{4\, \text{sen}^4 (x)} + \underset{\text{constante}}{C}$ como resultado tenemos que obtener

el integrando $\frac{\cos (x)}{\text{sen}^5 (x)}$

Veamos :

$$\left[-\frac{1}{4\, \text{sen}^4 (x)} + C\right]' = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\text{sen}^4 (x)}\right]' + [C]' = -\frac{1}{4} \cdot \left[\text{sen}^{-4} (x)\right]' + 0 =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot (-4)\, \text{sen}^{-5} (x) \cdot \cos (x) = \text{sen}^{-5} (x) \cdot \cos (x) = \frac{\cos (x)}{\text{sen}^5 (x)} \quad , \text{ ok}$$

Ej 4 i)

$$\int e^{-6x}\,dx$$

conviene llamar

$$u = -6x \quad \text{y como} \quad du = u'\,dx \implies du = -6\,dx \implies -\frac{1}{6}\,du = dx$$

sustituyendo quedará :

$$\int e^{-6x}\,dx = \int e^{u}\left(-\frac{1}{6}\right)du = \left(-\frac{1}{6}\right)\int e^{u}\,du =$$

$$= -\frac{1}{6}e^{u} + \underset{\text{constante}}{C} = -\frac{1}{6}e^{-6x} + \underset{\text{cc}}{C}$$

por lo tanto :

$$\int e^{-6x}\,dx = -\frac{1}{6}e^{-6x} + \underset{\text{cc}}{C}$$

Verificación :

Si derivamos $-\frac{1}{6}e^{-6x} + \underset{\text{constante}}{C}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando e^{-6x}

Veamos :

$$\left[-\frac{1}{6}e^{-6x} + C\right]' = -\frac{1}{6}\left[e^{-6x}\right]' + [C]' = -\frac{1}{6}\cdot e^{-6x}(-6) + 0 =$$

$$= e^{-6x} \quad , \text{ ok}$$

Ej 4 j)

$$\int \frac{\ln^3(x)}{x}\,dx$$

como $\frac{1}{x}$ **es la derivada del** $\ln(x)$ **conviene llamar**

$$u = \ln(x) \quad \text{y como} \quad du = u'\,dx \implies du = \frac{1}{x}\,dx \implies$$

sustituyendo quedará :

$$\int \frac{\ln^3 (x)}{x} dx = \int \ln^3 (x) \; \frac{1}{x} \; dx = \int u^3 \; du = \frac{1}{3+1} u^{3+1} + \underbrace{C}_{\text{cons}} =$$

$$= \frac{1}{4} u^4 + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{1}{4} (\ln (x))^4 + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{1}{4} \ln^4 (x) + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

por lo tanto :

$$\int \frac{\ln^3 (x)}{x} dx = \frac{1}{4} \ln^4 (x) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

Verificación :

Si derivamos $\frac{1}{4} \ln^4 (x) + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $\frac{\ln^3 (x)}{x}$

Veamos :

$$\left[\frac{1}{4} \ln^4 (x) + C\right]' = \frac{1}{4}\left[\ln^4 (x)\right]' + [C]' = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \ln^3 (x) \cdot \frac{1}{x} + 0 =$$

$$= \ln^3 (x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln^3 (x)}{x} \qquad , \text{ ok}$$

Ej 4 k)

$$\int x^2 \cos \left(x^3\right) dx$$

conviene llamar

$$u = x^3 \;\; \text{y como} \;\; du = u' \, dx \;\; \Longrightarrow \;\; du = 3\, x^2 \, dx \;\; \Longrightarrow \;\; \frac{1}{3} du = x^2 \, dx$$

sustituyendo quedará :

$$\int x^2 \cos \left(x^3\right) dx = \int \cos \left(x^3\right) x^2 \, dx = \int \cos (u) \; \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \int \cos (u) \, du =$$

$$= \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,(u) + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,\left(x^3\right) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

por lo tanto :

$$\int x^2 \cos\left(x^3\right) dx = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,\left(x^3\right) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

Verificación :

Si derivamos $\frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,\left(x^3\right) + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $x^2 \cos\left(x^3\right)$

Veamos :

$$\left[\frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,\left(x^3\right) + C\right]' = \frac{1}{3}\left[\mathrm{sen}\,\left(x^3\right)\right]' + [C]' = \frac{1}{3}\cos\left(x^3\right)\cdot 3\,x^2 + 0 =$$

$$= \cos\left(x^3\right)\cdot x^2 = x^2 \cos\left(x^3\right) \quad , \text{ ok}$$

Ej 4 l)

$$\int \frac{\cos\,(\ln\,(x))}{x}\,dx$$

como $\frac{1}{x}$ **es la derivada del** $\ln\,(x)$ **conviene llamar**

$u = \ln\,(x)$ **y como** $du = u'\,dx \implies du = \frac{1}{x}\,dx$

sustituyendo quedará :

$$\int \frac{\cos\,(\ln\,(x))}{x}\,dx = \int \cos\,(\ln\,(x))\,\frac{1}{x}\,dx = \int \cos\,(u)\,du =$$

$$= \mathrm{sen}\,(u) + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \mathrm{sen}\,(\ln\,(x)) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

por lo tanto :

$$\int \frac{\cos\,(\ln\,(x))}{x}\,dx = \mathrm{sen}\,(\ln\,(x)) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

Verificación :

Si derivamos $\text{sen}(\ln(x)) + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $\dfrac{\cos(\ln(x))}{x}$

Veamos :

$$[\,\text{sen}(\ln(x)) + C\,]' = [\text{sen}(\ln(x))]' + [C]' = \cos(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x} + 0 =$$

$$= \frac{\cos(\ln(x))}{x} \quad ,\ \text{ok}$$

Ej 4 m)

$$\int \frac{\ln(-2x+3)}{-4x+6}\,dx$$

primero observemos que el denominador es el doble del argumento del logaritmo

$$-4x + 6 = 2\,(-2x+3)$$

En este ejercicio hay una doble sustitución

llamemos $u = -2x + 3$ **y como** $du = u'\,dx \implies du = -2\,dx \implies -\dfrac{1}{2}\,du = dx$

sustituyendo quedará :

$$\int \frac{\ln(-2x+3)}{-4x+6}\,dx = \int \frac{\ln(-2x+3)}{2\,(-2x+3)}\,dx = \int \frac{\ln(u)}{2\,(u)}\left(-\frac{1}{2}\right)du =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{\ln(u)}{u}\,du$$

Ahora hacemos una nueva sustitución, como en el Ej 4 g) :

como $\dfrac{1}{u}$ **es la derivada del** $\ln(u)$ **conviene llamar**

$w = \ln(u)$ **y como** $dw = w'\,du \implies dw = \dfrac{1}{u}\,du$

con esta nueva sustitución quedará :

$$-\frac{1}{4}\int \frac{\ln(u)}{u}\,du = -\frac{1}{4}\int \ln(u)\,\frac{1}{u}\,du = -\frac{1}{4}\int w\,dw =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}w^2 + \underbrace{C}_{\text{constante}} = -\frac{1}{8}w^2 + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

reemplazando $w = \ln(u)$

$$= -\frac{1}{8}\ln^2(u) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

reemplazando $u = -2x + 3$

$$= -\frac{1}{8}\ln^2(-2x+3) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

por lo tanto :

$$\int \frac{\ln(-2x+3)}{-4x+6}\,dx = -\frac{1}{8}\ln^2(-2x+3) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

Verificación :

Si derivamos $-\frac{1}{8}\ln^2(-2x+3) + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $\frac{\ln(-2x+3)}{-4x+6}$

Veamos :

$$\left[-\frac{1}{8}\ln^2(-2x+3) + C\right]' = -\frac{1}{8}\left[\ln^2(-2x+3)\right]' + [C]' =$$

$$= -\frac{1}{8}\cdot 2\cdot\ln(-2x+3)\cdot\frac{1}{-2x+3}\cdot(-2) + 0 =$$

$$= \frac{4}{8}\ln(-2x+3)\cdot\frac{1}{-2x+3} = \frac{1}{2}\ln(-2x+3)\cdot\frac{1}{-2x+3} =$$

$$= \frac{\ln(-2x+3)}{2(-2x+3)} = \frac{\ln(-2x+3)}{(-4x+6)} \quad , \quad \text{ok}$$

Ej 4 n)

$$\int \frac{4x^3 + 6x^2}{3x^4 + 6x^3 - 9}\,dx$$

Como en el integrando deben estar u y u' conviene llamar :

$u = 3x^4 + 6x^3 - 9$ y como $du = u'\,dx \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \; du = \left(12x^3 + 18x^2\right) dx = 3\left(4x^3 + 6x^2\right) dx \;\Longrightarrow\; \frac{1}{3}\,du = \left(4x^3 + 6x^2\right) dx$$

sustituyendo quedará :

$$\int \frac{4x^3 + 6x^2}{3x^4 + 6x^3 - 9}\,dx = \int \frac{\left(4x^3 + 6x^2\right) dx}{3x^4 + 6x^3 - 9} = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{3}\,du =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{3} \ln |u| + C = \frac{1}{3} \ln \left|3x^4 + 6x^3 - 9\right| + C$$

constante cc

por lo tanto :

$$\int \frac{4x^3 + 6x^2}{3x^4 + 6x^3 - 9}\,dx = \frac{1}{3} \ln \left|3x^4 + 6x^3 - 9\right| + C$$

cc

Verificación :

Si derivamos $\frac{1}{3} \ln \left|3x^4 + 6x^3 - 9\right| + C$ como resultado tenemos que obtener

constante

el integrando $\frac{4x^3 + 6x^2}{3x^4 + 6x^3 - 9}$

Veamos :

$$\left[\frac{1}{3} \ln \left|3x^4 + 6x^3 - 9\right| + C\right]' = \frac{1}{3}\left[\ln \left|3x^4 + 6x^3 - 9\right|\right]' + [C]' =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3x^4 + 6x^3 - 9} \cdot \left(12x^3 + 18x^2\right) + 0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\left(4x^3 + 6x^2\right)}{3x^4 + 6x^3 - 9} =$$

$$= \frac{4x^3 + 6x^2}{3x^4 + 6x^3 - 9} \qquad , \quad \text{ok}$$

Ej 4 o)

$$\int x \sqrt{x + 2}\,dx$$

truco : sumamos y restamos 2 y distribuimos :

$$\int \left(x + 2 - 2\right) \sqrt{x+2}\ dx = \int \left(x+2\right) \sqrt{x+2}\ dx \ - \ 2 \int \sqrt{x+2}\ dx \qquad (*)$$

calculemos la 1 era integral :

$$\int \left(x+2\right) \sqrt{x+2}\ dx$$

llamamos $u = x + 2$ **y como** $du = u'\, dx \implies du = dx$

sustituyendo quedará :

$$\int \left(x+2\right) \sqrt{x+2}\ dx = \int u \sqrt{u}\ du = \int u^{\frac{3}{2}}\ du =$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}+1} u^{\frac{3}{2}+1} + C_1 = \frac{1}{\frac{5}{2}} u^{\frac{5}{2}} + C_1 = \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} + C_1$$

reemplazando $u = x + 2$

$$= \frac{2}{5} \left(x+2\right)^{\frac{5}{2}} + C_1$$

----

calculemos la 2 da integral :

$$-2 \int \sqrt{x+2}\ dx$$

llamamos $u = x + 2$ **y como** $du = u'\, dx \implies du = dx$

sustituyendo quedará :

$$-2 \int \sqrt{u}\ du = -2 \int u^{\frac{1}{2}}\ du = -2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+1} u^{\frac{1}{2}+1} + C_2 = -2 \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} u^{\frac{3}{2}} + C_2 =$$

$$= -2 \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C_2 = -\frac{4}{3} u^{\frac{3}{2}} + C_2$$

reemplazando $u = x + 2$

$$= -\frac{4}{3} \left(x+2\right)^{\frac{3}{2}} + C_2$$

Entonces :

$$\int \left(x+2-2\right) \sqrt{x+2}\ dx = \int \left(x+2\right) \sqrt{x+2}\ dx - 2 \int \sqrt{x+2}\ dx =$$

$$= \frac{2}{5} \left(x+2\right)^{\frac{5}{2}} + C_1 - \frac{4}{3} \left(x+2\right)^{\frac{3}{2}} + C_2 = \frac{2}{5} \sqrt{\left(x+2\right)^5} - \frac{4}{3} \sqrt{\left(x+2\right)^3} + C$$

por lo tanto :

$$\int x\ \sqrt{x+2}\ dx = \frac{2}{5}\sqrt{(x+2)^5} - \frac{4}{3}\sqrt{(x+2)^3} + \underbrace{C}_{cc}$$

Verificación :

Si derivamos $\frac{2}{5}\sqrt{(x+2)^5} - \frac{4}{3}\sqrt{(x+2)^3} + \underbrace{C}_{constante}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $x\ \sqrt{x+2}$

Veamos :

$$\left[\frac{2}{5}\sqrt{(x+2)^5} - \frac{4}{3}\sqrt{(x+2)^3} + C\right]' = \frac{2}{5}\left[\sqrt{(x+2)^5}\right]' - \frac{4}{3}\left[\sqrt{(x+2)^3}\right]' + [C]' =$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{(x+2)^3} - \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{(x+2)} + 0 = \sqrt{(x+2)^3} - 2\sqrt{(x+2)} =$$

$$= \sqrt{(x+2)}\ (x+2-2) = \sqrt{(x+2)}\ \ x = x\ \sqrt{x+2} \quad , \quad ok$$

Ej 4 p)

$$\int x\ (3x+1)^5\ dx$$

Conviene desarrollar el integrando :

$$(3x+1)^5 = (3x+1)^2\ (3x+1)^2\ (3x+1) = (9x^2+6x+1)\ (9x^2+6x+1)\ (3x+1) =$$

$$= (81x^4+54x^3+9x^2+54x^3+36x^2+6x+9x^2+6x+1)\ (3x+1) =$$

$$= (81x^4+108x^3+54x^2+12x+1)\ (3x+1) =$$

$$= 243x^5+324x^4+162x^3+36x^2+3x+81x^4+108x^3+54x^2+12x+1 =$$

$$= 243x^5+405x^4+270x^3+90x^2+15x+1$$

Falta multiplicar por x :

$$x\ (3x+1)^5 = 243x^6+405x^5+270x^4+90x^3+15x^2+x$$

Entonces :

$$\int x\ (3x+1)^5\ dx = \int (243x^6+405x^5+270x^4+90x^3+15x^2+x)\ dx =$$

$$= \int 243x^6\ dx + \int 405x^5\ dx + \int 270x^4\ dx + \int 90x^3\ dx + \int 15x^2\ dx + \int x\ dx =$$

$$= 243 \int x^6\ dx + 405 \int x^5\ dx + 270 \int x^4\ dx + 90 \int x^3\ dx + 15 \int x^2\ dx + \int x\ dx =$$

$$= 243 \cdot \frac{1}{7} x^7 + 405 \cdot \frac{1}{6} x^6 + 270 \cdot \frac{1}{5} x^5 + 90 \cdot \frac{1}{4} x^4 + 15 \cdot \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \text{sxsxa}$$

$$= \frac{243}{7} x^7 + \frac{135}{2} x^6 + 54 x^5 + \frac{45}{2} x^4 + 5 x^3 + \frac{1}{2} x^2 + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

por lo tanto :

$$\int x\ (3 x + 1)^5\ dx = \frac{243}{7} x^7 + \frac{135}{2} x^6 + 54 x^5 + \frac{45}{2} x^4 + 5 x^3 + \frac{1}{2} x^2 + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

Verificación :

Si derivamos $\frac{243}{7} x^7 + \frac{135}{2} x^6 + 54 x^5 + \frac{45}{2} x^4 + 5 x^3 + \frac{1}{2} x^2 + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $x\ (3 x + 1)^5 = 243 x^6 + 405 x^5 + 270 x^4 + 90 x^3 + 15 x^2 + x$

Veamos :

$$\left[\frac{243}{7} x^7 + \frac{135}{2} x^6 + 54 x^5 + \frac{45}{2} x^4 + 5 x^3 + \frac{1}{2} x^2 + C\right]' =$$

$$= \frac{243}{7} \cdot 7 x^6 + \frac{135}{2} \cdot 6 x^5 + 54 \cdot 5 x^4 + \frac{45}{2} \cdot 4 x^3 + 5 \cdot 3 x^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 x + [C]' =$$

$$= 243 x^6 + 405 x^5 + 270 x^4 + 90 x^3 + 15 x^2 + x + 0 =$$

$$= 243 x^6 + 405 x^5 + 270 x^4 + 90 x^3 + 15 x^2 + x \quad , \quad \text{ok}$$

Otra manera de resolver el Ej 4 p)

basados en el Ej 4 o) en el integrando vamos a hacer que aparezca, en vez de

$x\ (3 x + 1)^5$ **algo del tipo** $(3 x + 1)\ (3 x + 1)^5$ **para llamar** $u = 3 x + 1$

Veamos truco mágico :

Para que aparezca un 3 multiplicando a x **hacemos aparecer** $\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$ **así no cambio**

el integrando

$$\int x\ (3 x + 1)^5\ dx = \int \frac{1}{3} \cdot 3 x\ (3 x + 1)^5\ dx$$

me falta que aparezca $3 x + 1$**, entonces sumo** $0 = +1 - 1$ **así sigo sin cambiar**

el integrando

$= \frac{1}{3} \int (3x + 1 - 1)\,(3x+1)^5\, dx$ y aplicando propiedad distributiva :

$(3x+1-1)\,(3x+1)^5 = (3x+1)\,(3x+1)^5 - 1\,(3x+1)^5$ queda

$= \frac{1}{3} \int (3x+1)\,(3x+1)^5\, dx - \frac{1}{3} \int (1)\,(3x+1)^5\, dx =$

El problema se transformó en calcular estas dos integrales :

$$\int x\,(3x+1)^5\, dx = \frac{1}{3} \int (3x+1)\,(3x+1)^5\, dx - \frac{1}{3} \int (1)\,(3x+1)^5\, dx$$

Calculemos la 1 era de las integrales :

$\frac{1}{3} \int (3x+1)\,(3x+1)^5\, dx =$

llamamos $u = 3x + 1$ y como $du = u'\, dx \Longrightarrow du = 3\, dx \Longrightarrow \frac{1}{3} du = dx$

sustituyendo quedará :

$$= \frac{1}{3} \int u \cdot u^5\, \frac{1}{3} du = \frac{1}{9} \int u^6\, du = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{7} u^7 + C_1 = \frac{1}{63} u^7 + C_1 = \frac{1}{63} (3x+1)^7 + C_1$$

Calculemos la 2 da de las integrales :

$-\frac{1}{3} \int (1)\,(3x+1)^5\, dx =$

llamamos $u = 3x + 1$ y como $du = u'\, dx \Longrightarrow du = 3\, dx \Longrightarrow \frac{1}{3} du = dx$

sustituyendo quedará :

$$-\frac{1}{3} \int u^5\, \frac{1}{3} du = -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{6} u^6 + C_2 = -\frac{1}{54} u^6 + C_2 = -\frac{1}{54} (3x+1)^6 + C_2$$

sumando los resultados de ambas integrales :

$$\int x\,(3x+1)^5\, dx = \frac{1}{3} \int (3x+1)\,(3x+1)^5\, dx - \frac{1}{3} \int (1)\,(3x+1)^5\, dx =$$

$$= \frac{1}{63} u^7 + C_1 - \frac{1}{54} u^6 + C_2 = \frac{1}{63} (3x+1)^7 - \frac{1}{54} (3x+1)^6 + C =$$

cons

sacando factor común $\frac{1}{9}\left(3x+1\right)^{6}$ **queda :**

$$= \frac{1}{9}\left(3x+1\right)^{6}\left(\frac{1}{7}\left(3x+1\right)-\frac{1}{6}\right)+\underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{1}{9}\left(3x+1\right)^{6}\frac{1}{42}\left(6\left(3x+1\right)-7\right)+\underbrace{C}_{\text{cons}} =$$

$$= \frac{1}{9}\left(3x+1\right)^{6}\frac{1}{42}\left(18x-1\right)+\underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{1}{378}\left(3x+1\right)^{6}\left(18x-1\right)+\underbrace{C}_{\text{cc}}$$

por lo tanto :

$$\int x\ \left(3x+1\right)^{5}\ dx = \frac{1}{378}\left(3x+1\right)^{6}\left(18x-1\right)+\underbrace{C}_{\text{cc}}$$

Verificación :

Si derivamos $\frac{1}{378}\left(3x+1\right)^{6}\left(18x-1\right)+\underbrace{C}_{\text{constante}}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $x\ \left(3x+1\right)^{5} = 243x^{6}+405x^{5}+270x^{4}+90x^{3}+15x^{2}+x$

Veamos :

$$\left[\frac{1}{378}\left(3x+1\right)^{6}\left(18x-1\right)+C\right]' = \frac{1}{378}\left[\left(3x+1\right)^{6}\left(18x-1\right)\right]' + [C]' =$$

$$= \frac{1}{378}\left[\left(3x+1\right)^{6}\right]'\cdot\left(18x-1\right)+\frac{1}{378}\left(3x+1\right)^{6}\cdot\left[\left(18x-1\right)\right]'+0 =$$

$$= \frac{1}{378}\cdot 6\cdot\left(3x+1\right)^{5}\cdot 3\cdot\left(18x-1\right)+\frac{1}{378}\left(3x+1\right)^{6}\cdot 18 =$$

$$= \frac{1}{378}\cdot 18\cdot\left(3x+1\right)^{5}\cdot\left(18x-1\right)+\frac{18}{378}\left(3x+1\right)^{6} =$$

$$= \frac{1}{21}\cdot\left(3x+1\right)^{5}\cdot\left(18x-1\right)+\frac{1}{21}\left(3x+1\right)^{6}$$

sacando factor común $\frac{1}{21}\cdot\left(3x+1\right)^{5}$

$$= \frac{1}{21}\cdot\left(3x+1\right)^{5}\cdot\left(18x-1+3x+1\right) =$$

$$= \frac{1}{21}\cdot\left(3x+1\right)^{5}\cdot\left(21x\right) = \left(3x+1\right)^{5}\cdot x \quad , \quad \text{ok}$$

Ej 4 q)

$$\int x\ e^{x^{2}+5}\ dx$$

llamamos $u = x^2 + 5$ **y como** $du = u' \, dx \implies du = 2 \, x \, dx \implies \frac{1}{2} du = x \, dx$

sustituyendo :

$$\int x \; e^{x^2+5} \; dx = \int e^{x^2+5} \; x \, dx = \int e^u \; \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int e^u \; du = \frac{1}{2} e^u + \underset{\text{cc}}{C}$$

volviendo a la variable x :

$$= \frac{1}{2} e^{x^2+5} + \underset{\text{cc}}{C}$$

por lo tanto :

$$\int x \; e^{x^2+5} \; dx = \frac{1}{2} e^{x^2+5} + \underset{\text{cc}}{C}$$

Verificación :

Si derivamos $\frac{1}{2} e^{x^2+5} + \underset{\text{constante}}{C}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $x \; e^{x^2+5}$

Veamos :

$$\left[\frac{1}{2} e^{x^2+5} + C\right]' = \frac{1}{2}\left[e^{x^2+5}\right]' + [C]' = \frac{1}{2} e^{x^2+5} \cdot 2 \, x + 0 = e^{x^2+5} \cdot x = x \; e^{x^2+5} \quad , \quad \text{ok}$$

Ej 4 r)

$$\int e^{\cos(x)} \; \operatorname{sen}(x) \; dx$$

llamamos $u = \cos(x)$ **y como** $du = u' \, dx \implies du = -\operatorname{sen}(x) \, dx$

$\implies -du = \operatorname{sen}(x) \, dx$

sustituyendo :

$$\int e^{\cos(x)} \; \operatorname{sen}(x) \; dx = \int e^u \; (-du) = -\int e^u \, du = -e^u + \underset{\text{cc}}{C}$$

volviendo a la variable x :

$$= -e^{\cos(x)} + \underset{\text{cc}}{C}$$

por lo tanto :

$$\int e^{\cos(x)}\,\text{sen}(x)\,dx = -e^{\cos(x)} + \underbrace{C}_{cc}$$

Verificación :

Si derivamos $-e^{\cos(x)} + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $e^{\cos(x)}\,\text{sen}(x)$

Veamos :

$$\left[-e^{\cos(x)} + C\right]' = -\left[e^{\cos(x)}\right]' + [C]' = -e^{\cos(x)}\,(-\text{sen}(x)) + 0 = e^{\cos(x)}\,\text{sen}(x) \quad , \quad \text{ok}$$

+-+

Para resolver el Ej 5 hace falta estudiar el Método de inttegración por partes

sugerido por la cátedra de Mate 51

Método de integración por partes

Recordemos cómo se calcula la derivada del producto de dos funciones:
Si f y g son funciones derivables,

$$(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x).$$

Integremos ambos miembros:

$$\int (f(x).g(x))'dx = \int [f'(x).g(x) + f(x).g'(x)]dx.$$

El miembro izquierdo nos da (por definición de integral indefinida), $f(x).g(x) + C$; y en el miembro derecho podemos escribir la integral de la suma como la suma de las integrales:

$$f(x).g(x) + C = \int f'(x).g(x)dx + \int f(x).g'(x)dx.$$

Si pasamos restando uno de los términos, obtenemos la siguiente expresión:

$$f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx + C = \int f(x).g'(x)dx.$$

De estas cuentas que acabamos de hacer surge el método de integración por partes que nos indica que

$$\boxed{\int f(x).g'(x)dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx}$$

Veamos en un ejemplo cómo nos es útil este método:

Ejemplo 1. Calcular $\int x\cos(x)dx$.

Esta integral no está en tabla, no tiene ninguna suma (o resta), no tiene ningún número que pueda "sacarse afuera", ni tiene ninguna composición evidente. Intentamos entonces calcularla utilizando el método de integración por partes. Entre los factores, x y $\cos(x)$, elegimos uno que llamaremos $f(x)$ y otro que jugará el rol de $g'(x)$. Tomemos $f(x) = x$ y $g'(x) = \cos(x)$. Para aplicar el método, tenemos que obtener $f'(x)$, que en este caso es $f'(x) = 1$; y $g(x)$, que es una primitiva de $g'(x)$, y en este caso vemos en la tabla que puede ser $g(x) = \mathrm{sen}(x)$. Entonces nos queda:

$$\int x\cos(x)dx \underset{\substack{\downarrow \\ f(x)=x \to f'(x)=1 \\ g'(x)=\cos(x) \to g(x)=\mathrm{sen}(x)}}{=} x\,\mathrm{sen}(x) - \int 1.\,\mathrm{sen}(x)dx = x\,\mathrm{sen}(x) - \int \mathrm{sen}(x)dx$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{integral por tabla}}}{=} x\,\mathrm{sen}(x) - (-\cos(x)) + C = \boxed{x\,\mathrm{sen}(x) + \cos(x) + C}$$

Algunas observaciones:

- Este método nos reduce el cálculo de una integral al de otra más sencilla. En este ejemplo, pasamos de integrar $x\cos(x)$ a integrar $\mathrm{sen}(x)$, que está en tabla.
- La constante de integración C la sumamos una vez que no tenemos que calcular más integrales. Hay otras formas correctas de tratar la suma de estas constantes, pero sumarla en esta instancia es una de las formas más convenientes
- La función g puede ser \textbf{cualquier} primitiva de la función que llamamos g'. En general, conviene elegir aquella cuya constante de integración es cero.
- No hay una forma clásica de elegir qué función jugará el papel de f y cuál el de g'. A pesar de que existen algunas reglas prácticas que indican qué elección conviene hacer, la mejor manera de aprender a elegir es a través de la práctica, calculando muchas integrales. En este ejemplo, si hubiéramos elegido $f(x) = \cos(x)$ y $g'(x) = x$ habríamos llegado a una integral que tampoco sabemos resolver con los métodos anteriores:

$$\int x\cos(x)dx \underset{\substack{f(x)=\cos(x)\to f'(x)=-\mathrm{sen}(x)\\ g'(x)=x\to g(x)=\frac{x^2}{2}}}{\overset{}{=}} \frac{x^2}{2}(-\mathrm{sen}(x)) - \int(-\mathrm{sen}(x))\frac{x^2}{2}dx$$

$$= -\frac{x^2}{2}\mathrm{sen}(x) + \frac{1}{2}\int x^2\,\mathrm{sen}(x)dx$$

Ejemplo 2. Calcular $\int x^2\,\mathrm{sen}(x)dx$.

Esta integral tampoco está en tabla, no tiene ninguna suma (o resta), no tiene ningún número que pueda "sacarse afuera", ni tiene ninguna composición evidente. Intentamos, nuevamente, resolverla utilizando el método de integración por partes. Entre los factores, x^2 y $\mathrm{sen}(x)$, elegimos uno que llamaremos $f(x)$ y otro que jugará el rol de $g'(x)$. Tomemos $f(x)=x^2$ y $g'(x)=\mathrm{sen}(x)$ (¿qué pasaba si lo tomábamos al revés?).

$$\int x^2\,\mathrm{sen}(x)dx \underset{\substack{f(x)=x^2\to f'(x)=2x\\ g'(x)=\mathrm{sen}(x)\to g(x)=-\cos(x)}}{=} x^2(-\cos(x)) - \int 2x(-\cos(x))dx = -x^2\cos(x) + 2\int x\cos(x)dx$$

Esta última integral que nos aparece no está en tabla, pero la calculamos en el ejemplo anterior (también utilizando el método de integración por partes). Así, utilizando el método de integración por parte dos veces, resolvemos nuestra integral original:

$$\int x^2\,\mathrm{sen}(x)dx \underset{\substack{f(x)=x^2\to f'(x)=2x\\ g'(x)=\mathrm{sen}(x)\to g(x)=-\cos(x)}}{=} -x^2\cos(x) + 2\int x\cos(x)dx$$

$$\underset{\substack{f(x)=x\to f'(x)=1\\ g'(x)=\cos(x)\to g(x)=\mathrm{sen}(x)}}{=} -x^2\cos(x) + 2\Big(x\,\mathrm{sen}(x) - \int \mathrm{sen}(x)dx\Big)$$

$$= \boxed{-x^2\cos(x) + 2(x\,\mathrm{sen}(x) + \cos(x)) + C}$$

Ejemplo 3. Calcular $\int e^{3x}(5x+1)dx$.

La función adentro de esta integral no está en tabla pero, si distribuimos, es la integral de una suma. Sin embargo, separar esta suma no necesariamente nos va a simplificar las cuentas (esto se aprende después de mucha ejercitación).

Aunque vemos la composición de la función e^x con $h(x)=3x$, no encontramos relación entre $5x+1$ y $(3x)'=3$. Luego, podemos ver si se resuelve con el método de integración por partes. Vamos a tomar $f(x)=5x+1$ y por lo tanto será $f'(x)=5$. Y si tomamos $g'(x)=e^{3x}$ (que no está en la tabla), para hallar g tenemos que aplicar el método de sustitución, por la composición que acabamos de mencionar.

$$\int e^{3x}dx \underset{\substack{u=3x\\ du=3dx}}{=} \int \frac{3}{3}.e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

Entonces, para resolver nuestra integral procedemos de la siguiente manera:

$$\int e^{3x}(5x+1)dx \underset{\substack{f(x)=(5x+1)\to f'(x)=5\\ g'(x)=e^{3x}\to g(x)=\frac{1}{3}e^{3x}}}{=} \frac{1}{3}(5x+1)e^{3x} - \int 5.\frac{1}{3}.e^{3x}dx = \frac{1}{3}(5x+1)e^{3x} - \frac{5}{3}\int e^{3x}dx =$$

$$\underset{\text{como arriba}}{=} \frac{1}{3}(5x+1)e^{3x} - \frac{5}{3}.\frac{1}{3}e^{3x} + C = \boxed{\frac{1}{3}(5x+1)e^{3x} - \frac{5}{9}e^{3x} + C}$$

Ejercicio 5.- Calcular aplicando el método de integración por partes.

a. $\int x\cos(x)dx$ b. $\int xe^{x}dx$

c. $\int x\sqrt{x+2}dx$ d. $\int x^{9}\ln(x)dx$

e. $\int x^{3}\ln\left(\frac{1}{x}\right)dx$ f. $\int x^{2}e^{-x}dx$

g. $\int x^{2}\operatorname{sen}(x)dx$ h. $\int (x^{2}+x)(x-2)^{-3}dx$

El método de integración por partes deducido de la derivación del producto de funciones sugiere encontrar en el integrando funciones u y v' que hacen que la integral a resolver se transforme en una más sencilla

Usaremos esta notación :

sean u, v dos funciones reales de x , derivables e integrables

entonces como $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

si integramos en ambos miembros :

$$\int (u \cdot v)'\,dx = \int \left(u' \cdot v + u \cdot v'\right)dx = \int u' \cdot v\,dx + \int u \cdot v'\,dx \quad (*)$$

del lado izquierdo de la igualdad, la integral es de resolución inmediata

por definición misma de primitiva ó integral indefinida

(la integral de la derivada de una función es la misma función)

$$\int (u \cdot v)'\,dx = u \cdot v + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

Reemplazando $\int (u \cdot v)'\,dx = u \cdot v + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **: en**

$$\int (u \cdot v)'\,dx = \int u' \cdot v\,dx + \int u \cdot v'\,dx$$

$$= u \cdot v + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \int u' \cdot v\,dx + \int u \cdot v'\,dx$$

despejando $\int u \cdot v'\,dx$ **:**

el método de integración por partes sugiere entonces que :

$$\int u \cdot v'\,dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\,dx + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

Apliquemos el método al Ej 5

Ej 5 a) Calcular

$$\int x\cos(x)\,dx$$

en el integrando hay un producto de 2 funciones de x :

x y cos (x)

mirando las integrales del método de integración por partes :

como del lado derecho aparece $-\int u'\cdot v\,dx$

si llamamos $u = x$ **y como** $u' = 1$ **seguro la integral** $-\int u'\cdot v\,dx$

va a ser más sencilla de resolver

(le bajamos un grado a uno de los factores del integrando)

Probemos eso .

En la integral a resolver $\int x\cos(x)\,dx$

llamamos $u = x$ **y** $v' = \cos(x)$ **entonces :**

si $u = x \implies u' = 1$

si $v' = \cos(x) \implies v = \int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x)$

(las constantes de integración las juntamos todas en una C única al final)

constante

reemplacemos todo esto para ver como queda la integración por partes :

$$\int u\cdot v'\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx$$

$$\int x\cdot\cos(x)\,dx = x\cdot\operatorname{sen}(x) - \int 1\cdot\operatorname{sen}(x)\,dx$$

acá ya vemos que el método funcionó porque $-\int 1\cdot\operatorname{sen}(x)\,dx$ **es**

más sencilla de resolver

finalmente :

$$\int x\cdot\cos(x)\,dx = x\cdot\operatorname{sen}(x) - \int 1\cdot\operatorname{sen}(x)\,dx =$$

$$= x\cdot\operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x)\,dx = x\cdot\operatorname{sen}(x) - (-\cos(x)) + C =$$

cons

$= x \cdot \text{sen}(x) + \cos(x) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$

por lo tanto :

$$\int x \cos(x)\, dx = x \cdot \text{sen}(x) + \cos(x) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

Verificación :

Si derivamos $x \cdot \text{sen}(x) + \cos(x) + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $x \cos(x)$

Veamos :

$[x \cdot \text{sen}(x) + \cos(x) + C]' = [x \cdot \text{sen}(x)]' + [\cos(x)]' + [C]' =$

$= [x]' \cdot \text{sen}(x) + x \cdot [\text{sen}(x)]' + (-\text{sen}(x)) + 0 =$

$= 1 \cdot \text{sen}(x) + x \cdot \cos(x) - \text{sen}(x) =$

$= \text{sen}(x) + x \cdot \cos(x) - \text{sen}(x) = x \cos(x)$

Ej 5 b) Calcular

$$\int x\, e^x\, dx$$

en el integrando hay un producto de 2 funciones de x :

$x \quad y \quad e^x$

mirando las integrales del método de integración por partes :

$$\int u \cdot v'\, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\, dx + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

llamamos $u = x$ **y** $v' = e^x$ **entonces :**

si $u = x \quad \Longrightarrow \quad u' = 1$

si $v' = e^x \quad \Longrightarrow \quad v = \int e^x\, dx = e^x$

(las constantes de integración las juntamos todas en una $\underbrace{C}_{\text{constante}}$ **única al final)**

reemplacemos todo esto para ver como queda la integración por partes :

$$\int u \cdot v'\, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\, dx + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

$$\int x \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - \int e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x + \underset{\text{cc}}{C}$$

$$= e^x \left(x - 1\right) + \underset{\text{cc}}{C}$$

por lo tanto :

$$\int x \; e^x \, dx = e^x \; (x - 1) \; + \underset{\text{cc}}{C}$$

Verificación :

Si derivamos $e^x \left(x - 1\right) + \underset{\text{constante}}{C}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $x \cdot e^x$

Veamos :

$$\left[e^x \left(x - 1\right) + C\right]' = \left[e^x \left(x - 1\right)\right]' + [C]' =$$

$$= [e^x]' \cdot \left(x - 1\right) + e^x \cdot \left[\left(x - 1\right)\right]' + 0 = e^x \left(x - 1\right) + e^x \cdot 1 =$$

$$= e^x \cdot x - e^x + e^x = x \; e^x \quad , \quad \text{ok}$$

Ej 5 c) Calcular

$$\int x \sqrt{x + 2} \, dx$$

en el integrando hay un producto de 2 funciones de x :

$x \quad y \quad \sqrt{x + 2}$

mirando las integrales del método de integración por partes :

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx + \underset{\text{cc}}{C}$$

llamamos $u = x$ **y** $v' = \sqrt{x + 2}$ **entonces :**

si $u = x \quad \Longrightarrow \quad u' = 1$

si $v' = \sqrt{x + 2} \quad \Longrightarrow \quad v = \int \sqrt{x + 2} \, dx = \int \left(x + 2\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \left(x + 2\right)^{\frac{3}{2}}$

(las constantes de integración las juntamos todas en una $\underset{\text{constante}}{C}$ **única al final)**

reemplacemos todo esto para ver como queda la integración por partes :

$$\int u \cdot v' \; dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \; dx + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

$$\int x \cdot \sqrt{x+2} \; dx = x \cdot \frac{2}{3} (x+2)^{\frac{3}{2}} - \int 1 \cdot \frac{2}{3} (x+2)^{\frac{3}{2}} dx =$$

$$= \frac{2}{3} x \cdot (x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \int (x+2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{3} x \cdot (x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} (x+2)^{\frac{5}{2}} + \underbrace{C}_{\text{cons}} =$$

$$= \frac{2}{3} x (x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} (x+2)^{\frac{5}{2}} + \underbrace{C}_{\text{constante}} = \frac{2}{3} x \sqrt{(x+2)^3} - \frac{4}{15} \sqrt{(x+2)^5} + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

por lo tanto :

$$\int x \sqrt{x+2} \; dx = \frac{2}{3} x \sqrt{(x+2)^3} - \frac{4}{15} \sqrt{(x+2)^5} + \underbrace{C}_{\text{co}}$$

(Nota : en el medio del cálculo hemos usado método de sustitución llamando $m = x + 2 \implies dm = 1\, dx$ etc etc)

Verificación :

Si derivamos $\frac{2}{3} x \sqrt{(x+2)^3} - \frac{4}{15} \sqrt{(x+2)^5} + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $x \sqrt{x+2}$

Veamos :

$$\left[\frac{2}{3} x \sqrt{(x+2)^3} - \frac{4}{15} \sqrt{(x+2)^5} + C\right]' = \left[\frac{2}{3} x (x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} (x+2)^{\frac{5}{2}}\right]' + [C]' =$$

$$= \left[\frac{2}{3} x (x+2)^{\frac{3}{2}}\right]' - \left[\frac{4}{15} (x+2)^{\frac{5}{2}}\right]' + 0 =$$

$$= \left[\frac{2}{3} x\right]' \cdot (x+2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} x \cdot \left[(x+2)^{\frac{3}{2}}\right]' - \frac{4}{15}\left[(x+2)^{\frac{5}{2}}\right]' =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot (x+2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} x \cdot \frac{3}{2} \cdot (x+2)^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{15} \cdot \frac{5}{2} \cdot (x+2)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot (x+2)^{\frac{3}{2}} + x \cdot (x+2)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} \cdot (x+2)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= x \cdot (x+2)^{\frac{1}{2}} = \; , \; x \sqrt{x+2} \quad , \quad \text{ok}$$

Ej 5 d) Calcular

$$\int x^9 \ln(x) \, dx$$

en el integrando hay un producto de 2 funciones de x :

x^9 y $\ln(x)$

mirando las integrales del método de integración por partes :

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx + \underset{\text{cc}}{C}$$

llamamos $u = \ln(x)$ **y** $v' = x^9$ **entonces :**

si $u = \ln(x) \quad \Longrightarrow \quad u' = \dfrac{1}{x}$

si $v' = x^9 \quad \Longrightarrow \quad v = \int x^9 \, dx = \dfrac{1}{10} x^{10}$

(las constantes de integración las juntamos todas en una C única al final)
constante

reemplacemos todo esto para ver como queda la integración por partes :

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx + \underset{\text{cc}}{C}$$

$$\int \ln(x) \cdot x^9 \, dx = \ln(x) \cdot \frac{1}{10} x^{10} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{10} x^{10} \, dx =$$

$$= \frac{1}{10} x^{10} \ln(x) - \frac{1}{10} \int x^9 \, dx =$$

$$= \frac{1}{10} x^{10} \ln(x) - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} x^{10} + \underset{\text{cons}}{C} =$$

$$= \frac{1}{10} x^{10} \ln(x) - \frac{1}{100} x^{10} + \underset{\text{cons}}{C} =$$

$$= \frac{1}{10} x^{10} \left(\ln(x) - \frac{1}{10}\right) + \underset{\text{cc}}{C}$$

por lo tanto :

$$\int x^9 \ln(x) \, dx = \frac{1}{10} x^{10} \left(\ln(x) - \frac{1}{10}\right) + \underset{\text{cc}}{C}$$

Verificación :

Si derivamos $\dfrac{1}{10} x^{10} \left(\ln(x) - \dfrac{1}{10}\right) + \underset{\text{constante}}{C}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $x^9 \ln(x)$

Veamos :

$$\left[\frac{1}{10} x^{10} \left(\ln(x) - \frac{1}{10}\right) + C\right]' =$$

$$= \left[\frac{1}{10} x^{10}\right]' \cdot \left(\ln(x) - \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{10} x^{10} \cdot \left[\left(\ln(x) - \frac{1}{10}\right)\right]' + [C]' =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot 10\, x^9 \cdot \left(\ln(x) - \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{10} x^{10} \cdot \left([\ln(x)]' - \left[\frac{1}{10}\right]'\right) + 0 =$$

$$= x^9 \cdot \left(\ln(x) - \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{10} x^{10} \cdot \left(\frac{1}{x} - 0\right) =$$

$$= x^9 \cdot \ln(x) - x^9 \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{10} x^{10} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= x^9 \cdot \ln(x) - \frac{1}{10} x^9 + \frac{1}{10} x^9 =$$

$$= x^9 \cdot \ln(x) \quad , \quad \text{ok}$$

Ej 5 e) Calcular

$$\int x^3 \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

en el integrando hay un producto de 2 funciones de x :

x^3 **y** $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

mirando las integrales del método de integración por partes :

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx + C$$

co

llamamos $u = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ **y** $v' = x^3$ **entonces :**

si $u = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \Longrightarrow u' = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = x \cdot \left(x^{-1}\right)' = x \cdot (-1)\, x^{-2} = -\frac{x}{x^2} = -\frac{1}{x}$

si $v' = x^3 \Longrightarrow v = \int x^3 \, dx = \frac{1}{4} x^4$

(las constantes de integración las juntamos todas en una C única al final)

constante

reemplacemos todo esto para ver como queda la integración por partes :

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx + C$$

co

$$\int \ln\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x^3\,dx = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{4}x^4 - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{4}x^4\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\int x^3\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}x^4 + \underbrace{C}_{\text{cons}} =$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{16}x^4 + \underbrace{C}_{\text{cons}} =$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\right) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

por lo tanto :

$$\int x^3 \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{4}x^4 \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\right) + \underbrace{C}_{\text{cc}}$$

Verificación :

Si derivamos $\frac{1}{4}x^4 \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\right) + \underbrace{C}_{\text{constante}}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $x^3 \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Veamos :

$$\left[\frac{1}{4}x^4 \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\right) + C\right]' =$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4\right]' \cdot \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}x^4 \cdot \left[\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\right)\right]' + [C]' =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 4x^3 \cdot \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}x^4 \cdot \left(\left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]' + \left[\frac{1}{4}\right]'\right) + 0 =$$

$$= x^3 \cdot \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}x^4 \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' - 0\right) =$$

$$= x^3 \cdot \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}x^4 \cdot \left(x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= x^3 \cdot \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}x^4 \cdot \left(\frac{1}{x}\right) =$$

$= x^3 \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^3 = x^3 \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)$, ok

----

Ej 5 f) Calcular

$$\int x^2\, e^{-x}\, dx$$

en el integrando hay un producto de 2 funciones de x :

x^2 y e^{-x}

mirando las integrales del método de integración por partes :

$$\int u \cdot v'\, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\, dx + \underset{\text{co}}{C}$$

llamamos $u = x^2$ **y** $v' = e^{-x}$ **entonces :**

si $u = x^2 \implies u' = 2x$

si $v' = e^{-x} \implies v = \int e^{-x}\, dx = -e^{-x}$

(las constantes de integración las juntamos todas en una C única al final)
constante

reemplacemos todo esto para ver como queda la integración por partes :

$$\int u \cdot v'\, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\, dx + \underset{\text{co}}{C}$$

$$\int x^2 \cdot e^{-x}\, dx = x^2 \cdot (-e^{-x}) - \int 2x \cdot (-e^{-x})\, dx =$$

$$= -x^2 e^{-x} + 2\int x\, e^{-x}\, dx = \qquad (*)$$

----

cálculo auxiliar :

calculemos por partes tambien $\int x\, e^{-x}\, dx$

$$\int f \cdot g'\, dx = f \cdot g - \int f' \cdot g\, dx + \underset{\text{co}}{C}$$

llamamos $f = x$ **y** $g' = e^{-x}$ **entonces :**

si $f = x \implies f' = 1$

si $g' = e^{-x} \implies g = \int e^{-x}\, dx = -e^{-x}$ **(acá usamos sustitución)**

$$\left(u = -x \quad du = -1\, dx = -dx \implies \int e^{-x}\, dx = \int e^{u}\, (-du) = -e^{u} = -e^{-x} \right)$$

reemplacemos todo esto para ver como queda la integración por partes del cálculo auxiliar :

(las constantes de integración las juntamos todas en una $\underset{\text{constante}}{C}$ única al final)

$$\int f \cdot g' \, dx = f \cdot g - \int f' \cdot g \, dx$$

$$\int x \cdot e^{-x} \, dx = x \cdot (-e^{-x}) - \int 1 \cdot (-e^{-x}) \, dx$$

$$= -x\, e^{-x} + \int e^{-x} \, dx =$$

$$= -x\, e^{-x} + (-e^{-x}) = -e^{-x} (x + 1)$$

----

reemplazando el cálculo auxiliar en (*)

$$= -x^2 e^{-x} + 2 \int x\, e^{-x} \, dx = \qquad (*)$$

$$= -x^2 e^{-x} + 2 \left(-e^{-x} (x + 1)\right) + \underset{\text{cons}}{C} =$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2\, e^{-x} (x + 1) + \underset{\text{constante}}{C} = e^{-x} \left(-x^2 - 2\,x - 2\right) + \underset{\text{cons}}{C} =$$

$$= -e^{-x} \left(x^2 + 2\,x + 2\right) + \underset{\text{cc}}{C}$$

por lo tanto :

$$\int x^2 \, e^{-x} \, dx = -e^{-x} \left(x^2 + 2\,x + 2\right) + \underset{\text{cc}}{C}$$

Verificación :

Si derivamos $-e^{-x} \left(x^2 + 2\,x + 2\right) + \underset{\text{constante}}{C}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $x^2 \, e^{-x}$

Veamos :

$$\left[-e^{-x} \left(x^2 + 2\,x + 2\right) + C\right]' = -\left[e^{-x} \left(x^2 + 2\,x + 2\right)\right]' + [C]' =$$

$$= -\left\{[e^{-x}]' \cdot \left(x^2 + 2\,x + 2\right) + e^{-x} \cdot \left[x^2 + 2\,x + 2\right]'\right\} + 0 =$$

$$= -\left\{-e^{-x} \cdot \left(x^2 + 2\,x + 2\right) + e^{-x} \cdot (2\,x + 2)\right\} =$$

$$= \left\{e^{-x} \cdot \left(x^2 + 2\,x + 2\right) - e^{-x} \cdot (2\,x + 2)\right\} =$$

$$= e^{-x} \left\{x^2 + 2\,x + 2 - 2\,x - 2\right\} =$$

$$= e^{-x} \left\{x^2\right\} = x^2 e^{-x} \quad , \quad \text{ok}$$

Ej 5 g) Calcular

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x)\, dx$$

en el integrando hay un producto de 2 funciones de x :

x^2 y $\operatorname{sen}(x)$

mirando las integrales del método de integración por partes :

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx + C$$

co

llamamos $u = x^2$ **y** $v' = \operatorname{sen}(x)$ **entonces :**

si $u = x^2 \implies u' = 2x$

si $v' = \operatorname{sen}(x) \implies v = \int \operatorname{sen}(x)\, dx = -\cos(x)$

(las constantes de integración las juntamos todas en una C única al final)

constante

reemplacemos todo esto para ver como queda la integración por partes :

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx + C$$

co

$$\int x^2 \cdot \operatorname{sen}(x)\, dx = x^2 \cdot (-\cos(x)) - \int 2x \cdot (-\cos(x))\, dx =$$

$$= -x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x)\, dx = \qquad (**)$$

----

cálculo auxiliar :

calculemos por partes tambien $\int x \cos(x)\, dx$

$$\int f \cdot g' \, dx = f \cdot g - \int f' \cdot g \, dx + C$$

co

llamamos $f = x$ **y** $g' = \cos(x)$ **entonces :**

si $f = x \implies f' = 1$

si $g' = \cos(x) \implies g = \int \cos(x)\, dx = \operatorname{sen}(x)$

reemplacemos todo esto para ver como queda la integración por partes del cálculo auxiliar :

(las constantes de integración las juntamos todas en una C única al final)

constante

$$\int f \cdot g' \; dx = f \cdot g - \int f' \cdot g \; dx$$

$$\int x \cdot \cos(x) \; dx = x \cdot \operatorname{sen}(x) - \int 1 \cdot \operatorname{sen}(x) \; dx$$

$$= x \operatorname{sen}(x) - (-\cos(x)) =$$

$$= x \operatorname{sen}(x) + \cos(x)$$

----

reemplazando el cálculo auxiliar en (**)

$$= -x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x) \; dx = \qquad (**)$$

$$= -x^2 \cos(x) + 2\,(x \operatorname{sen}(x) + \cos(x)) + \underset{\text{cons}}{C} =$$

$$= -x^2 \cos(x) + 2\,x \operatorname{sen}(x) + 2 \cos(x) + \underset{\text{co}}{C}$$

por lo tanto :

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x) \; dx = -x^2 \cos(x) + 2\,x \operatorname{sen}(x) + 2 \cos(x) + \underset{\text{cor}}{C}$$

Verificación :

Si derivamos $-x^2 \cos(x) + 2\,x \operatorname{sen}(x) + 2 \cos(x) + \underset{\text{constante}}{C}$ **como resultado tenemos que obtener**

el integrando $x^2 \operatorname{sen}(x)$

Veamos :

$$\left[-x^2 \cos(x) + 2\,x \operatorname{sen}(x) + 2 \cos(x) + C\right]' =$$

$$= -\left[x^2 \cos(x)\right]' + 2\,[x \operatorname{sen}(x)]' + 2\,[\cos(x)]' + [C]' =$$

$$= -\left\{\left[x^2\right]' \cdot \cos(x) + x^2 \cdot [\cos(x)]'\right\} + 2\left\{[x]' \cdot \operatorname{sen}(x) + x \cdot [\operatorname{sen}(x)]'\right\} + 2\,(-\operatorname{sen}(x)) + 0 =$$

$$= -\left\{2\,x \cdot \cos(x) + x^2 \cdot (-\operatorname{sen}(x))\right\} + 2\,\{1 \cdot \operatorname{sen}(x) + x \cdot \cos(x)\} + 2\,(-\operatorname{sen}(x)) =$$

$$= -\left\{2\,x \cdot \cos(x) - x^2 \cdot \operatorname{sen}(x)\right\} + 2 \operatorname{sen}(x) + 2\,x \cdot \cos(x) - 2 \operatorname{sen}(x) =$$

$$= -2\,x \cdot \cos(x) + x^2 \cdot \operatorname{sen}(x) + 2 \operatorname{sen}(x) + 2\,x \cdot \cos(x) - 2 \operatorname{sen}(x) =$$

$$= x^2 \cdot \operatorname{sen}(x) - 2\,x \cdot \cos(x) + 2\,x \cdot \cos(x) + 2 \operatorname{sen}(x) - 2 \operatorname{sen}(x) =$$

$$= x^2 \cdot \operatorname{sen}(x) \quad , \quad \text{ok}$$

Ej 5 h) Calcular

$$\int \left(x^2 + x\right) \left(x - 2\right)^{-3} dx = \int \frac{x^2 + x}{\left(x - 2\right)^3} dx$$

en el integrando hay un cociente de 2 funciones de x :

$x^2 + x$ y $\left(x - 2\right)^3 = x^3 - 6 x^2 + 12 x - 8$

mirando las integrales del método de integración por partes :

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx + C \quad (**)$$

constante

En estos casos nos conviene ir bajando el exponente de $x^2 + x$ usando partes :

llamamos $u = x^2 + x$ y $v' = \left(x - 2\right)^{-3}$ entonces :

si $u = x^2 + x \implies u' = 2 x + 1$

si $v' = \left(x - 2\right)^{-3} \implies v = \int \left(x - 2\right)^{-3} dx =$

usamos sustitución para hallar v :

sea $y = x - 2 \implies dy = y' \, dx = 1 \, dx = dx$

sustituyendo :

$$v = \int \left(x - 2\right)^{-3} dx = \int y^{-3} dy = \frac{1}{-3 + 1} y^{-3+1} = -\frac{1}{2} y^{-2} = -\frac{1}{2} \left(x - 2\right)^{-2}$$

(las constantes de integración las juntamos todas en una C única al final)

constante

reemplacemos todo esto para ver como queda la integración por partes (**) :

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

$$\int \left(x^2 + x\right) \cdot \left(x - 2\right)^{-3} dx = \left(x^2 + x\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \left(x - 2\right)^{-2}\right) - \int \left(2 x + 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \left(x - 2\right)^{-2}\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \left(x^2 + x\right) \cdot \left(x - 2\right)^{-2} + \frac{1}{2} \int \left(2 x + 1\right) \cdot \left(x - 2\right)^{-2} dx = \quad (***)$$

----

cálculo auxiliar :

calculemos por partes también $\int \left(2 x + 1\right) \cdot \left(x - 2\right)^{-2} dx$

$$\int f \cdot g' \, dx = f \cdot g - \int f' \cdot g \, dx + C$$

co

llamamos $f = 2 x + 1$ y $g' = \left(x - 2\right)^{-2}$ entonces :

si $f = 2 x + 1 \implies f' = 2$

si $g' = \left(x - 2\right)^{-2} \implies g = \int \left(x - 2\right)^{-2} dx =$

$$= \int y^{-2}\,dy = \frac{1}{-2+1}\,y^{-2+1} = -y^{-1} = -(x-2)^{-1} = g$$

reemplacemos todo esto para ver como queda la integración por partes del cálculo auxiliar :

(las constantes de integración las juntamos todas en una C única al final)

constante

$$\int f\cdot g'\,dx = f\cdot g - \int f'\cdot g\,dx$$

$$\int (2x+1)\cdot(x-2)^{-2}\,dx = (2x+1)\cdot\left(-(x-2)^{-1}\right) - \int 2\cdot\left(-(x-2)^{-1}\right)dx$$

$$= -(2x+1)\cdot(x-2)^{-1} + 2\int (x-2)^{-1}\,dx =$$

$$= -(2x+1)\cdot(x-2)^{-1} + 2\int \frac{1}{(x-2)}\,dx =$$

$$= -(2x+1)\cdot(x-2)^{-1} + 2\int \frac{1}{y}\,dy = -(2x+1)\cdot(x-2)^{-1} + 2\ln|y| =$$

$$= -(2x+1)\cdot(x-2)^{-1} + 2\ln|x-2|$$

----

reemplazando el cálculo auxiliar en (***)

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2+x\right)\cdot(x-2)^{-2} + \frac{1}{2}\int (2x+1)\cdot(x-2)^{-2}\,dx = \quad (***)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2+x\right)\cdot(x-2)^{-2} + \frac{1}{2}\left\{-(2x+1)\cdot(x-2)^{-1} + 2\ln|x-2|\right\} + C =$$

cons

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2+x\right)\cdot(x-2)^{-2} - \frac{1}{2}\cdot(2x+1)\cdot(x-2)^{-1} + \ln|x-2| + C =$$

cons

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\left(x^2+x\right)}{(x-2)^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)}{(x-2)} + \ln|x-2| + C$$

co

por lo tanto :

$$\int \left(x^2+x\right)(x-2)^{-3}\,dx = -\frac{1}{2}\,\frac{\left(x^2+x\right)}{(x-2)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{(2x+1)}{(x-2)} + \ln|x-2| + C$$

cor

Verificación :

Si derivamos $-\frac{1}{2}\,\frac{\left(x^2+x\right)}{(x-2)^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)}{(x-2)} + \ln|x-2| + C$ **como resultado tenemos que obtener**

constante

el integrando $\left(x^2+x\right)\left(x-2\right)^{-3}$

Veamos :

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{\left(x^2+x\right)}{\left(x-2\right)^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(2x+1\right)}{\left(x-2\right)}+\ln|x-2|+C\right]'=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(x^2+x\right)}{\left(x-2\right)^2}\right]'-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(2x+1\right)}{\left(x-2\right)}\right]'+\left[\ln|x-2|\right]'+\left[C\right]'=$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left[x^2+x\right]'\cdot\left(x-2\right)^2-\left(x^2+x\right)\left[\left(x-2\right)^2\right]'}{\left(x-2\right)^4}\right\}-$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left[2x+1\right]'\cdot\left(x-2\right)-\left(2x+1\right)\left[\left(x-2\right)\right]'}{\left(x-2\right)^2}\right\}+\frac{1}{x-2}+0=$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(2x+1\right)\cdot\left(x-2\right)^2-\left(x^2+x\right)2\left(x-2\right)}{\left(x-2\right)^4}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{2\cdot\left(x-2\right)-\left(2x+1\right)\cdot 1}{\left(x-2\right)^2}\right\}+\frac{1}{x-2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(2x+1\right)\cdot\left(x^2-4x+4\right)-2\left(x^2+x\right)\left(x-2\right)}{\left(x-2\right)^4}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{2x-4-2x-1}{\left(x-2\right)^2}\right\}+\frac{1}{x-2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\left(x-2\right)^4}\left(2x^3-8x^2+8x+x^2-4x+4\right)-2\left(x^3+x^2-2x^2-2x\right)\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{-5}{\left(x-2\right)^2}\right\}+\frac{1}{x-2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\frac{2x^3-8x^2+8x+x^2-4x+4-2x^3-2x^2+4x^2+4x}{\left(x-2\right)^4}\right\}-\frac{1}{2}\left\{\frac{-5}{\left(x-2\right)^2}\right\}+\frac{1}{x-2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\frac{-5x^2+8x+4}{\left(x-2\right)^4}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{5}{\left(x-2\right)^2}\right\}+\frac{1}{x-2}=$$

$$=-\frac{1}{2\left(x-2\right)^4}\left\{-5x^2+8x+4-5\left(x-2\right)^2-2\left(x-2\right)^3\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2\left(x-2\right)^4}\left\{-5x^2+8x+4-5\left(x^2-4x+4\right)-2\left(x^3-6x^2+12x-8\right)\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2\left(x-2\right)^4}\left\{-5x^2+8x+4-5x^2+20x-20-2x^3+12x^2-24x+16\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2\left(x-2\right)^4}\left\{-2x^3+2x^2+4x\right\}=$$

$$=-\frac{-2x}{2\left(x-2\right)^4}\left\{x^2-x-2\right\}=\frac{x}{\left(x-2\right)^4}\left\{x^2-x-2\right\}=\frac{x}{\left(x-2\right)^4}\left(x+1\right)\left(x-2\right)=$$

$$=\frac{x\left(x+1\right)}{\left(x-2\right)^3}=\frac{\left(x^2+x\right)}{\left(x-2\right)^3}\quad,\quad \text{ok}$$